TURING 图灵数学 · 统计学丛书 38

ELSEVIER 爱思唯尔





# Principles of Financial Engineering

# 金融工程原理

[美] Salih N. Neftci 著

陈典发 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

# 金融工程原理
# Principles of Financial Engineering

“第一次对金融工程进行了全面且富有实际操作性的介绍。Neftci完美演绎了理论与实践的结合！”

——Darrell Duffie（斯坦福大学商学院金融系教授）

“本书生动地总结了最近激增的有关金融工程的理论和实践成果，令人激动！”

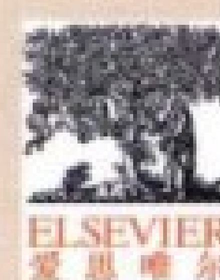
——Thomas Sargent（纽约大学经济学教授）

本书是一本经典的金融工程学导论。全书深入探讨了衍生产品的定价以及如何对它们进行对冲等问题，并由此将金融工程中最精髓的内容渐进式地展现出来。与现有教材不同，本书更注重对工程学的讨论，即着重讨论新的金融工具的合成构造问题。

本书虽为导论，但其内容全面详实，实例丰富，其中很多内容都反映了相关金融市场的最新发展动态。特别值得一提的是，本书作者使用了一种灵活的方法处理各种基本衍生品复制中所涉及的数学问题，这种独创性的处理方法，使读者无需具备高深的数学知识即可掌握实际中金融工具的合成方法和技术。

**Salih N. Neftci**（1947—2009）著名的金融学者，在资产定价、金融衍生物数学和风险管理方面有独到的研究。出生于土库曼斯坦，在美国明尼苏达大学获博士学位，先后在乔治·华盛顿大学、哥伦比亚大学、纽约城市大学任教，2009年4月于日内瓦去世。

本书译自原版*Principles of Financial Engineering*，并由Elsevier授权出版。



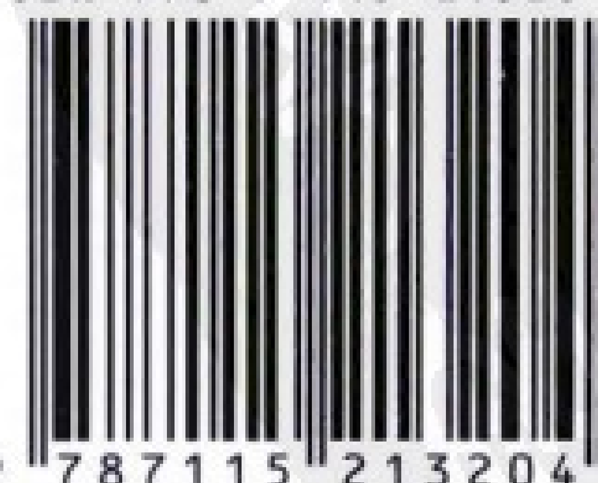




本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者热线：(010)51095186
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

| 分类建议 | 金融学/金融工程 |
|---|---|

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn




ISBN978-7-115-21320-4
定价：79.00元

TURING 图灵数学·统计学丛书 38



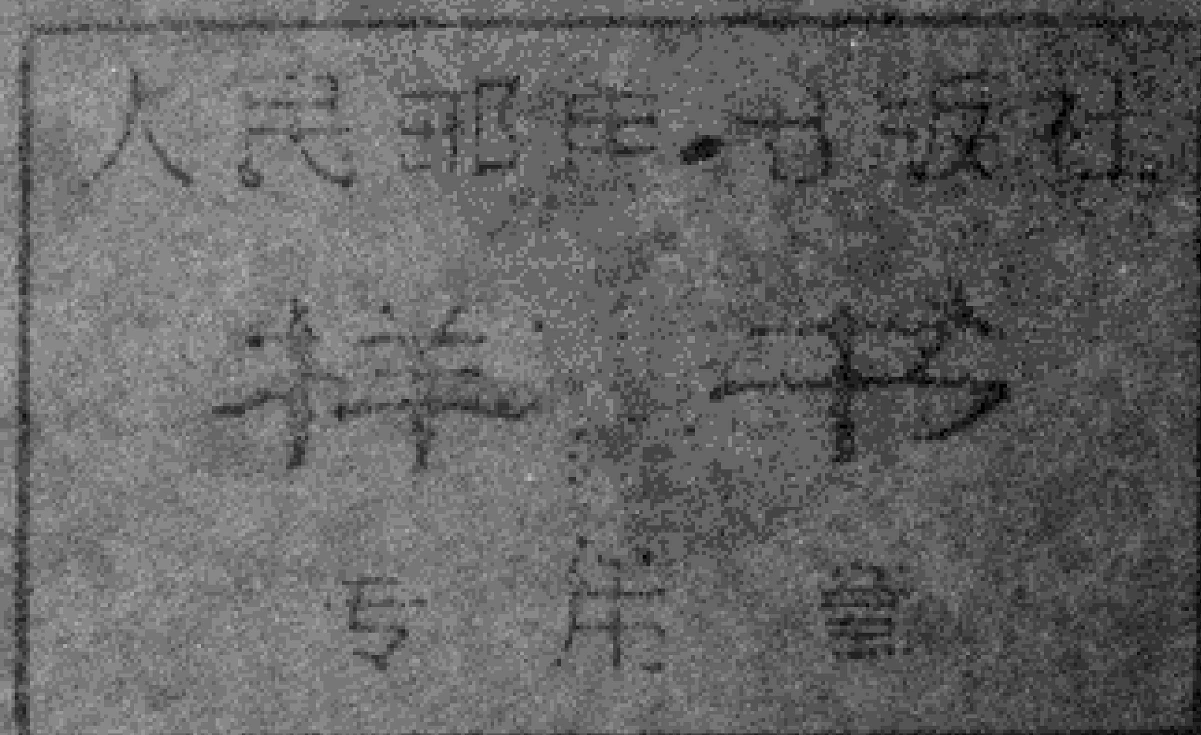


# Principles of Financial Engineering

# 金融工程原理

[美] Salih N. Neftci 著

陈典发 译




人民邮电出版社

北 京

**图书在版编目(CIP)数据**

金融工程原理/（美）内夫茨（Neftci, S. N.）著；陈典发译. —北京：人民邮电出版社, 2009. 11
(图灵数学 · 统计学丛书)
ISBN 978-7-115-21320-4

I. 金… II. ①内… ②陈… III. 金融学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 155263 号

## 内 容 提 要

本书是金融工程方面的入门教材. 与此方面现有教材不同, 本书侧重工程学, 即着重讨论新金融工具的合成构造. 书中使用许多直观方法, 如图表、合同方程等, 将复杂的数学理论简化, 对常见衍生品及有关金融工具的合成方法和技术进行了详尽的分析, 并进一步讨论它们的使用、定价、对冲和套利等相关问题. 此外, 书中各章都列举很多实际例子, 章末还有练习和案例研究, 是一本实际操作性较强的教材.

该书可作为大学本科生、研究生金融工程的入门教材, 也可供金融市场从业人员及相关专业的人士参考.

图灵数学·统计学丛书

**金融工程原理**

◆ 著 [美] Salih N. Neftci
译 陈典发
责任编辑 明永玲
执行编辑 边晓娜
◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000 1/16
印张：32. 5
字数：637 千字 2009 年 11 月第 1 版
印数：1–3 000 册 2009 年 11 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字： 01-2006-2276 号

ISBN 978-7-115-21320-4

定价：79.00 元

**读者服务热线：(010)51095186 印装质量热线：(010) 67129223**

**反盗版热线：(010)67171154**

# 版 权 声 明

*Principles of Financial Engineering* by Salih N. Neftci, ISBN: 0-12-515394-5.
Copyright © 2004 by Elsevier. All rights reserved.
Authorized Simplified Chinese translation edition published by the Proprietor.
ISBN: 978-981-259-580-5.
Copyright © 2009 by Elsevier (Singapore) Pte Ltd. All rights reserved.

**Elsevier (Singapore) Pte Ltd.**
3 Killiney Road
#08-01 Winsland House I
Singapore 239519
Tel: (65)6349-0200
Fax: (65)6733-1817

First Published 2009
2009年初版

Printed in China by POSTS & TELECOM PRESS under special arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd. This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书简体中文版由人民邮电出版社与 Elsevier (Singapore) Pte Ltd. 授权人民邮电出版社在中华人民共和国境内 (不包括香港特别行政区和台湾地区) 出版与销售. 未经许可之出口, 视为违反著作权法, 将受法律之制裁.

# 译 者 序

金融工程中的基本问题, 是如何利用已知的金融产品来构造新的金融工具, 以满足各种各样的需要. 更具体地说, 就是如何利用在现有各种金融市场中交易的金融产品作为基本构件, 复制出所需要的新的 (或因某种限制而无法得到的) 金融工具, 并对它们进行定价. 此过程中, 衍生金融产品是最常用和最基本的构件工具. 因此对这类产品的功能特性、交易的环境和过程以及定价理论的了解, 是迈进金融工程领域的第一步. 关于常见衍生产品的介绍也是金融工程教材的主题. 然而作为入门读物的教材, 如何处理衍生产品的定价问题一直困扰着作者们. 原因是: 一方面, 由于解决定价问题所依赖的无套利原理和复制过程, 在理论上需要使用很复杂的数学工具来描述, 如果将其中的细节都和盘托出, 不但篇幅庞大, 还会把大多数读者拒之门外; 另一方面, 基于这些原理方法的复制技术又是构造合成金融工具的基本思想和基本技术, 是金融工程的核心, 所以若完全舍弃有关理论推导的过程而仅仅写出一个定价公式 (或算法), 就无法让读者了解在实际中怎样去构造一个新的金融工具, 如何给它们定价和进行对冲等. 如何在这两个极端之间选择一个合适的切入点, 并由此把金融工程中最精髓的内容展现给读者, 一直是大多数相关教材作者努力的目标.

Salih N. Neftci 的这本《金融工程原理》的出版, 使我们第一次看到了这种努力的成功. 本书中, 作者使用一种非正规的方法处理各种基本衍生产品复制中所涉及的数学问题, 从市场中介 (典型的, 做市商) 的角度出发, 用形象具体的市场直观地解释复杂的数学原理和方法, 并从中提炼出实际所需要的复制和计算技术, 同时使用图表、合同方程等直观方式来表现它们, 又辅以大量的实际市场例子加以说明. 这种独创性的处理方法, 使读者无需具备高深的数学知识, 就可以了解实际中金融工具的合成方法和技术. 书中很多内容反映了相关市场的最新发展, 所介绍的很多衍生工具都是近几年才出现的, 比如波动率 (方差) 互换, 以及各种信用衍生产品等; 而把期权看作波动率而非方向工具, 利用各种工具的凸性和微笑现象进行套利等内容, 则在较深层面反映了当今金融工程的发展趋势. 因此本书不但适宜于入门读者, 那些具有一定经验的市场人士和熟悉金融资产定价理论的专家, 也会从中获益匪浅.

参加本书翻译的还有南开大学数学科学院金融数学方向 2004 级硕士研究生李阳、种玉香、唐涓和臧丽丽. 限于水平和时间仓促, 译文定有不当和错误之处, 望读

者批评指正.

陈典发
2007 年 5 月 13 日

# 译 者 简 介

**陈典发** 1982 年南开大学研究生毕业, 现任南开大学经济学院金融系教授, 金融工程研究中心主任; 兼任南开大学深圳金融工程学院教授, 计算金融系主任. 专业研究方向: 随机过程理论、金融数学和金融工程.

# 前　言

本书是一本入门读物, 讨论了一类相当广泛但却可以用金融工程联系起来的问题. 本书主要针对低年级研究生和金融工作者所写, 采用简单图表、初等数学和实例相结合的论述方法. 在进行讨论时, 我们将重点放在工程学方面的问题上, 而不去过深探究相关金融工具、金融市场和实务, 比如定价问题就只用了一些简单的例子加以介绍.

书中用几个真实故事作为实例. 这里我要感谢允许我使用这些材料的《国际金融评论》杂志 (IFR) 和《衍生证券周刊》. 这些年来, 陆续有一些从事实务工作的人员选修了我的课程, 使我有机会向他们学到了很多东西. 这些具有丰富知识和专业技巧的优秀人士对本书的成书作出了重要贡献. 我还和 Marek Musiela 对书中许多课题进行了讨论, 这使我受益匪浅. 我的几位同事和学生阅读了初稿, 在此要特别感谢 Jiang Yi、Lu Yinqui、Andrea Lange、Lucas Bernard、Inas Reshad 和几位不知名的审稿人, 他们阅读了原稿并提出了有益的意见.

当然, 书中尚存的错误应全部由我负责. 本书的勘误表和有关材料已经放在网上 (www.neftci.com), 我将定期进行更新. 本书的写作耗费了大量精力, 原本我还想讨论几个更高深一些的问题, 现在也不得不略去了, 打算等再版时再把它们加进来. 届时还将更新书中使用的实例.

Salih N. Neftci

2004 年 2 月于纽约

# 目　　录

第 1 章　引言 · · · 1
1.1　货币市场问题 · · · 1
1.2　税收例子 · · · 4
1.3　一些忠告 · · · 7
1.4　结论 · · · 8
参考文献 · · · 8
案例分析 · · · 9
第 2 章　市场、参与者以及市场惯例 · · · 11
2.1　引言 · · · 11
2.2　市场 · · · 11
2.3　参与者 · · · 14
2.4　交易机制 · · · 15
2.5　市场惯例 · · · 18
2.6　工具 · · · 24
2.7　头寸 · · · 25
2.8　辛迪加过程 · · · 28
2.9　结论 · · · 29
参考文献 · · · 30
习题 · · · 30
第 3 章　现金流工程与远期合约 · · · 32
3.1　引言 · · · 32
3.2　合成工具 · · · 32
3.3　远期合约 · · · 37
3.4　货币远期 · · · 40
3.5　合成与定价 · · · 45
3.6　合约方程 · · · 46
3.7　应用 · · · 47
3.8　"更好" 的合成工具 · · · 52
3.9　期货 · · · 56
3.10　远期惯例 · · · 60
3.11　结论 · · · 62
参考文献 · · · 62
习题 · · · 63
案例分析 · · · 64
第 4 章　简单利率衍生工具的金融工程 · · · 66
4.1　引言 · · · 66
4.2　Libor 和其他基准利率 · · · 67
4.3　远期贷款 · · · 68
4.4　远期利率协议 · · · 76
4.5　期货：欧洲货币合约 · · · 79
4.6　现实中的复杂性 · · · 84
4.7　远期利率和期限结构 · · · 85
4.8　惯例 · · · 87
4.9　一个题外话：剥离 · · · 88
4.10　结论 · · · 88
参考文献 · · · 88
习题 · · · 89
第 5 章　互换工程简介 · · · 92
5.1　引言 · · · 92
5.2　工具：互换 · · · 94
5.3　互换的类型 · · · 96
5.4　利率互换金融工程 · · · 106
5.5　互换的用途简介 · · · 113
5.6　互换机制的新问题 · · · 117
5.7　一些惯例 · · · 123
5.8　货币互换和 FX 互换 · · · 124
5.9　术语 · · · 125
5.10　结论 · · · 126
参考文献 · · · 127
习题 · · · 127
第 6 章　金融工程中的回购市场交易策略 · · · 130
6.1　引言 · · · 130
6.2　回购 · · · 131
6.3　回购的类型 · · · 133
6.4　股票回购 · · · 138

6.5 回购市场交易策略 …… 139
6.6 用回购进行合成 …… 144
6.7 结论 …… 146
参考文献 …… 146
习题 …… 146
案例分析 …… 147
**第 7 章 动态复制方法与合成** …… 149
7.1 引言 …… 149
7.2 一个例子 …… 150
7.3 静态复制方法的回顾 …… 150
7.4 特定合成 …… 155
7.5 动态复制的原理 …… 158
7.6 一些重要条件 …… 170
7.7 现实生活中的复杂性 …… 172
7.8 结论 …… 173
参考文献 …… 173
习题 …… 173
**第 8 章 期权的交易机制** …… 176
8.1 引言 …… 176
8.2 期权 …… 176
8.3 期权的定义和符号 …… 178
8.4 作为波动性工具的期权 …… 184
8.5 期权工具 …… 194
8.6 希腊字母和它们的用途 …… 201
8.7 现实中的复杂性 …… 212
8.8 结论：什么是期权 …… 213
参考文献 …… 214
附录 8-1 …… 214
附录 8-2 …… 216
习题 …… 218
**第 9 章 凸性头寸** …… 220
9.1 引言 …… 220
9.2 一个难题 …… 220
9.3 债券的凸性交易 …… 221
9.4 凸性的来源 …… 233
9.5 一种特殊的工具：交叉货币工具 …… 239
9.6 结论 …… 245
参考文献 …… 245
习题 …… 245
案例分析 …… 246
**第 10 章 期权工程及其应用** …… 249
10.1 引言 …… 249
10.2 期权策略 …… 252
10.3 基于波动率的策略 …… 262
10.4 奇异期权 …… 268
10.5 报价惯例 …… 280
10.6 现实中的复杂性 …… 282
10.7 结论 …… 283
参考文献 …… 283
习题 …… 283
**第 11 章 金融工程中的定价工具** …… 286
11.1 引言 …… 286
11.2 定价方法小结 …… 287
11.3 框架 …… 288
11.4 一个应用 …… 293
11.5 基本定理的推论 …… 399
11.6 无套利动态机理 …… 305
11.7 定价方法的选择 …… 310
11.8 结论 …… 310
参考文献 …… 310
附录 11-1 基本定理的简单经济学 …… 311
习题 …… 313
**第 12 章 基本定理的应用** …… 315
12.1 引言 …… 315
12.2 应用 1：Monte Carlo 方法 …… 316
12.3 应用 2：校准 …… 325
12.4 应用 3：交叉货币 …… 334
12.5 结论 …… 341
参考文献 …… 341
习题 …… 341
**第 13 章 固定收益工具工程框架** …… 343
13.1 引言 …… 343
13.2 互换框架 …… 344
13.3 期限结构模型 …… 353
13.4 期限结构动态机理 …… 355
13.5 测度变换技术 …… 365
13.6 应用 …… 370

13.7 结论 …… 376
参考文献 …… 376
附录 13-1 …… 376
习题 …… 379
**第 14 章 波动率工程、波动率互换和波动率交易工具 …… 380**
14.1 引言 …… 380
14.2 波动率头寸 …… 380
14.3 波动率支付的不变性 …… 382
14.4 纯波动率头寸 …… 389
14.5 波动率互换 …… 392
14.6 合约的一些应用 …… 397
14.7 波动率 …… 398
14.8 结论 …… 399
参考文献 …… 400
习题 …… 400
**第 15 章 金融工程中的微笑效应 …… 402**
15.1 引言 …… 402
15.2 预备知识 …… 402
15.3 微笑一瞥 …… 403
15.4 波动率微笑 …… 404
15.5 微笑动态机理 …… 412
15.6 如何解释微笑 …… 412
15.7 与微笑相关的问题 …… 420
15.8 交易微笑 …… 420
15.9 微笑的定价 …… 421
15.10 奇异期权和微笑 …… 427
15.11 结论 …… 431
参考文献 …… 431
习题 …… 431
**第 16 章 信用衍生品如何改变金融工程 …… 433**
16.1 引言 …… 433
16.2 术语和定义 …… 433
16.3 信用违约互换 …… 436
16.4 总收益互换 …… 445
16.5 信用衍生品的用途 …… 447
16.6 资产负债表和信用衍生品 …… 451
16.7 结论 …… 452
参考文献 …… 452
习题 …… 452
案例分析 …… 454
**第 17 章 权益工具的工程学：定价与复制 …… 456**
17.1 引言 …… 456
17.2 权益 …… 457
17.3 权益产品的工程应用 …… 463
17.4 证券化的金融工程 …… 473
17.5 结论 …… 476
参考文献 …… 476
习题 …… 477
案例研究 …… 477
**第 18 章 一个重要应用：互换期权和按揭贷款 …… 480**
18.1 引言 …… 480
18.2 按揭贷款市场 …… 481
18.3 互换期权 …… 487
18.4 互换期权的定价 …… 489
18.5 按揭贷款支持证券 …… 495
18.6 结论 …… 496
参考文献 …… 496
习题 …… 497
案例分析：丹麦抵押债券 …… 498
**参考文献 …… 501**
**索引 …… 505**

# 第1章　引　　言

本章引入一些简单的金融工程策略. 以两个用金融工程方法来解决的日常问题为例子. 在每一个例子中, 为解决所考虑的问题, 都需要创造适当的合成金融工具. 为此, 需要考虑相关的法律、市场惯例以及监管等方面的问题.

这些例子本身的性质是次要的, 我们的主要目的是借助它们引入用金融证券和它们的衍生品解决问题的先进方法. 本章涉及的有关术语和工具, 暂不作详细介绍. 事实上, 可能有部分读者还不能完全理解本章所讨论的内容. 这没有任何妨碍, 因为在后续章节中将详细解释它们.

## 1.1　货币市场问题

考虑一个日本银行, 它正在货币市场上寻找一笔 3 个月期的贷款. 该银行打算从欧洲市场上借入美元 (USD), 然后将其借给它的客户. 这笔银行间贷款将产生图 1-1 所示的现金流. 从借入者的角度看, 它在时刻 $t_0$ 收到 100 美元, 3 个月后, 即时刻 $t_0+\delta$ 偿还这笔本金以及利息. 用 $L_{t_0}$ 表示利息率, 它是在时刻 $t_0$ 就决定好的. 贷款期限是 3 个月, 因此有

$$\delta=\frac{1}{4} \tag{1}$$

应付的利息是 $L_{t_0}\frac{1}{4}$. 这里没有考虑违约的可能性.①

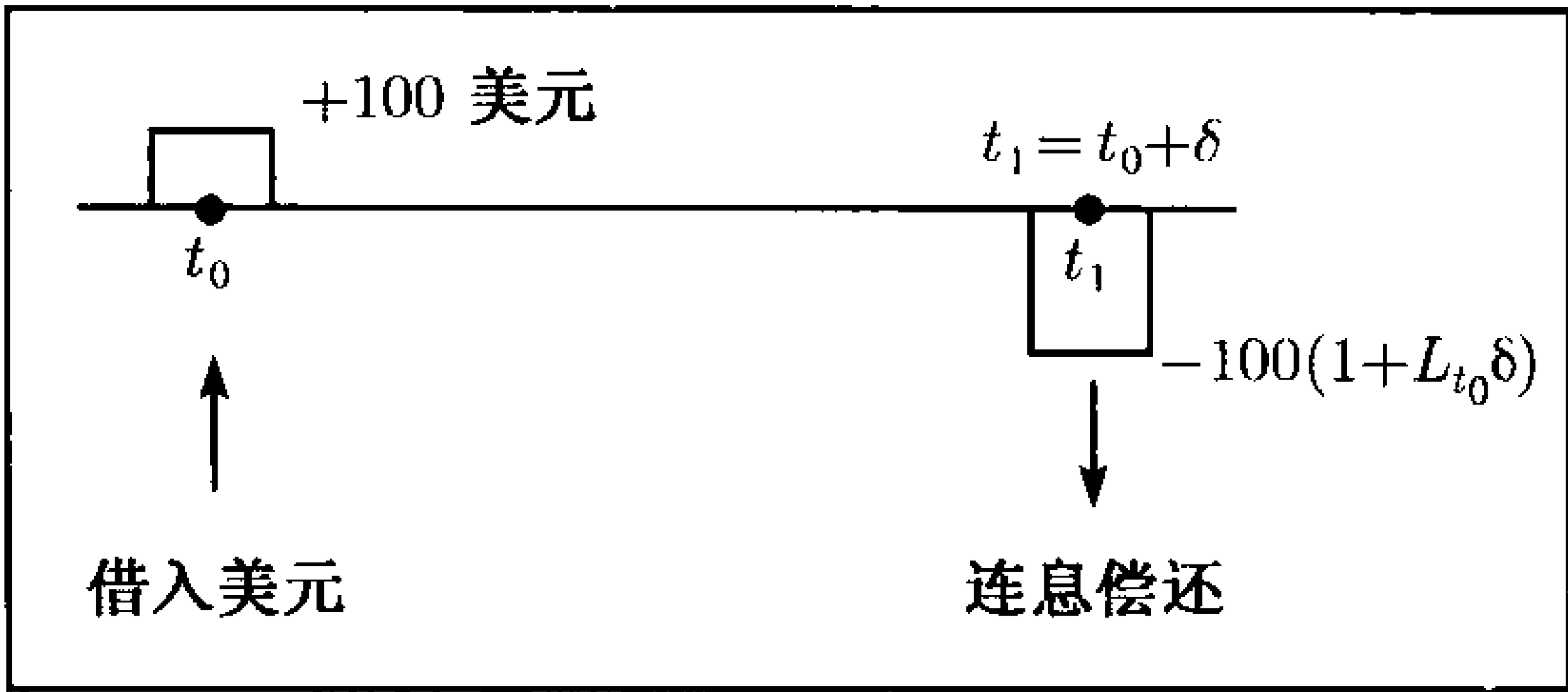



图　1-1

图 1-1 所示的货币市场贷款是一种流动性很好的工具. 事实上, 银行通常从银行间市场批发 "买进" 这样的资金, 然后以稍高的利率出借给它们的客户.

① 否则, 在时刻 $t_0+\delta$ 将视违约发生与否, 出现不同的现金流.

### 1.1.1 问题

现在假设上面这家日本银行发现, 它因为信用等级不够而不能获得此笔贷款, 所有的银行都不愿借给它这笔美元资金. 我们的问题是: 该银行还有其他办法进行上述美元融资吗?

答案是: 有办法. 实际上该银行可以使用外汇市场巧妙地构造出与图 1-1 完全相同的现金流, 从而创造一个合成的货币市场贷款. 这种创造似乎没什么新奇的, 但请注意, 当我们使用外汇市场工具及其衍生产品时, 涉及的是与货币市场完全不同的合约、不同的市场参与者和不同的市场惯例, 而结果是得到了和图 1-1 等同的现金流.

### 1.1.2 解答

至于如何创造一个合成贷款, 我们考虑下面的操作.

(1) 这家日本银行首先在其国内货币市场借入日元, 此操作表示在图 1-2a 中. 银行在时刻 $t_0$ 收到日元, 而在时刻 $t_0+\delta$ 按利率 $L^Y_{t_0}$ 支付日元本息.

(2) 然后, 银行在外汇即期市场按当前汇率 $e_{t_0}$ 卖出借进的日元, 获得 100 美元. 即期市场的操作如图 1-2b 所示.

(3) 最后, 银行要消除上面操作所产生的货币头寸不匹配. 为此, 它可以在外汇远期市场按已知的远期汇率 $f_{t_0}$ 买入 $100\,(1+L_{t_0}\delta)\,f_{t_0}$ 日元. 此操作的现金流如图 1-2c 所示. 这里, 时刻 $t_0$ 没有资金的交换, 而是在 $t_0+\delta$ 时刻远期美元和远期日元的交换.

现在来看看产生的结果. 在图 1-2 中将上面全部操作产生的现金流垂直相加. 在时刻 $t_0$, 由于日元的数量相同而符号相反, 它们互相抵消. 在时刻 $t_0+\delta$, 日元现金流也彼此抵消, 因为这是在选择远期合约的头寸时就决定好的: 该银行所买的远期日元数量, 刚好够支付它的日元贷款本金及利息. 抵消后的现金流如图 1-2d 所示, 它恰好和图 1-1 的现金流一样. 因此上面的 3 个操作就创造了一个合成的美元贷款.

### 1.1.3 一些相关问题

实际贷款和合成贷款之间存在着某些细微但却很重要的差别. 首先注意, 从欧洲市场银行的角度看, 它将 100 美元借给该日本银行就产生了一个信用风险, 若发生违约, 借出的 100 美元可能收不回来. 作为应对措施, 银行必须提取适量的资本金. 货币中心银行常根据货币市场和交易对手信用风险的情况, 调整客户的信用级别.

相比较而言, 在合成美元贷款情况下, 由于完全不涉及本金, 这些国际银行对日本银行的风险暴露仅仅发生在远期货币市场. 如果这家日本银行违约, 所产生

的负担是在日本国内银行系统身上. 远期货币操作也产生风险, 但这是对手风险, 影响有限. 因此, 如果使用合成贷款, 该日本银行最终可以相对容易地获得所要的资金.

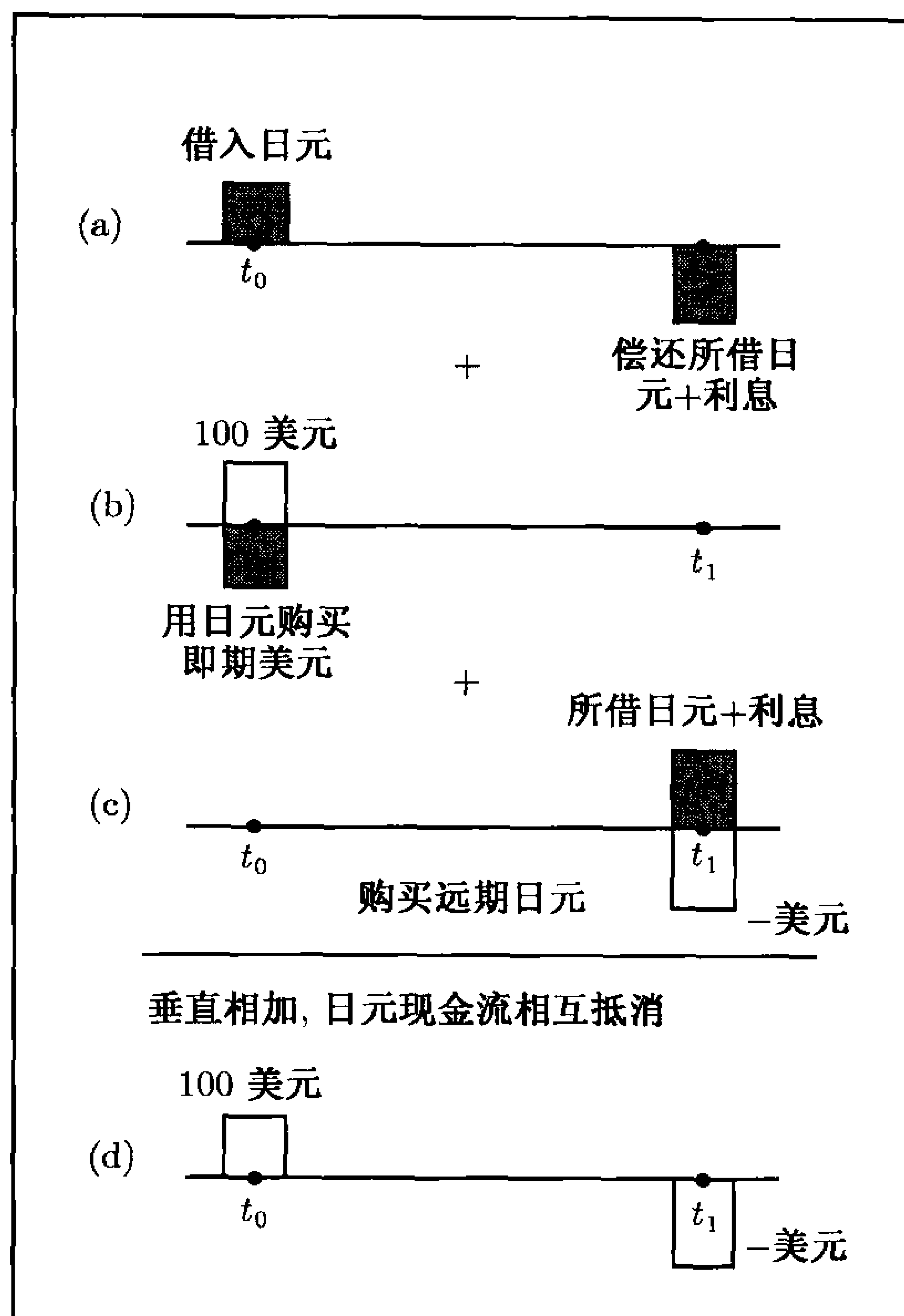



图 1-2

关于上面提到的信用风险, 还存在着另一个有趣的问题. 真正的货币市场贷款是一种欧洲市场工具, 欧洲市场的银行操作被看成*离岸*操作, 它们本质上不受任何一国银行监管机构的管辖. 另一方面, 国内日元贷款从在岸市场获得, 要受日本银行监管机构的监管. 如果发生违约, 有可能得到中央银行的帮助, 而不像欧洲美元贷款那样, 发生违约就可能给出借银行带来严重的后果.

第三是关于定价的问题. 若*不考虑*信用风险, 当实际贷款和合成贷款的现金流相同时, 它们的价值也应该相同. 因为若二者价值间存在差别, 市场上立即就会有人卖出贵的, 同时买入便宜的, 由此获得可观的利润. 这意味着, 可以利用合成金融工具给原来的金融工具定价.①

① 然而, 前面提到的信用风险问题, 可能导致这两种贷款价格之间的差异.

第四, 注意到货币市场贷款与合成贷款事实上可以相互对冲. 最后应注意, 尽管上面的两种美元融资途径产生了相同的现金流, 但由于它们分别发生在不同的金融市场, 涉及不同的金融合约, 因此在法律和监管方面差别可能是相当大的.

## 1.2 税收例子

现在来考虑一个完全不同的问题. 我们要创造合成工具来调整应税利润. 由于税收的法律环境比较复杂且无时不在变化, 所以本例最好只从金融工程角度去解读, 而不要视为一种税收策略. 该例说明, 金融工程师所做的工作与涉及这些工作的法律和监管之间有着密切的关系.

### 1.2.1 问题

在财务利润的税收和损失方面, 有一个专用词叫*洗卖*. 假定在 2002 年度, 某个投资者实现了某种财务利润. 这些利润按惯例是应纳税的. 但是可以使用许多财务处理方法将此税收延迟到下一年度. 为了防止这些做法, 国税局制定了一套规则, 称之为洗卖和*套利*规则. 重要的是, 各国税务部门的专业人员应该非常熟悉这些规则, 而且应具备较好的金融工程知识, 否则某些玩家就可能重新安排他们的投资组合从而导致严重的税收损失. 这里我们感兴趣的只是构造合成工具的方法. 本例将又一次展示了这种构造.

假设在 2002 年 9 月, 一个投资者以价格 $S_0$=100 美元买进某种资产. 2002 年 12 月, 该资产以 $S_1$=150 美元的价格售出. 于是投资者实现了 50 美元的资本利得. 这些现金流如图 1-3 所示. 第一个现金流是投资者的支出, 因而为负值, 将其标在时间轴的下方. 随后资产的售出则为他的收入, 其现金流为正值并标在时间轴上方. 投资者可能不得不为此资本利得交纳可观的税. 一个相关的问题是: 是否有办法将这些投资收益延迟到下一年度?

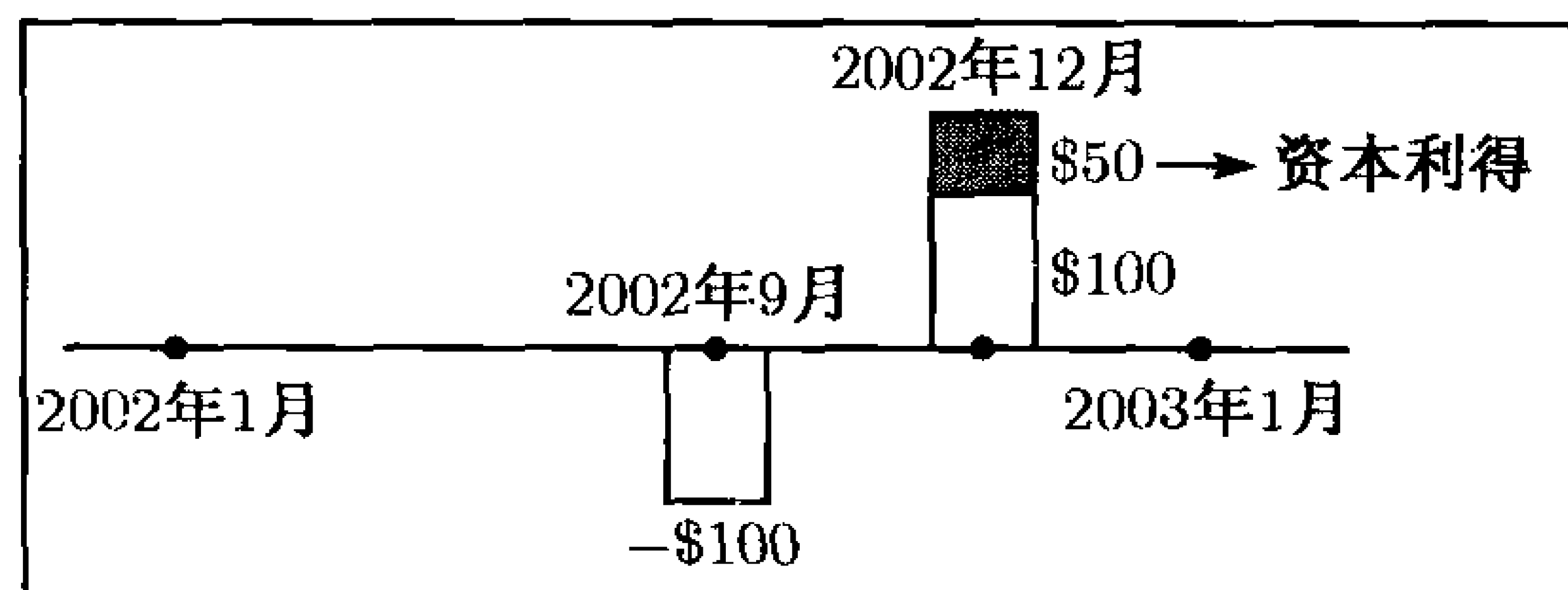



图 1-3

你可以提议使用下面的办法, 但它是被洗卖法规所禁止的. 投资者当前持有的资产可能有别于前面提到的 $S_t$, 毕竟恰当的投资策略是持有分散化的组合. 做以下假定也是合理的: 如果组合里有某些像 $S_t$ 那样正在增值的资产, 那么也有同期在

贬值的资产. 以 $Z_t$ 表示这种贬值资产的价格, 设其买价是 $Z_0$. 如果没有洗卖规则, 结合下面的方法就能将 2002 年的税收推迟.

在 2002 年 12 月以价格 $Z_1(Z_1 < Z_0)$ 卖出 $Z$ 资产, 第二天以类似的价格买回同样的 $Z_t$ 资产. 交易导致的损失为

$$Z_1 - Z_0 < 0. \tag{2}$$

随后进行的购买把该种资产重新放回投资组合使得分散化得以保持. 用这种方法实现了 $Z_t$ 资产的损失, 它将部分或全部抵消来自 $S_t$ 资产的利润. 上面采用的策略存在几个问题, 其中有一个是致命的. 税务部门称此为洗卖 (即一种故意用来 "洗掉" 2002 年利润的卖出), 而且不允许这种折扣.

### 另一种策略

然而, 投资者可以找到一种办法来出售 $Z$ 资产而不必用通常办法去卖掉它. 做法是这样的: 首先创造一个*合成的* $Z$ 资产, 然后在持有 $Z$ 资产的同时, 用这个合成的 $Z$ 资产而非组合中持有的 $Z$ 资产来实现所隐含的资本损失.

假设投资者最初以价格 $Z_0$=100 美元买入 $Z$ 资产且该资产现价为 $Z_1$=50 美元, 产生了 50 美元的账面损失. 投资者想要确认此损失而又不直接卖出该资产, 同时他也想持有 $Z$ 资产原来的头寸以保证资产组合的良好平衡. 如何在保持 $Z$ 资产头寸且不卖出 $Z_t$ 资产的情况下实现损失呢?

想法是构造一个适当的合成工具. 考虑以下操作.

- 在 2002 年 11 月 26 日以价格 $Z_1$=50 美元买入另一个 $Z$ 资产.
- 卖出一个关于 $Z$ 资产的平价买入期权, 其到期日为 2002 年 12 月 30 日.
- 买入一个关于 $Z$ 资产同样期限的平价卖出期权.

有关买入期权和卖出期权的细节将在后面章节讨论, 这里我们要对那些没有金融工具背景的读者多说几句话. 简单地说, 期权是一种给了购买者一定权利的工具. 在买入期权情形, 该权利是以预先指定价格 (这里为 50 美元) 购买标的资产 (这里是 $Z$ 资产). 卖出期权刚好相反, 它是以预先指定价格 (50 美元) 卖出标的资产. 另一方面, 当某人卖出期权后, 出售者就有义务以指定价格交割或接受该种资产.

下述交易具有重要作用: 卖出买入期权和买入卖出期权是两个证券, 将它们的到期支付相加将得到图 1-4 中所示的合成空头头寸. 在卖出这个买入期权后, 如果期权持有者要求, 该投资者就有义务以 50 美元的价格交割资产 $Z$. 另一方面, 此卖出期权使该投资者具有以 50 美元的价格卖出 $Z$ 资产的权利, 只要他愿意这样做.

这里重要的事情是: 当我们把图 1-4 中的空头买入期权和多头卖出期权的头寸相加后, 结果等价于股票 $Z_t$ 的*空头*头寸. 事实上, 该投资者已经使用期权来创造了一个合成空头头寸.

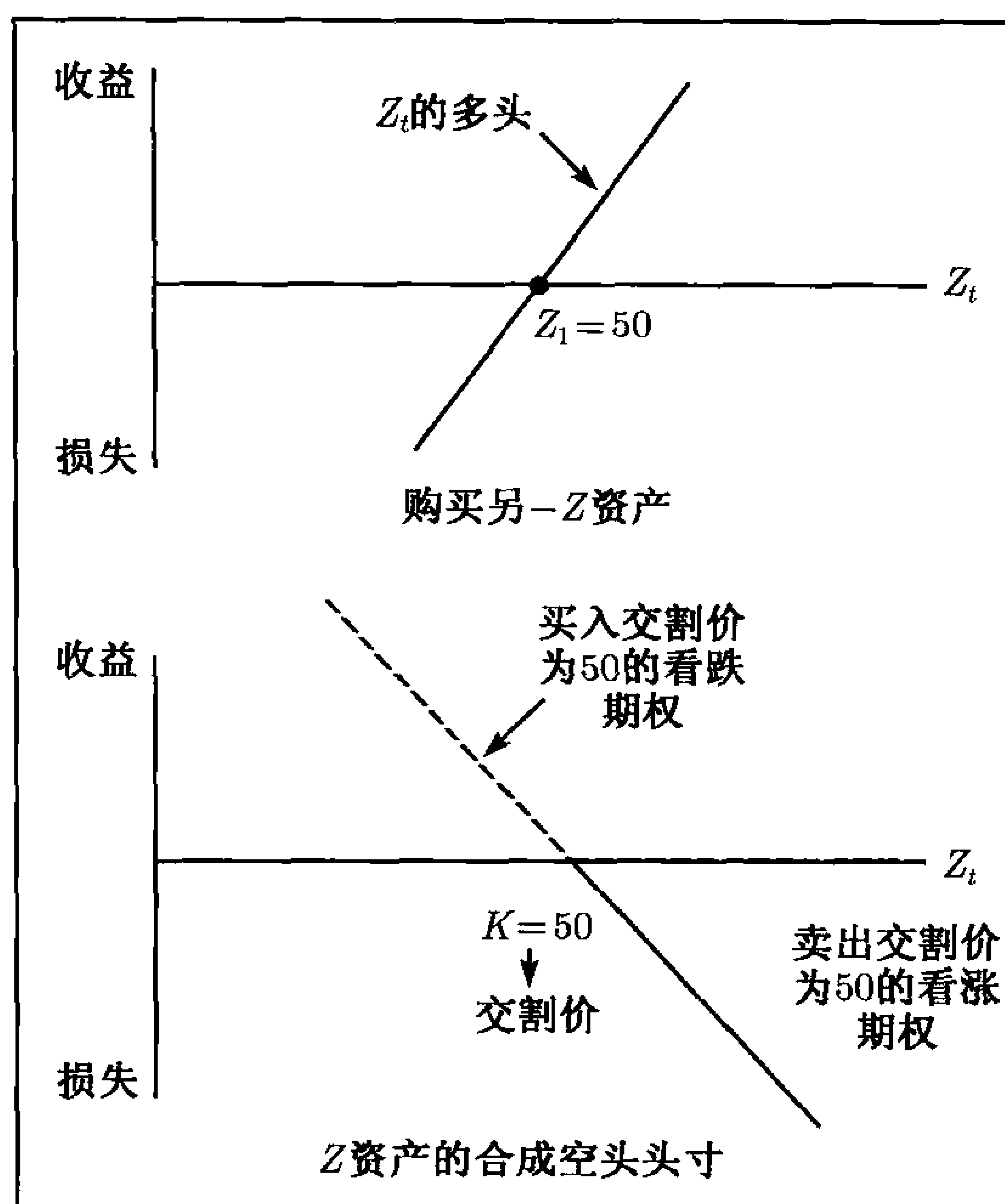



图 1-4

现在考虑随着时间的推移会发生什么事情. 如果到 12 月 30 日资产 $Z_t$ 增值了, 买入期权将被执行, 如图 1-5a 所示. 买入期权头寸将有资金损失, 因为此时该投资者必须交割价值 100 美元的 $Z$ 股票, 从而导致了损失. 另一方面, 如果 $Z_t$ 减少, 那么卖出期权使投资者能够以 50 美元的价格卖出 $Z$ 股票, 此时买入期权到期且一文不值.[①] 图 1-5b 表示了这种情形. 此时仍然有 50 美元的损失. 因此不管价格 $Z_t$ 如何变化, 结果要么是投资者交割早些时候以价格 100 美元购买的 $Z$ 资产, 要么就是执行卖出期权, 投资者以 50 美元的价格卖出 $Z$ 资产. 于是不论出现哪一种情形, 投资者都是在用原先以 100 美元买进的资产来填平期权头寸, 导致了一定的损失. 这意味着他在保持相同的 $Z$ 头寸时有 50 美元的损失, 因为以 50 美元买入的第二个 $Z$ 资产将仍然在此资产组合中.

这里时间的选择也很重要. 例如, 按照美国税收法, 如果投资者在 31 天内已经获得或已经卖出了一笔大体同样的资产, 洗卖规则就可以适用. 按照上面的策略, 第二个 $Z$ 资产是在 11 月 26 日购买的, 而这些期权是 12 月 30 日到期. 因此两次操作的时间间隔超过了 31 天.[②]

① 由于技术原因, 假定两种期权都只能在到期日执行. 这是欧式的.

② 考虑时间选择给人这样一种启发: 如果使用柜台交易 (OTC) 期权, 该策略将会更容易应用, 因为交易所交易期权的到期日都是特定日期, 难以满足法定的时间要求.

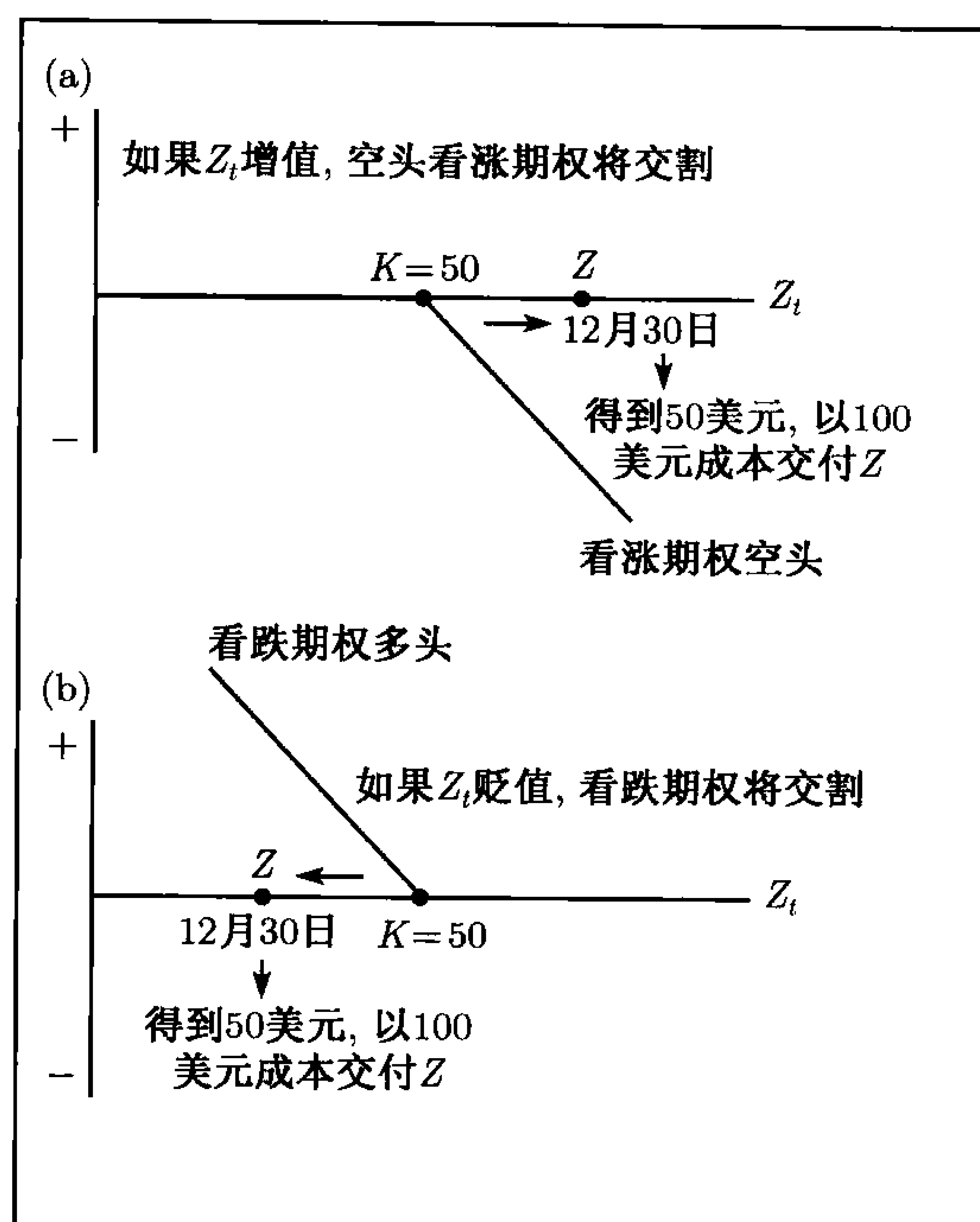



图 1-5

### 1.2.2 含义

上述讨论至少有 3 个有意思的地方. 首先, 提供给投资者的操作策略是无风险的, 且除了交易委托费和必要的手续费外这些操作是零成本的. 不管 Z 资产的新头寸如何变化, 它都被合成资产的空头头寸所抵消, 这一点如图 1-4 的下半部分所示. 该图说明拟议中的解决办法是无风险的. 其次, 我们再一次构造了一个合成工具并用它来解决税收问题. 最后, 该例展示了法律和监管机构在金融策略设计中起着非常重要的作用. 虽然本书不打算讨论这些问题, 但了解它们所起的作用对金融工程的几乎每个层面都是非常重要的.

## 1.3 一些忠告

初次接触金融工程的人常常喜欢凭直觉行事, 这对理解该领域的基本方法是有害的. 因此在开始介绍本书有关内容前, 我们首先必须提出一些自始至终都应牢记的基本规则.

(1) 本书是从市场从业者的观点来写的, 投资者、养老基金、保险公司以及政府部门都是顾客, 对我们来说, 他们总是交易的另一方. 换句话说, 我们是从个体交

易者、代理商和交易商的角度来审视金融工程的. 这种方法是从服务的*提供者*而不是*使用者*的观点看问题的. 这个前提对理解后面章节的某些逻辑是很重要的.

(2) 我们采用下面的惯例, 即除了特别说明外, 每一种金融工具都有*两个*价格, 交易的代理人通常进行*双向*报价. 在经济学理论中, 经济体中当事人面对的是一价律: 同一种商品或资产不能有两种价格. 如果有两种价格, 我们将会以便宜价格买进而以高价卖出.

但在金融市场中, 存在两个价格, 一个是市场参与者愿意向你*购买*某种资产的价格, 另一个是他们愿意卖给你同一种资产的价格, 显然这两个价格是不同的. 汽车交易商买进二手车时总是希望价格尽量低, 卖出价格尽量高, 这是他的赚钱之道. 金融市场从业者也是这样, 互换交易商以较低价格买入互换, 日后以较高价格将它们出售. 期间这些工具也像二手车那样被储存起来.

(3) 金融市场从业者不是投资者, 因此没有 "钱". 他要购买某种资产必须*融资*, 而卖出一种资产后就要将获得的现金进行*投资*. 真正的 "现金" 都在投资者手里, 而他们在本书中都属于交易的*另一方*.

正是因为这个原因, 市场从业者喜欢使用开始时刻价值为零的金融工具, 这类工具不要求进行融资, 使用起来更*实惠*,[①]具有更大的*流动性*.

(4) 监管机构、专业组织和法律专业知识对市场从业人员所起的作用远重要于对投资者的作用. 这些已超出了本书讨论的范围, 但不少金融工程策略设计的唯一目的就是为了处理有关这些方面的问题.

牢记上述前提将会大大加快对金融工程的理解.

## 1.4 结 论

本章以一个基础的例子开始, 目的是想展示合成工具 (在正式模型中也称为*复制组合*) 的使用. 本书主要讨论如何运用金融市场、金融工具和金融工程策略来解决涉及定价、对冲、风险管理、资产负债表管理和产品构造等实际问题. 书中不讨论有关金融工具的细节, 只是在需要时简单回顾某些基本知识. 书里基本上没有涉及公司财务方面的问题, 我们假定读者具备了一定金融工具和金融市场知识, 并了解了初步的公司财务概念.

最后读者应记住, 监管、税收甚至市场本身都是不断变化的动态系统, 相关技术的实际应用必须修正书中的有关参数.

## 参考文献

*已有大量优秀书籍研究了金融工具、它们的定价及相关模型. 其中关于工具和*

① 虽然在该过程中可能还要支付委托费和买卖价差.

市场的一本优秀读物是 Huu(2002). 关于公司财务方面, Brealey and Myers(2002) 和 Ross et al.(2002) 是两本有名的参考书. 作为背景材料我们力荐 Bodie and Merton(1999). 另外, Wilmott(2000) 是一本综合性的重要读物. Duffie(2001) 则提供了坚实的资产定价基础.

# 案例分析

## 日本贷款和远期

下面是路透社的新闻, 仔细阅读后回答问题.

1. 说明日本银行是如何使用现金流图来创造以美元命名的合成贷款的.

2. 日本银行的这种行为对西方同行的资产负债表有什么影响?

3. 什么是银行往来账户 (nostro account)? 为什么需要这些账户? 为什么西方银行不愿意在它们的往来账户中持有日元?

4. 如果西方银行持有日元, 它们能得到什么好处?

5. 使用 "适当" 的公式证明: 负利率能够从远期利率的附加点获得更多的补偿. (使用前面文中用到的分解.)

路透社纽约 11 月 9 日消息——据日本银行官员说, 日本银行正不断通过外汇市场而不是传统的国际贷款市场借入美元资金, 这使某些日元利率变成负利率.

货币市场的快速融资导致了最近短期利率的异常. 多年来第一次日本国债利率和某些银行存款利率变成了负值, 这实际上是要求日元借出者向借入者付利息.

专家说, 日本金融机构很难得到美元贷款, 并且国际银行已经不愿增加日本银行的信用等级了, 因为它们的资产负债表上贷款坏账负担沉重.

"日本银行在美元融资方面仍然有麻烦," 一位美林公司的固定收益证券战略分析师说.

于是日本银行转向外汇市场寻求美元. 这里借入美元的主要方式是将美元对日元的即期交易和远期交易结合进行.

日本银行通常是借入日元, 得到它们没有什么问题. 例如, 某银行借入了一笔 3 个月的贷款, 它将借来的日元在即期市场上卖给一家美国或英国银行以获得美元. 该日本银行同时缔结一份指定利率的 3 个月期远期合约, 卖出获得的美元换回日元以偿还日元贷款. 这些操作等效于该银行获得了一笔 3 个月期的美元贷款.

在正常条件下, 和该银行进行交易的交易商除了买卖价差外并没有赚别的钱.

但是来自这些日本银行的需求很大, 因此交易商们一般都从即期对远期的交易中赚取 7 到 10 个基点.

现在的问题是, 上述即期对远期交易中, 美国银行或英国银行要持有这些日元 3 个月. 通常情况下国际银行将其存入日本银行赚取 3 个月利息.

可是现在大多数西方银行对这些陷入麻烦的日本风险敞口已经接近信用极限, 在各自所谓的往来账户上增持日元就必须持有满足监管要求的资本金.

因此西方银行几乎不计成本地持续抛售日元, 这迫使日本国库券利率变成负值. 与此同时, 像巴克莱和 J. P. 摩根这样的西方大银行对日元存款也实行负利率——亦即拒绝新的日元

存款.

西方银行家说过, 他们有能力持有实际赚负利率的日本国库券, 因为他们从即期对远期交易中所赚的利润远远足以补偿因持有负收益的日本票据所带来的损失.

据交易员们说, 半年期的日本国库券利率大约是 $-0.002\%$. 其中实行负利率存款的巴克莱银行提供的 3 个月期日元存款利率是 $-0.02\%$.

据 (一位市场人士) 说, 作为中央银行的日本银行一直鼓励政府放贷机构向日本公司贷出美元以克服其面临的困难. (路透社 1998 年 11 月 9 日电)

# 第2章 市场、参与者以及市场惯例

## 2.1 引 言

本章回顾了学习金融工程方法必备的一些基础知识. 对于那些比较熟悉金融市场惯例和机制的读者可以跳过这一章, 但能快速阅读一遍更好.

金融工程是一种*实践*, 而且只有在我们仔细地定义了相关环境的时候才能使用. 在为一个特定的金融工程问题选择合适的策略时, 市场的组织、交易的达成以及执行的方式都是重要因素. 本章阐述了金融市场的组织以及市场参与者相互影响的方式. 有关结算、记账方法的内容, 尤其是市场参与者普遍采用的*惯例*都是很重要的, 需要仔细地讨论.

实际上, 人们常常会忽略金融实践将依赖于特定市场所采用的惯例. 惯例这一部分在大多数书里被归为背景知识, 但在本书中将是重要的内容. 市场惯例不仅在选择合适的定价方法上有重要作用, 而且也是正确选择分析定价以及风险管理问题的理论模型的基础. 市场提供信息的*方式*决定着模型的选择, 但是这一点在简要回顾基本的市场惯例之前是没有办法讨论的. 本章主要介绍了市场惯例、工具以及参与者的身份, 同时也将涉及辛迪加过程的简短讨论.

## 2.2 市 场

首先是*国内市场*和*欧洲市场*的差别. 国内市场也叫做*在岸市场*, 表示那些由中央银行和金融监管机构严格管理的市场. 在岸市场本质上有两个特征: 第一个是对在岸存款施加的*准备金要求*; 第二个是对新发行的证券要求有正式的*注册过程*. 这两个要求都隐含有重要的成本、流动性及税收.

对银行的准备金要求增加了吸收在岸存款和发放贷款的*成本*. 这对于银行和其他公司短期使用的大额存款尤其明显. 期限短则意味着低利率. 如果这些资金的一部分以无利率的形式存放在中央银行, 则这些本地融资的成本就会提高.

要求股票、债券或其他金融证券的发行机构进行漫长而细致的注册过程对于金融工程有两个意义: 首先, 与比较简单的*不记名*形式的证券相比, 这种注册证券的发行费用较高; 其次, 不向公共实体登记的发行可以少公开一些信息.

因此, 没有准备金要求、注册过程比较简单的市场有明显的成本优势. 这样的市场称为欧洲市场.

### 2.2.1 欧洲市场

我们应该从一开始就明白一件事情. 本节使用的 "欧洲" 一词并不指欧洲, 也不指欧洲区货币欧元. 它只是意味着在准备金要求和注册过程两方面, 我们所考虑的市场不受监管者以及中央银行的控制. 两个非常重要的欧洲市场是欧洲货币市场和欧洲债券市场.

#### 1. 欧洲货币市场

我们从在岸市场开始讨论. 在一个在岸体系中, 3 个月的零星存款有下述过程. 客户打算在 $T$ 时存入 100 美元现金, 这一点当天就可做到, 即存款等待期等于 0. 存款接收银行接受此现金, 并将该笔存款的 (比如说)10% 存入中央银行. 这将是对原始的 100 美元存款要求的准备金比例.[①] 剩下的 90 美元将用来发放贷款或者是在银行间隔夜拆借市场上借给其他银行.[②] 因此, 银行将支付整个 100 美元的利息, 而只能收回其中 90 美元的利息. 在这样的环境下, 假设没有其他的费用, 银行将为贷款开出高于 10% 的利率. 这样的附加成本足以阻碍有大额资金流入的*批发市场*的流动性. 而欧洲货币市场则消除了这些成本, 增加了流动性.

我们简要回顾一下欧洲货币 (或离岸) 存款的过程, 并将它和在岸存款做一下比较. 假设一家美国银行在纽约欧洲美元 (或离岸) 市场的另一家美国银行存入 1 亿美元. 因此, 和欧洲货币市场一样, 我们在银行间市场只和银行打交道. 在这个例子中, 所有的银行都坐落在美国. 欧洲存款在美国产生而且现金也从未离开过美国. 这笔存款两天后才能使用 (或者进行结算), 即*存款等待期*(days to deposit) 是两天. 现在全部 1 亿美元存款可以作为贷款借给另外一家机构. 如果这种交易链发生在 (例如) 伦敦, 步骤也是类似的.

#### 2. 欧洲债券市场

一个通过正式的注册程序公开发售的债券是在岸工具. 如果同样的工具不经类似的注册过程在 (比如) 伦敦发售, 而且还是*不记名*证券, 那么它本质上就成为一个离岸工具, 也称其为欧洲债券. 同样这里的 "欧洲" 并不是指欧洲, 虽然在这种情形下欧洲债券的活动中心恰好在伦敦. 但是在原则上, 欧洲债券也可以在亚洲发行.

欧洲债券将受到比较少的监管审查, 是不记名的证券, 而且到现在为止也不扣所得税. 初级市场在伦敦, 二级市场可以在布鲁塞尔、卢森堡或者其他欧洲债券上市的地方. 欧洲债券的结算将通过欧洲银行票据交换所 (Euroclear) 或者票据交换中心 (Cedel) 进行.

---

① 实际中该过程比这复杂. 假定银行都满足某个平均天数的储备要求, 比如说延迟 1 个月.
② 在美国, 此市场称为联邦基金市场.

3. *其他欧洲市场*

欧洲市场并不局限于债券和货币. 几乎任何工具都可在离岸市场交易. 可以有欧洲股票、欧洲商业票据 (ECP)、欧洲中期票据 (EMTN), 等等.

### 2.2.2 在岸市场

在岸市场可以通过柜台或正式交易所来组织. *柜台交易*(OTC) 市场是由自发的交易活动进化而来的. 一个柜台交易市场通常没有正式的组织结构, 虽然它被监管机构严格控制, 并且交易是根据一些专业机构如 ISDA(国际证券市场协会)、ISMA[①] (国际互换和衍生品协会) 制订的一些精确条款而进行的. 世界上一些最大的市场就是柜台交易市场. 一个好的例子是利率互换市场, 在所有买入一卖出价差较窄的金融市场中, 该市场交易的名义本金量最大. 柜台交易通常通过电话进行, 而且交易的金融工具有很大的灵活性, 尽管国际互换和衍生品协会 (ISMA) 等机构制定了标准化文件, 力图使交易工具变得更具同质性.

相对于柜台交易, 有组织的交易所则是正式的实体. 它们可以是*电子报价*或者是*公开叫*价的交易所. 有组织的交易所的特征就在于它有正式的组织, 并且交易的商品以及交易的行为具有同质性, 同时交易合约的条款具有很小的灵活性.

在传统的公开叫价交易所进行的典型交易可概括为如下过程.

(1) 客户用电话向*经纪人*发出交易指令, 经纪人记下该指令.

(2) 接下来, 指令需要传送到交易大厅, 准确地说是传送到一个*交易位*.

(3) 一旦送达那里, 指令被送往*交易池*(pit), 那是实际进行交易的地方.

(4) 交易指令在交易池执行后, 需要进行一个口头确认并将它按原路返回给客户.

*股票市场*是买卖普通股的有组织的交易所. 期货和期权市场则买卖不同标的资产的衍生品. 在*现货买卖*中, 双方达成交易并予以确认, 且在若干天 (称作*交割期*) 内, 完成证券和现金的交换. 而在期货市场上, 交易就是建立头寸 (taking position), 而结算发生在相当长的一段时间之后, 届时衍生证券已*到期*. 交易达成后要存入少量的保证金, 称为*初始保证金*.

不同的交易所有不同的结构而且采用不同的*做市*方法. 例如, 在纽约股票交易所 (NYSE), 做市是基于*专家体系*的. 专家管理他们所擅长的股票的*账簿*. 作为做市商, 专家负责按报价随时进行买卖并且承担确保市场平稳运行的基本责任.

*期货交易所*

EUREX、CBOT、CME、LIFFE 和 TIFFE 是世界上主要的期货和期权交易市

① 国际证券市场协会是一个专业性组织, 除了其他活动外, 它所作的一件事是通过和相关机构的冗长谈判, 使证券的柜台 (OTC) 交易合约尽可能统一. ISDA 代表国际互换和衍生品协会. NASD 表示美国证券交易商全国协会; 而 IPMA 表示国际初级市场协会, 它们是这类协会的另外两个例子.

场. 交易市场提供以下 3 种重要的服务.

(1) 如果是公开叫价体系, 则为这样的活动提供一个物理场所 (例如*交易大厅*和相伴的交易池). 否则, 交易所将提供一个电子交易平台.

(2) 提供交易*清算所*, 一旦交易执行而且交易单被盖上章, 它就成为每个买家和卖家的实际*交易对方*.

(3) 提供交易主体所需要的*创造*和*设计*金融合约的服务, 最后是提供一个透明而且可靠的交易环境.

期货 (或期权) 交易所的买卖机制如下. 两个*池中交易者*根据客户的意愿直接进行交易. 比如一方喊价 100 卖出, 另一方按 100 买入. 然后签署交易单并盖上章. 直到此时, 两个交易者互为交易对方. 可是一旦交易单盖上章, 清算所将成为他们共同的对方. 例如, 如果某客户购买了一个交割 100 蒲式耳小麦的期货合约, 则负责交割小麦的实体不是在交易池里实际出售合同的另一方, 而是交易清算所. 作为所有空头和多头的*唯一*对方, 清算所将大大降低对方的违约风险. 对方违约风险确实得到了进一步的降低, 因为交易所是与*清算成员*而不是与直接交易商打交道.①

有关期货市场需要回顾的一个重要概念是*盯市过程*. 当某人买了一个期货合约, 他只需存入保证金, 而不需要进行现金支付. 这种杠杆作用大大增加了期货市场的流动性, 但是同样存在风险. 为了保证交易的对方能够每日实现他们的收益和损失, 交易所将运用每个交易日收盘价来重新评估双方每日的头寸.②

**例**

*一个 3 个月的欧洲美元期货合约在 $T$ 日时的价格是 98.75, 在 $T+1$ 日结束时, 公布的结算价为 98.10, 价格跌了 0.65, 这对于多头合约的持有者来说是一种损失. 该头寸将被执行盯市操作, 清算所 (更准确地说是清算公司) 将会从准备金账户上扣除相应的金额.*

期货交易所的*未结权益*(open interest) 是指没有结算的期货合约的数量. 它通过汇总没有通过*交割*、*现金结算*或者*抵消*而停止的买卖头寸数量来得出.

## 2.3 参 与 者

*做市商*储存金融工具而且为交易者提供双向报价. 他们为市场提供流动性并抑制市场的剧烈波动. 作为一种责任, 做市商必须按他们的报价进行买卖. 因此, 对于他们做市的每一种证券, 做市商必须报出一个买入价和卖出价. 做市商不会储存大量的产品, 也不会将它们持有很长时间.

---

① 为了进行交易, 池交易者需要在某个清算会员处开立一个账户. 后者是一个起清算公司作用的私人财务公司, 而清算公司代表交易者和清算所打交道.

② 清算价格由交易所决定, 它不必是最后的交易价.

*交易员*只进行证券买卖. 他们不是字面意义上的做市商. 一个交易员的作用是执行客户指令, 并在其*头寸限度内*为公司进行交易. 头寸限度可以是交易员允许交易的总金额, 也可以是他愿意承担的风险.

一个交易员或者做市商可能*管理*一个资产组合,称其为*账簿*(book). 其中有"外汇账簿"、"期权账簿"、"互换账簿"、"衍生品账簿"等. 交易员管理的账簿称作"交易账簿", 它们不同于以投资为目的的投资组合. 一个交易账簿上记载了某些金融工具, 是因为在为客户买入和卖出的过程中, 交易员必须暂时储存这些产品一段时间. 账簿要进行定期对冲.

*经纪人*不持有存货, 而是提供一个买方和卖方可以聚在一起的平台. 通过经纪人进行买卖比直接去交易员那里买入和卖出是更加谨慎的做法. 在后一情形下, 交易员很自然地知道了客户的身份. 在期权市场上, 一个*场内经纪人*就是一个负责客户指令的交易员, 但他不为自己进行交易. (但做市商却为自己交易.)

*交易商*报双向价格而且持有某种特别工具的大量*存货*, 也许会比做市商持有时间还长. 它们是类似做市商的机构.

*风险经理*是相对比较新的参与者. 交易员进行的交易和建立的头寸都要得到风险经理"批准". 风险经理评估交易, 如果交易在事先确定的各种风险的范围内, 则批准该笔交易.

*监管者*是金融市场的重要参与者. 实际参与者通常会进行"税收套利"或者"监管套利"的操作. 金融工程实践的一大部分就是为了满足参与者在监管和税款方面的需求.

*研究员*和*分析师*是既不交易也不做市的参与者. 他们是机构的信息提供者, 对于卖方活动很有帮助. 分析师通常处理股票并且分析各公司情况. 他们可以发布买入/卖出/持有信号并且提供预测. 研究员则提供宏观层次上的预测和咨询.

## 2.4 交易机制

交易的机制是什么? 交易是怎么进行的? 有组织的交易所有它们自己的清算所和清算代理人, 所以它要明白如何设立账户、如何进行支付、如何购买合约以及如何保持头寸相对来说比较容易. 清算会员和清算所完成了大部分这类工作. 但是在柜台交易情形下这些运作又是如何完成的呢? 一个人如何买一个债券, 如何支付? 他又如何买外汇呢?

此外, 这些资产在哪里保管? 一个有组织的交易所会为它的成员保管这些头寸, 但是谁是柜台交易以及二级市场交易债券和其他相关资产的保管人呢? 有若干种可供选择的机制来完成交易并且保管资产, 图 2-1 显示了一种典型机制.

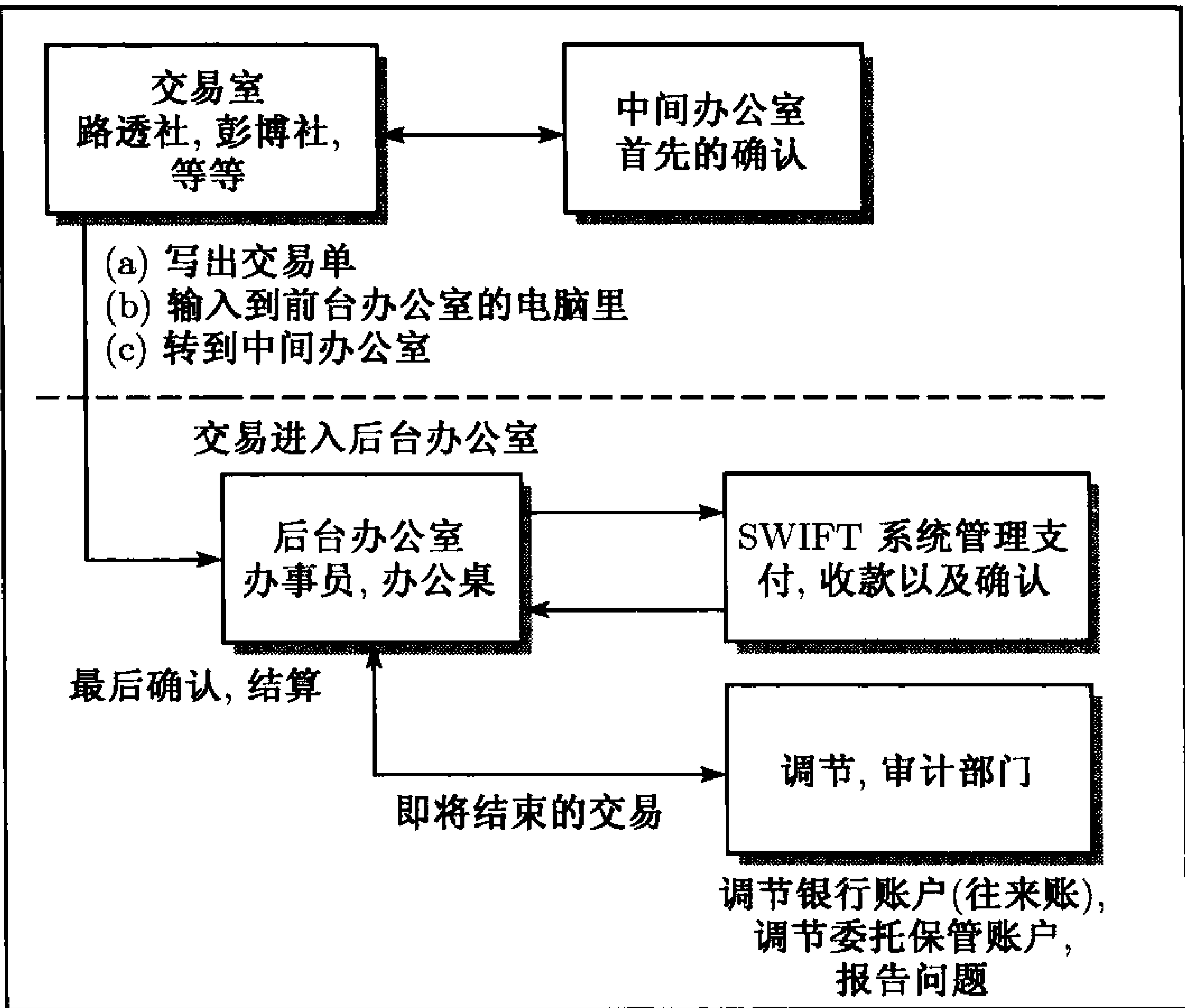



图 2-1

图 2-1 的交易机制是从市场从业者的角度来看的. 交易在交易室里开始. 交易员开出*交易单*并且将此信息输入到计算机的前台办公系统里. *中间办公室*是机构中首先确认交易的部门, 它通常与交易室在同一楼层. 接下来, 交易进入到*后台办公室*(back office), 它坐落在另一层楼或者另一栋楼. 后台办公室的活动对银行来说与交易室同样重要. 后台办公室对交易进行最后确认, 处理结算指令、发放款项、核对流入现金流等操作. 后台办公室也需要使用 SWIFT 系统处理信息活动, 这将在稍后讨论.

### 2.4.1 指令

投资者和交易员一般可以发出两类指令. 第一类是*市场指令*, 此指令中客户获得的价格是当时的市场报价.

另一类是*限制指令*. 此类指令里, 价格随指令而定, 而且交易只有在获得该价格或者更好的价格时才会被执行. 限制指令只能在某一段时间内有效, 这段时间也需要指定. 一个*止损指令*也类似地指定了某个头寸自动卖出的目标价格.

处理指令时难免会出现错误. 例如, 传统公开叫价交易的一个缺点, 就是在这样的环境下很容易产生错误. 买方和卖方可能记录下不同的价格. 这被称作 "价格差别"(price out). 或者可能会出现 "数量差别", 在这种情况下买方已经买了 100, 而卖方认为他卖了 50. 在期权交易情形中, 记录的到期日也可能不匹配, 这被称作 "时间差别". *有差别的交易*需要在闭市后进行纠正, 然而仍会有交易未被及时纠正.

这些交易需要通过协商以便从对方或者客户那里复原头寸.[1]

### 2.4.2 确认和结算

*订单的确认和结算*是金融市场上两个完整的部分. 订单的确认包括在双方之间传递消息, 以使交易在市场从业者之间得到口头上的确认. 结算是交换现金以及相关证券, 或者只是交换证券.

SWIFT*系统*是为市场参与者之间的无纸传输而创立的传输网络. 它是世界金融电讯协会的缩写, 而且为一批国际银行所拥有. SWIFT 的一个优点就是对不同交易, 例如客户间的过户、银行间的过户、外汇、贷款、存款的信息进行*标准化处理*. 全球 100 多个国家成千上万的金融机构都使用这种通信系统.

另一个有趣的话题是结算、清算以及保管之间的关系. 结算意味着接收证券并且进行支付. 一个机构可以进行结算, 但是为了完成交易, 它还必须进行*清算*. 交易双方的指令必须匹配而且交易必须完成. *保管*是通过将证券存放在仔细挑选的世界各地的指定地点进行保管. 保管人则是提供保管服务的机构. 清算和保管是两个相当复杂的任务. FedWire, Euroclear 和 Cedel 是三个提供某些保管服务的国际*清算公司*. 一些非常重要的保管人是银行.

各国也有它们自己的清算系统. 最著名的清算系统是 CHIPS 和 CHAPS. CHAPS 是英国的清算系统, CHIPS 则是为在美国的支付而准备的清算系统. 这些系统内的支付都是进行多边清算的, 且最后的支付是净额支付. 这就大大简化了大量单笔交易的结算.

现货交易的结算根据 DVP 原则 (即交割对支付), 意思是证券先被交割给清算公司, 然后再进行现金支付.

关于结算的话题还有另一面. 不同市场结算交易的通常方式都有重要惯例. 当一个结算是根据特定市场的惯例来进行时, 我们称交易以*通常方式*结算. 当然, 一个交易也可以以特殊方式来结算. 但是特殊的方法将是比较昂贵和不切实际的.

**例**

*市场从业者用 $T$ 来表示交易日, 而结算则是相对这个日子来选择的.*

*美国的国债通常在交易日后的第一个工作日即在 $T+1$ 日结算. 对于效率高的清算公司在 $T$ 日进行现金结算也是常有的情况.*

*公司债券和国际债券在 $T+3$ 日结算.*

*商业票据在同一天结算.*

*股票的现货交易美国通常在 $T+3$ 日结算.*

*欧洲市场的存款通常在 $T+2$ 日结算. 在隔夜借入和借出的情形下, 双方通常选择现金结算.*

---

[1] 例如, 当出现 "数量差别" 时, 交易双方可能决定一起分摊该差别.

外汇交易市场的结算通常发生在 $T+2$ 日. 这意味着一个外汇的现货出售 (或者买入) 会导致在交易日两天后发生双向的现金流, 所以 $T+2$ 日又被称作现货日.

在这些结算惯例中另外一个要记住的问题, 就是到结算的日期数通常是指工作日. 这就意味着要正确理解 $T+2$ 日的意义, 市场专业人员要受到相应的假期惯例的约束.

在讨论其他市场惯例之前, 我们要提到与前面的日期相关的两个附加术语. 结算日在合同里有时也称作*价值日*. 现金在价值日发生易手. 最后, 在互换型的合同里有*交易日*(即签订合约的日子) 的称法, 但是互换直到*生效日*才开始. 对于互换合同来说, 后者才是实际开始的日子, 它将发生在双方同意的稍后日期.

## 2.5 市场惯例

市场惯例通常在金融工程的学习中容易引起混淆. 但是了解关于交易和工具的惯例是非常重要的. 本节简要地复习了一下这些惯例.

惯例随地点以及一个人所关注的具体交易工具种类的不同而不同. 两种非常相似的工具也许会用完全不同的方式报价. 报价*内容*以及报价*方式*都是非常重要的.

如第 1 章所讲, 在金融市场上总有*两种*价格. 一种是做市商愿意*购买*相应资产的价格, 另一种是他愿意卖出这种资产的价格. 做市商愿意买的价格称为*买入*(bid) 价. *卖出*(ask) 价是做市商愿意卖的价格. 在伦敦金融市场上, 卖出价通常称为*出价*(offer). 因此, *买入–卖出*价差也就变成了*买价–出价*价差.

| 卖出 (贷款) 利率 | 买入利率 |
| --- | --- |
| $5\frac{1}{4}$ | $5\frac{1}{8}$ |

作为一个例子, 我们考虑在伦敦*货币和外汇交易市场*上的存款, 那里的惯例是先报贷款利率. 一个典型的利率报价如左列所示.

| 买入利率 | 卖出 (贷款) 利率 |
| --- | --- |
| $5\frac{1}{8}$ | $5\frac{1}{4}$ |

在其他货币中心, 利率是用另一种方式来报的. 第一个利率是买入价, 第二个是卖出价. 因此, 同样的利率变成了以左列的形式.

报价的第二个特征是使用十进制. 在伦敦, 欧洲美元的利率是以 1/16 或者 1/32 为单位来报价的. 但是许多货币中心以*两位*十进制小数来对利率报价. 从经纪人或交易商的角度来看, 十进制不完全是一个简单直接的问题. 注意, 使用十进制, 买入–卖出价差可以相当小, 直到 0, 不存在最小的买入—卖出价差. 这意味着在其他情况不变时降低了交易利润. 同样, 读者必须意识到小数进制的性质也是会随时间而改变的.

### 2.5.1 报价内容

另一组惯例是关于报价内容的. 例如, 交易商接到一个电话, 电话里说: "我要按照价格 95 卖出一个债券." 或者是: "我要按收益率 5% 来卖一个债券." 市场更愿意按照惯例来操作, 这样可以避免可能发生的误解并节约时间. 股票市场报出每种股票的价格. 纽约股票交易市场上的报价精确到十进制小数.

大部分的债券交易市场是按价格而不是收益报价的, 但短期国库券是一个例外. 例如, 一个债券可能会以右列方式来报价.

| 买入价 | 卖出价 |
|---|---|
| 90.45 | 90.57 |

第一个报价是做市商愿意为一个债券支付的价格. 第二个是做市商愿意出售同一债券的价格. 注意在这个表中债券价格是按照票面价值为 100 来报价的, 并且精确到两位十进制小数, 而不管债券真正的面额是多少.

也有可能一个市场既不按价格也不按收益报价. 例如利率顶 (caps)、利率低 (floors) 以及互换通常都是直接按 "波动率" 来报价的. 互换市场更愿意按利差 (在美元互换情形) 或者按互换利率本身 (欧元互换情形) 报价. 选择按照什么来报价不是一个小问题, 它可能影响到定价以及风险管理.

### 2.5.2 收益率报价方法

市场上使用 3 种不同的方式给收益率报价. 它们分别是货币市场收益率、债券等价收益率、以及贴现率.[①] 我们将以无违约风险、到期日为 $T$ 的纯贴现债券为例来讨论这三种方式. 用 $B(t,T)$ 来代表这个债券在 $t$ 时的价值. 这个债券无违约风险且在 $T$ 时将支付 100. 现在假设 $R^T$ 代表这个债券在 $t$ 时的收益率.

非常明显 $B(t,T)$ 将等于 100 用 $R^T$ 进行贴现后的现值, 但是现值将如何表达呢? 例如, 假设 $(T-t)$ 是以天来度量的, 而且这段时间短于一年, 我们可以使用以下的定义:

$$B(t,T) = \frac{100}{(1+R^T)^{\left(\frac{T-t}{365}\right)}}, \tag{1}$$

在这里 $\left(\frac{T-t}{365}\right)$ 是这个债券距离到期日还剩余的时间, 以年为单位, 此时年规定为 365 天.

但是我们也可以考虑用下列公式来对到期日价值进行贴现:

$$B(t,T) = \frac{100}{\left(1+R^T\left(\frac{T-t}{365}\right)\right)}. \tag{2}$$

也可以不用上面的两个公式, 而采用下式:

① 后一术语与美国联邦储备系统使用的特定利率并不相同, 尽管该特定利率用了同样的名称. 这里贴现率的概念是指一般意义上的收益率.

$$B(t,T) = 100 - R^T\left(\frac{T-t}{365}\right)100. \tag{3}$$

一些读者可能认为只有式 (1) 是正确的. 实际上在适当的惯例下, 它们可能都是正确的.

为什么? 请看一个简单的例子. 假设一个市场是按价格 $B(t,T)$ 而不是按收益率 $R^T$ 来报价的.①同样假设观测到的市场价格是

$$B(t,T) = 95.00, \tag{4}$$

其中 $(T - t) = 180$ 天而且每年有 365 天. 我们就可以问下面的问题了: 上面 (1)~(3) 中的哪个公式用起来更准确? 结果是, 如果我们使用了不同的收益率, 这些公式都能产生同样的价格 95.00.

实际上, 如果 $R_1^T = 10.9613\%$, 第一个公式就是 "正确的", 因为

$$B(t,T) = \frac{100}{(1+0.109613)^{\left(\frac{180}{365}\right)}} \tag{5}$$

$$= 95.00. \tag{6}$$

另一方面, 当 $R_2^T = 10.6725\%$ 时, 第二个公式也是 "正确的", 因为

$$B(t,T) = \frac{100}{\left(1+0.106725\left(\frac{180}{365}\right)\right)} \tag{7}$$

$$= 95.00. \tag{8}$$

最后, 如果我们令 $R_3^T = 10.1389\%$, 第三个公式将是 "正确的", 因为

$$B(t,T) = 100 - 0.101389\left(\frac{180}{365}\right)100 \tag{9}$$

$$= 95.00. \tag{10}$$

因此, 如果使用 (略微) 不同的 $R_i^T$, 所有的公式都能产生同样的价格. 但是哪个是 "正确" 的公式呢?

这就是惯例想法的来源. 一个市场可以根据公式 (1) 来报价收益率. 此时如果交易商在市场上看到报出的收益率, 他就知道这个收益率是用公式 (1) 而不是用公式 (2) 或者公式 (3) 来定义的. 由于在交易执行期间没有直接说明, 这种惯例常在实际合约里精确写明且让所有交易员都知道. 一个市场的新参加者如果不对市场惯例给予足够的注意, 就可能会犯严重的错误.

**例**

在美国, 债券市场按照公式 (1) 报出收益率. 这时 $R^T$ 的值称作债券等价收益率.

① 新兴市场债券一般是用收益报价, 在国债市场是用价格报价. 这样做从市场心理、定价以及风险管理决策的观点看, 可能会产生某些差异.

*涉及银行间存款和贷款的货币市场使用货币市场收益率惯例*, 在定价和风险管理时使用公式 (2).

*商业票据和国库券的收益率按照公式 (3) 来报价. 这样的收益率称作贴现率.*

最后, 连续贴现率和*连续复利率* $r$ 用下面的公式来定义:

$$B(t,T) = 100\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \tag{11}$$

这里 $\mathrm{e}^x$ 是指数函数. 实际上市场并不喜欢按照连续复利率来报价. 一个例外就是对小额存款顾客. 一些小额存放账户是按连续复合存款利率来报价的. 另一方面, 连续复利率通常在理论模型中使用, 至今, 在学术上仍是首选概念.

最后还有一个惯例需要考虑. 市场也有*利息支付的惯例*. 例如, 主要的欧洲贷款, Libor 的提供方所获得的利率是在贷款到期日一次给付的. 另一方面, 许多债券是在到期日前定期给付息票利息.

### 2.5.3 天数计算惯例

前述讨论表明, 忽视惯例会在定价和风险管理上产生数值误差, 从而导致巨大损失. 同样的情形也适用于*天数计算*惯例. 一个金融工程师应首先核对他所操作的产品相关天数的计算惯例. 原因很简单, 年和月的定义可能会由于市场不同而不同, 而且一个人观测到的报价也将依赖于这种惯例. 主要的天数计算惯例有如下几种.

(1) 30/360 *基础*. 每月有 30 天而不管这个月的实际天数, 一年有 360 天. 例如, 按照这种惯例, 一种工具在 5 月 1 日买入, 在 7 月 13 日卖出, 将获得

$$30 + 30 + 12 = 72 \tag{12}$$

天的利息, 而实际的天数是 73 天.

更有趣的是, 在 2003 年 2 月 28 日买入的工具, 在第二天即 2003 年 3 月 1 日卖出将会获得 3 天的利息. 但是, 货币市场工具如银行间的存款将只能获得一天的利息. (它是根据下面提到的实际/360 基础计算的)

(2) 30E/360 *基础*. 除了月末的细小差别外它与 30/360 基础很相似, 而且它主要用在欧洲债券市场上. 30/360 和 30E/360 的区别如下表, 表格显示了从 3 月 1 日开始根据两种惯例计算的存款计息天数:

| 惯例 | 3 月 1 日–3 月 30 日 | 3 月 1 日–3 月 31 日 | 3 月 1 日–4 月 1 日 |
|---|---|---|---|
| 30E/360 | 29 天 | 29 天 | 30 天 |
| 30/360 | 29 天 | 30 天 | 30 天 |

根据此表, 在 3 月 1 日买入而在 3 月 31 日卖出的欧洲债券按照 30/360 惯例计算, 给出了真实的计息天数, 但要是按照 30E/360 计算的话, 这个人需要将债券持有到下个月初才能拿到实际的利息.

(3) 实际/360 基础. 如果一种工具在 5 月 1 日买入, 在 7 月 13 日卖出, 那么按这种惯例计算则持有了 73 天. 这种惯例被大多数的货币市场使用.

(4) 实际/365 基础. 例如欧洲英镑市场就使用这种惯例.

(5) 实际/实际基础. 很多债券市场使用这种惯例.

下面的例子将说明, 为什么天数计算惯例与定价和风险管理有关. 假设你签定了一个利率互换协议, 支付 Libor 而接受固定利率. 市场报出的 Libor 是 5.01, 而互换率的报价是 6.23/6.27. 因为你的是固定利率, 所以在规定的时期内, 相关的现金流将来自于 5.01 的支付和 6.23 的收入. 但是这些数据容易让人产生误解. 实际上 Libor 是按照实际/360 基础来报价, 即数字 5.01 基于一年有 360 天. 而互换率是按照实际/365 基础来报价的, 所有的计算都是基于一年 365 天.[①]同样, 互换率可能是每年或者每半年支付. 因此, 支付 5.01 和收入 6.23 这两个利率是不可比的.

**例**

互换市场是所有金融市场中最大的市场, 而且互换曲线已经成为金融中定价和风险管理的核心工具了. 因此简要地讨论一下互换市场的惯例是非常有意义的.

- 美元互换可交易 3 个月 Libor 和 6 个月 Libor. 天数计算基础是年, 实际/360.
- 日元互换可交易 6 个月 Libor. 天数计算基础是半年, 实际/365.
- 英镑互换是半年, 实际/365 对 6 个月 Libor.
- 最后欧元互换可交易 6 个月 Libor 和 6 个月 Euribor. 天数计算基础是年, 30/360.

表 2-1 归纳了世界上一些重要市场的天数计算以及收益率/贴现的惯例.

**表 2-1 天数计算和收益率/贴现惯例**

| | 天数计算 | 收益率 |
|---|---|---|
| **美国** | | |
| 存款/存款单 | 实际/360 | 市场收益率 |
| 国库券/商业票据/BA | 实际/360 | 贴现率 |
| 国债 | 实际/实际, 每半年 | 债券等价收益率 |
| 回购协议 | 实际/360 | 市场收益率 |
| **欧洲市场** | | |
| 存款/存款单/ECP | 实际/360(对英镑是实际/365) | 市场收益率 |
| 欧洲债券 | 30E/360 | 市场收益率 |
| **英国** | | |
| 存款/存款单/英镑商业票据 | 实际/365 | 市场收益率 |
| BA/国库券 | 实际/365 | 贴现率 |
| 绩优债券 | 实际/365(每半年) | 债券等价收益率 |
| 回购协议 | 实际/365 | 市场收益率 |
| **德国** | | |
| 存款/存款单/英镑商业票据 | 实际/360 | 市场收益率 |

① 互换有时按 30/360 报价, 有时又以 ACT/365 报价. 这需要核对确认单.

(续)

| | 天数计算 | 收益率 |
|---|---|---|
| 债券 | 30E/360(每年) | 债券等价收益率 |
| 回购协议 | 实际/360 | 市场收益率 |
| **日本** | | |
| 存款/存款单 | 实际/365 | 市场收益率 |
| 国内回购协议 | 实际/365 | 市场收益率 |
| 国际回购协议 | 实际/360 | 市场收益率 |

对这个表格要做一些说明. 首先注意这个表是三类惯例的归纳. 第一, 天数计算惯例, 通常是实际/360. 但是当使用 30/360 惯例时, 我们普遍使用 30E/360 版本. 第二, 表格也告诉了我们关于按收益率报价的惯例. 第三, 列出了关于长期债券的息票支付惯例, 通常它们每半年付息一次.①

最后要注意表中也列出了金融市场上使用的主要工具. 这些工具的详细定义将在后续章节中给出.

**假期惯例**

金融交易通常跨境进行. 但是不同国家规定的假期常有不同. 有不同的独立日、宗教节日. 通常在圣诞节期间, 不同的国家采用不同的休假安排. 在订立金融合同时, 这一简单问题也应该被考虑进去, 因为如果对方的市场因为那个国家的一个专门假日而关闭的话, 我们可能就收不到所期望的现金了.

因此, 所有的金融合同都规定了要使用的特别的假期日程 (伦敦、纽约, 等等), 而如果现金结算日正好在假日, 则将具体指定. 可以是在下一个或者前一个工作日, 或做其他的安排.

### 2.5.4 两个例子

我们考察在两种重要的情形下, 天数计算惯例是如何使用的. 第一个例子概括了短期货币市场工具, 例如欧洲美元存款的确认书. 第二个例子讨论了欧洲债券的确认书摘要.

**例** 欧洲美元存款

| | |
|---|---|
| 数量: | 100 000 美元 |
| 交易日: | 2002 年 6 月 5 日, 星期二 |
| 结算日: | 2002 年 6 月 7 日, 星期四 |
| 到期日: | 2002 年 7 月 5 日, 星期五 |
| 天数: | 30 |
| 发售利率: | 4.789% |
| 所得利息: | $(100\ 000)\times 0.047\ 86\times 30/360$ |

① 更确切地说, 天数计算法是计量时间的惯例. 像半年、一季度等都是复利频率, 因而也是收益率报价惯例的一个部分.

需要注意三点. 第一, 存款者在结算日获得利息, 但是在合同到期日没有利息, 因此到期前有 30 天. 第二, 我们是从银行的角度来看这笔交易的, 这里银行是卖出存款, 所以利率是出售利率. 第三, 注意利息是按照下面的公式计算

$$(1+ r\delta)100\ 000-100\ 000, \tag{13}$$

而不是根据

$$(1+r)^{\delta}100\ 000-100\ 000, \tag{14}$$

这里

$$\delta = 30/360 \tag{15}$$

是天计数调整因子.

第二个例子涉及欧洲债券交易.

**例** 欧洲债券

欧洲投资银行, 5.0%(年付息)

2008 年 4 月 25 日

| | |
|---|---|
| 交易日 | 2002 年 6 月 5 日, 星期二 |
| 结算日 | 2002 年 6 月 11 日, 星期一 |
| 到期日 | 2006 年 12 月 28 日 |
| 上次付息日 | 2001 年 4 月 25 日 |
| 下次付息日 | 2002 年 4 月 25 日 |
| 两次付息间隔 | 360 |
| 累计利息 | 根据货币市场收益率计算 |

关于这个例子有几点说明. 首先, 交易工具是欧洲债券, 而欧洲债券是每年付息而不是每半年付息的 (例如国债的情形). 第二, 欧洲债券采用的年惯例是 360 天. 最后, 累计利息是用与货币市场相同方式计算的.

## 2.6 工 具

本节从金融工程的角度列出了一系列主要工具类别. 要对这些内容有一个正确的理解还需要参考 Hull(2002) 的关于市场与工具的教程.

按照金融市场上的惯例可将这些工具划分为以下部分.

(1) *固定收益工具*. 包括银行间存款单 (CD), 或者存款 (depo)、商业票据 (CP)、银行承兑汇票和国库券. 这些被认为是*货币市场*工具.

债券、票据和浮动利率票据 (FRN) 是债券市场工具.

(2) *股票*, 包括上市公司发行的不同种类股票.

(3) 货币和商品.

(4) 衍生品, 主要类别是利率、股票、货币和商品的衍生品.

(5) 信用工具, 主要是高收益债券、公司债券、信用衍生品和各种担保 (它是信用衍生品的早期形式).

我们将在后面章节中从不同角度来讨论这些工具的分类.

## 2.7 头 寸

一个投资者通过买入或者卖空资产可以建立头寸, 一旦头寸建立了, 他将面临各种不同的风险.

### 2.7.1 空头寸与多头寸

一个多头寸是容易理解的, 因为它与金融工程新手的直觉是一致的. 在日常生活中, 人们经常买东西, 但很少卖空它们. 当我们用现金买了一样东西然后把它储存起来, 或者当我们签订了一个合同, 要求在未来的某个日子买某些东西时, 我们就持有了一个多头寸. 我们是标的资产的多头, 这意味着当标的资产的价值增加时, 我们将受益.

另一方面, 空头寸就是市场操作者卖出一种他并不真正持有的资产. 例如, 一个客户打电话给银行要买某一特定债券. 银行在账簿上可能并没有这个债券, 却仍然卖出它, 此时银行持有了空头寸.

一个空头寸可以是关于某个工具的, 例如卖出一个借来的债券、一支股票、一个期货合同、一个互换、或者一个期权. 但是空头寸同样可以是关于特定风险的. 例如, 一个人可以做空 (或者做多) 波动率——这种头寸使得当波动率上涨时, 发生亏损 (或者赢利). 一个人也可以做空 (或者做多) 利率差——这种头寸同样使得当利率差增大时, 出现亏损 (或者赢利).

#### 支付图

可以利用支付图来表示空头寸和多头寸. 图 2-2a 从投资者的角度描述了多头寸. 向上倾斜的垂直线 $OA$ 代表了投资者的头寸在给定证券价格时的价值. 由于它的斜率是 + 1, 证券的价格 $P$ 也就是初始头寸的价值. 更确切地说, 价格如果从 $P_0$ 开始增加了 $\Delta P$, 收益也将等于这个增量.

特别地, 如果投资者在资产价格是 100 时用他自己的积蓄购买了该资产, 那么在那个时刻的净值就用垂直距离 $OB$(等于 100) 来代表; 另一方面, 一个市场专业人员没有资金, 所以他必须先借入 $OB$(或者 $P_0$) 然后再买资产. 这称为多头寸融资.

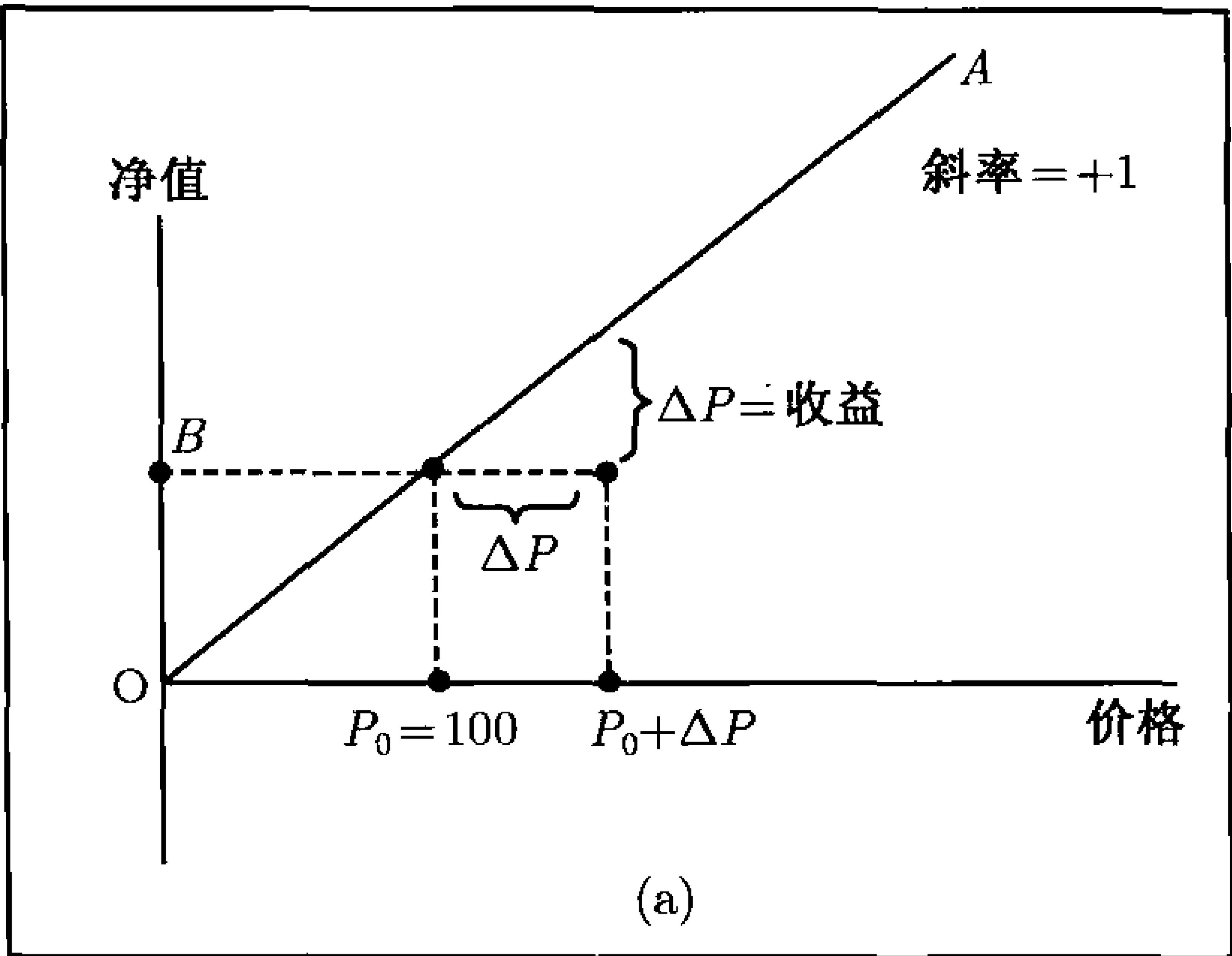



图 2-2a

图 2-2b 表示了这种情形. 注意到在购买时如果价格为 100, 市场专业人员的总净头寸等于 0. 在一定意义上, 通过先借款然后再购买资产, 一个人拥有的不是资产而是某种敞口. 如果资产价格上涨, 头寸将有利可图. 另一方面, 如果价格下降, 头寸将出现损失.

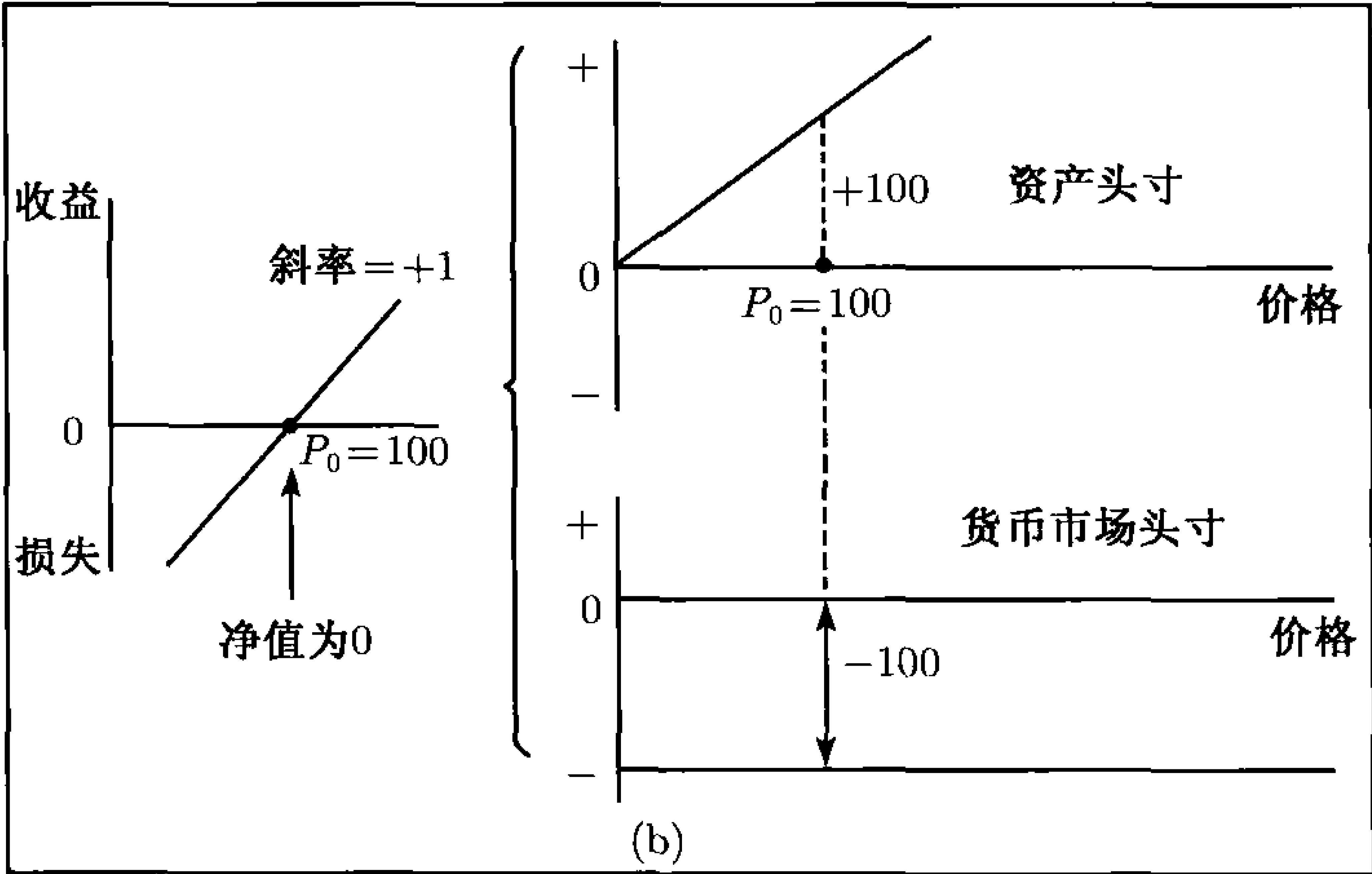



图 2-2b

图 2-3 从市场操作者的角度表示了一个空头寸. 这里情况是类似的. 空头寸时借的是资产. 因此, 如果在出售时价格是 100, 净值自动就是 0. 售出的是价值为 100 的资产, 出售所得的现金 100 刚好等于所借资产的价值. 因此, 在价格 $P=100$ 时, 头寸具有零价值. 当价格下降时头寸将盈利, 而价格上升时头寸将损失. 这是因为借的是证券而不是资金. 此外, 资产在借入时是按照价格 100 卖的. 因此, 当价格上涨时, 一个人将归还给证券的原始拥有者一个价格大于100 的证券.

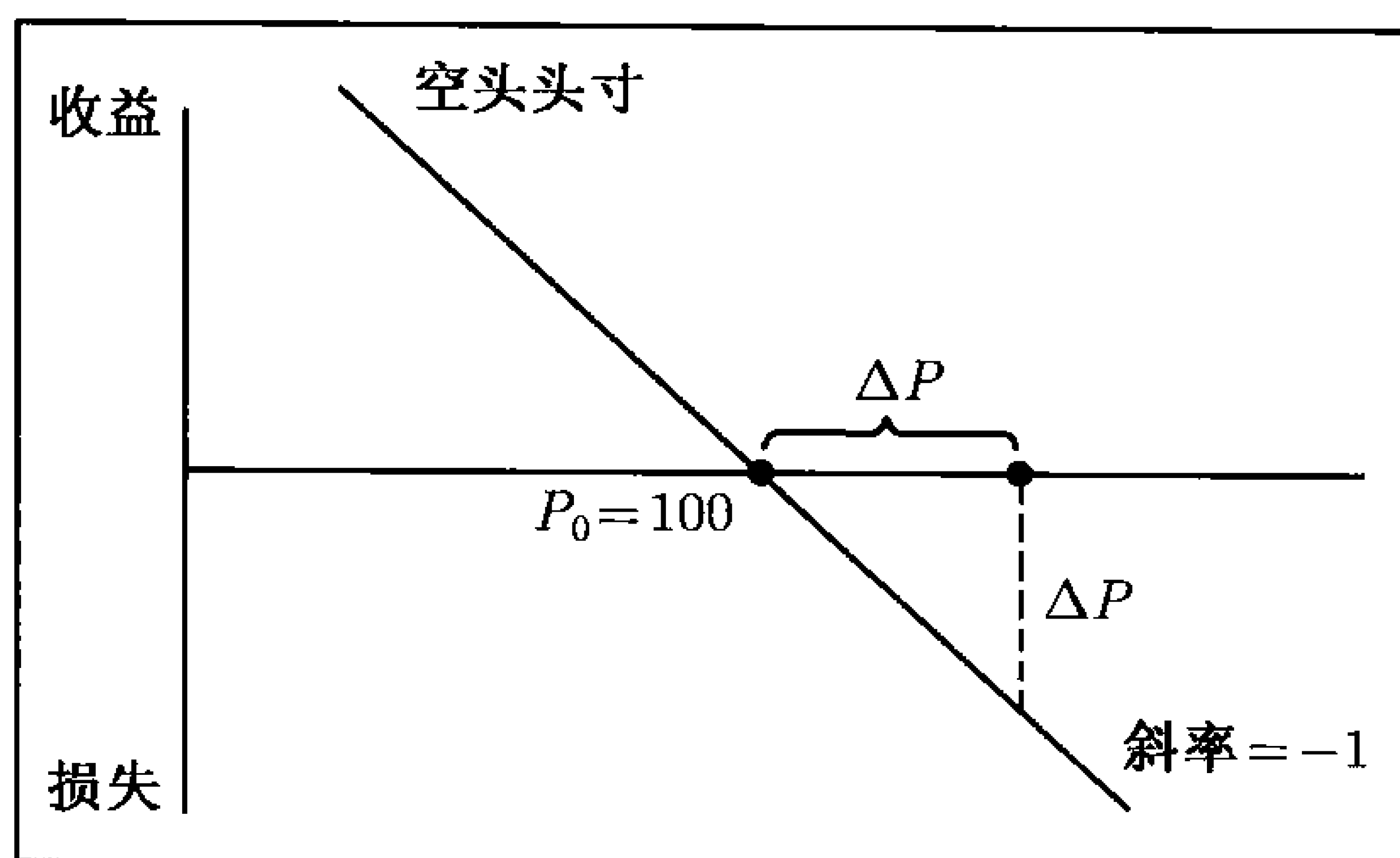



图 2-3

类似地, 当证券价格下降, 一个投资者通过以低于 100 的价格买入新的证券, 然后将它 (价值变小了) 归还给原始拥有者来*轧平*空头寸. 总的来说, 空头寸用一条向下倾斜的斜率为 $-1$ 的直线来描述.

注意, 这些图表具有某些技术特点. 首先, 表示所持头寸价值的支付图关于资产价格是*线性*的. 价格 $P$ 改变了, 支付也会改变一个常量. 头寸关于价格变化的敏感性称作 delta. 实际上, 价格的改变量将按一比一的比例来决定盈利或者损失的量, 多头寸的 delta 值等于 1. 在空头寸的情形下, delta 等于 $-1$.

一个投资者可以通过计算偏导数来定义其他敏感性因子. 这些敏感性因子被称作*希腊字母*, 它们在期权市场上被广泛使用.[1]

### 2.7.2 头寸的类型

持有头寸的目的可以是*对冲*、*套利*或者*投机*. 我们简单地回顾一下这些活动.

首先是*对冲*. 对冲是不用轧平头寸但可以消除已有头寸敞口的一种行为. 假设我们*卖空*一种债券 (例如找某人借了一个债券, 然后在市场上卖出, 从而获得现金). 我们手头上拥有了现金, 但同时我们欠某人一个债券. 这意味着如果债券价格上升, 我们的头寸将有一个*市价*的损失.

为了消除风险, 可以购买一个类似的债券. 图 2-4 表示了最终的头寸. 除了某些残存基差风险外, 多空头寸将彼此抵消. 最终, 对于标的价格 $P$ 的变动, 我们有很小的敞口. 为了对冲同样的风险, 也可以不在现货债券市场而在期货或者远期市场上建立多头寸. 这就是说, 我们不用购买另一个债券, 而是购买一个合约, 承诺在 $\delta$ 天后按事先指明的价格 $P^f$ 购买一个债券. 直到结算日 $t+\delta$ 之前, 这个合同都不需要任何现金支付, 在结算日根据市场价格变化情况产生盈利或损失. 这里远期价格 $P^f$ 和现货价格 $P$ 并不相等. 由于标的资产相同, 我们可以期望从两个头寸中获

---

① 前面图表中没有考虑询价差. 买卖价格不能同是 100, 卖价 $P^{\text{ask}}$ 将会比买价 $P^{\text{bid}}$ 高, $P^{\text{ask}}$-$P^{\text{bid}}$ 就是相应的*询价差*.

得非常相似的收益和损失.

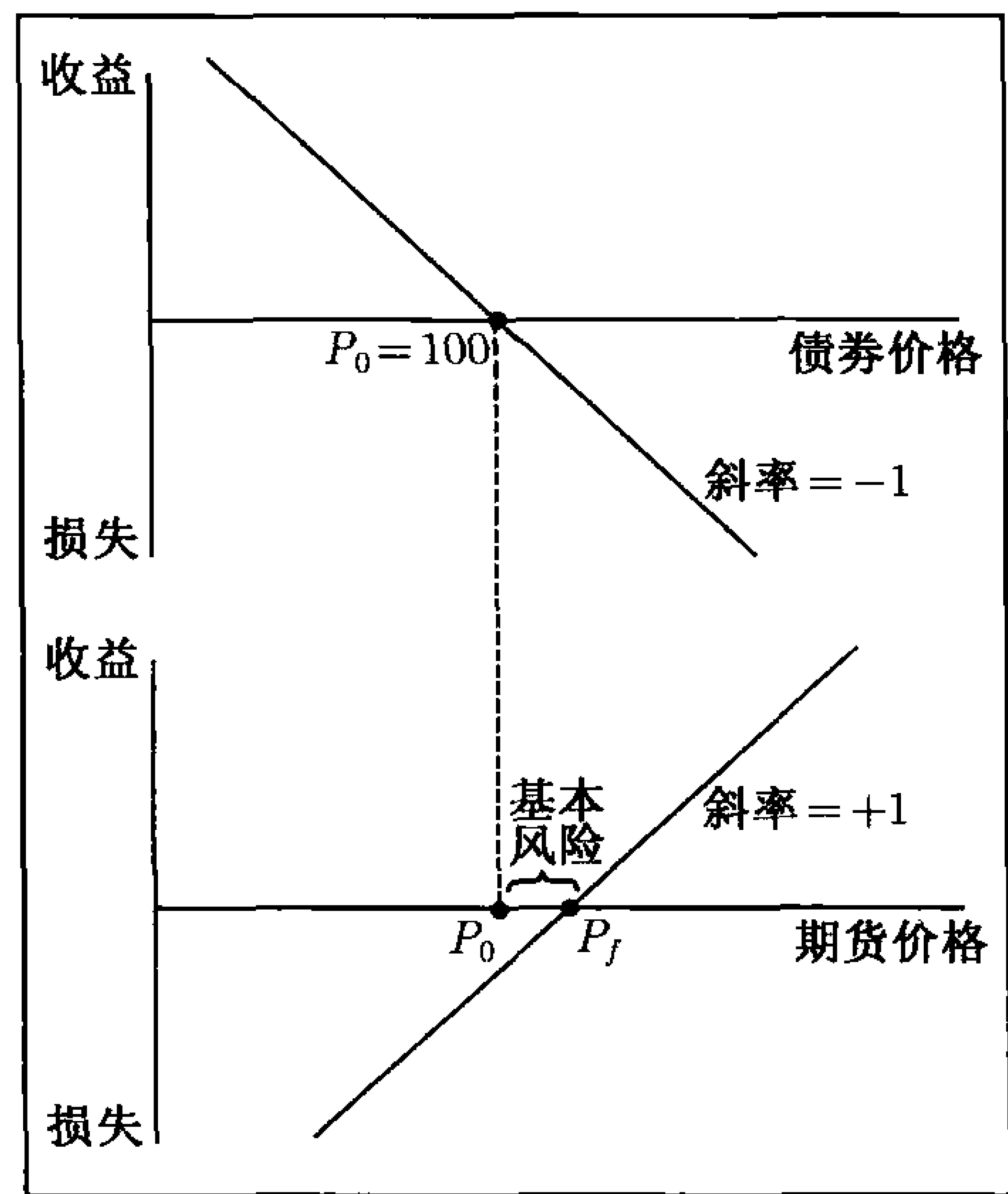



图 2-4

这阐明了金融工程中的一个基本前提：一个投资者应该尽可能地通过建立不需要重新注入资金的头寸来进行市场操作.

套利

套利是金融工程中的基本概念. 它可以表示两种不同的东西, 这取决于我们是从市场实践的角度还是从金融工程理论的角度来看问题.

从金融工程理论定义开始讨论. 假设已给出一系列金融工具以及它们的价格 $\{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$, 如果不存在这样的投资组合, 即它在建立时不需要成本但在将来会产生非负收益, 我们就说没有套利机会. 在无套利情形下, 一个当前价格为负而未来具有零收益的投资组合也是不存在的.

如果价格 $P_i$ 具有这种特性, 我们就说它们是无套利的. 在某种意义上, 无套利价格代表了标的工具的公平市场价值. 没有初始投资也不承担风险就不应该获得收益, 后面章节的许多论述将在这个无套利原理的基础上展开.

在市场实践中, "套利" 这个术语有不同的含义. 实际中, 套利意味着有风险的头寸, 它是一个也许带来损失, 但是仍有很大可能产生高收益的头寸.

## 2.8　辛迪加过程

关于辛迪加过程的讨论将是很有用的. 金融工程师面临的一些合同设计和定

价问题也许都与辛迪加过程的动态机理有关. 股票、债券和其他工具在初级市场上并不是按照诸如汽车和食品的销售方式来卖给投资者的. 销售过程也许会花费几周的时间, 而且有它自己的技巧. 这些对于金融工程师来说可能是非常重要的.

**在初级市场上销售证券**

以下给出的是一个辛迪加过程的时间表. 它显示了不同工具所带来的变化. 即使在同一个行业, 发行者不同, 时间的选择也可能不同, 这取决于该时刻市场参加者的心理状态. 下面描述的过程给出了一个关于欧洲债券发行的例子. 对于*辛迪加贷款*, 为了发行便利, 尤其是 IPOs, 虽然基本想法是类似的, 但过程却显著不同.

(1) 前两周: 选定经理人, *授权*. 决定发行策略, 并开始制定文件.

(2) 前一周: 完成各种*文件*, 确定协作经理.

(3) 当日: “发起日”. 向*证券包销商*和*销售团*成员发送传真. 在出版物上发布消息.

(4) 第 8 日后: 总负责人预拨付配额.

(5) 第 9 日: 定价日.

(6) 第 10 日: 提供日. 向集团成员发送配额传真.

(7) 第 24 日: 支付日. 辛迪加成员进行支付.

在其他的市场上, 辛迪加过程中实际的时间选择和程序都可能有比较大的变化. 但总的来说, 过程中比较重要的步骤已经体现在这个简单例子中了.

*债券的辛迪加与辛迪加贷款*

我们可以将债券的发行与处理一个辛迪加贷款进行比较, 它们有一些不同之处. 辛迪加贷款是*银行账簿*上或*银行信用部门*中的工具. 追踪调查以及风险管理是由银行信用部门按照类似于标准贷款的方法进行的. 例如发售通知上的信息就不是很重要.

而债券是通过投资或者交易账簿来处理的. 通知上的分析和信息是非常重要的, 文档上的差异非常大.

辛迪加贷款试图通过代理人来维持银行和客户之间的关系. 但是, 在债券的发行上, 借出者和借人者之间的关系要疏远得多. 因此, 这种类型的借款只限于那些有好名声和好信誉的机构. (银行将连续地跟踪名声较差者, 从而知道其信用状况的恶化情况. ) 期限也可能非常不同.

## 2.9 结　论

本章回顾了读者可能会遇到的某些基本知识. 但这里提供的内容比较粗略, 无法取代关于惯例、市场以及参与者的完整课程. 而且市场管理、市场结构以及工具

的特点也会随时间而改变.

## 参考文献

对于一个金融工程学生来说, 完全了解标的工具、市场以及惯例是非常重要的. 本章只是提供了这些课题的一个简要回顾. 所幸有些很好的教科书对它们进行了深入讨论. 首先应提到的是 Hull(2002) 和 Wilmott(2000). 关于工具、定价以及一些基本金融市场策略的市场导向方法可以在 Steiner(1997) 和 Roth(1996) 中找到. 我们推荐这两本书作为背景材料.

## 习 题

1. 假设一个互换利率的报价是 5.06/5.10. 计算一个关于以下货币的固定支付方互换的固定付款金额, 互换名义本金为 1 亿.

- 美元
- 欧元

如果互换是关于下面货币的固定接收方互换, 计算固定支付金额.

- 日元
- 英镑

2. 假设下面通用电气和霍尼韦尔的股价是在两个公司合并谈判前观察到的:

霍尼韦尔 (HON) 27.80

通用电气 (GE) 53.98

此外, 我们还假设你从某种渠道了解到合并谈判中商定每股霍尼韦尔等价于 1.055 股通用电气股份.

(a) 为了从这则消息中获利, 你将建立什么类型的套利头寸?

(b) 为了建立这个头寸, 你需要存入自己的资金吗?

(c) 你为此头寸需要并且能够借到资金吗?

(d) 这是真正学术意义上的套利吗?

(e) (如果有的话) 你要承担什么样的风险?

3. 阅读下面的市场实例, 然后回答相关的问题.

财产商们在打赌, Euribor(拟定的欧洲大陆欧元货币市场利率) 的水平将会定在 Euro BBA Libor 之上. 对此进行套利是相当直接的. 财产商以大约零净值的成本购买 Liffe 1999 年 9 月的欧洲马克合约, 并且卖出 Matif 1999 年 9 月的 Pibor 合约. 由于 Liffe 合约是参照 Euro BBA Libor, 而 Matif 合约是以 Euribor 为指标的, 所以这样做的效果是财产商接收 Euribor 而支付 Euro BBA Libor.

这种策略是基于认为 Euribor 将高于 Euro BBA Libor 而制定的. 财产商们上周认为, Euribor 是以 57 个不同银行的报价为基础, 其中一些银行的信用等级低于 8 个 Libor 银行. 相反, Euro BBA Libor 仅基于 16 个机构的报价来计算. (摘自 IFR, 1998 年 12 月 18 日)

(a) 使用头寸图来表示财产商的头寸.
(b) 这些图表的水平轴表示什么？纵轴呢？
(c) 如果在到期日由于突然的衰退而导致欧洲利率大幅下降, 将会给财产商的利润造成什么样的影响？

# 第 3 章　现金流工程与远期合约

## 3.1　引　　言

所有的金融工具都可视为一系列现金流. 人们之所以设计金融工具是为了使市场参与者可以交易具有不同*特点*和不同*风险*的现金流. 本章利用*远期*和*期货*来讨论现金流是如何被复制, 继而被重新组合从而产生合成工具的.

确定线性工具的复制策略是最简单的. 我们将说明这种复制方法可以进一步发展成一种解析方法, 可用来创建等价于复杂金融工具的合成工具. 所以, 我们不太关心合成工具的具体形式, 而更多地考虑它们的构造方法. 这种解析方法将归结为一个 (合同的)*方程*. 在代入适当的工具后, 方程将产生合成工具的现金流. 本章中, 我们假设不存在违约风险并且仅讨论*静态复制方法*. 所建立的头寸一旦确定, 在交易到期日前不再变化, 并且不需要再调整. 动态复制方法将在本书第 7 章中讨论.

## 3.2　合 成 工 具

合成工具, 或者复制资产组合的概念在金融工程中处于中心地位. 我们往往要理解如何对一种工具进行定价和对冲, 并且要了解这种工具的风险. 为此, 我们会考虑一种工具在合同规定期限内产生的现金流. 然后, 利用其他较简单且具有流动性的工具, 来产生一个资产组合, 它能精确地复制这些现金流. 这种资产组合称为*复制资产组合*, 它是原来金融工具的合成品. 与原来的工具相比, 复制资产组合的构成工具更容易定价、理解和分析.

本章首先讨论利用*远期*、*期货*和*货币市场产品*来复制的合成工具. 最后将得到一个合同方程, 它使我们可以通过代数上的运算得到实际金融工程问题的解.

### 现金流

首先, 定义一个简单的工具, 它将在本书第一部分起到重要的作用. 这个工具就是现金流的图形表示.

所谓现金流, 我们指的是在指定的*时间*、以指定的*货币*、有固定*信用风险*的现金支付或接受. 例如, 考虑图 3-1a 的现金流. 这些图形将在后面的章节中反复用到, 所以这里具体地说明一下.

**例**

图 3-1a 所示的现金流是由一笔贷款产生的. 用 −1 乘以这些现金流可将它们转换为存款现金流. 在图中, 水平坐标轴表示时间. 这里有两个感兴趣的时间, 用符号 $t_0$ 和 $t_1$ 表示. $t_0$ 是 100 美元现金流入的时间, 在图中用位于坐标轴上方的矩形表示. 在 $t_1$ 时刻, 现金流出, 此时矩形位于坐标轴下方, 因此表示借方. 两笔现金的大小不同.

我们可以把图 3-1a 解释为如下现金流: 一个市场参与者在 $t_0$ 时刻借入 100 美元, 然后在 $t_1$ 时刻连本带息偿还 105 美元, 这里假设适用于时间区间 $[t_0, t_1]$ 的利率是 5%.[①]

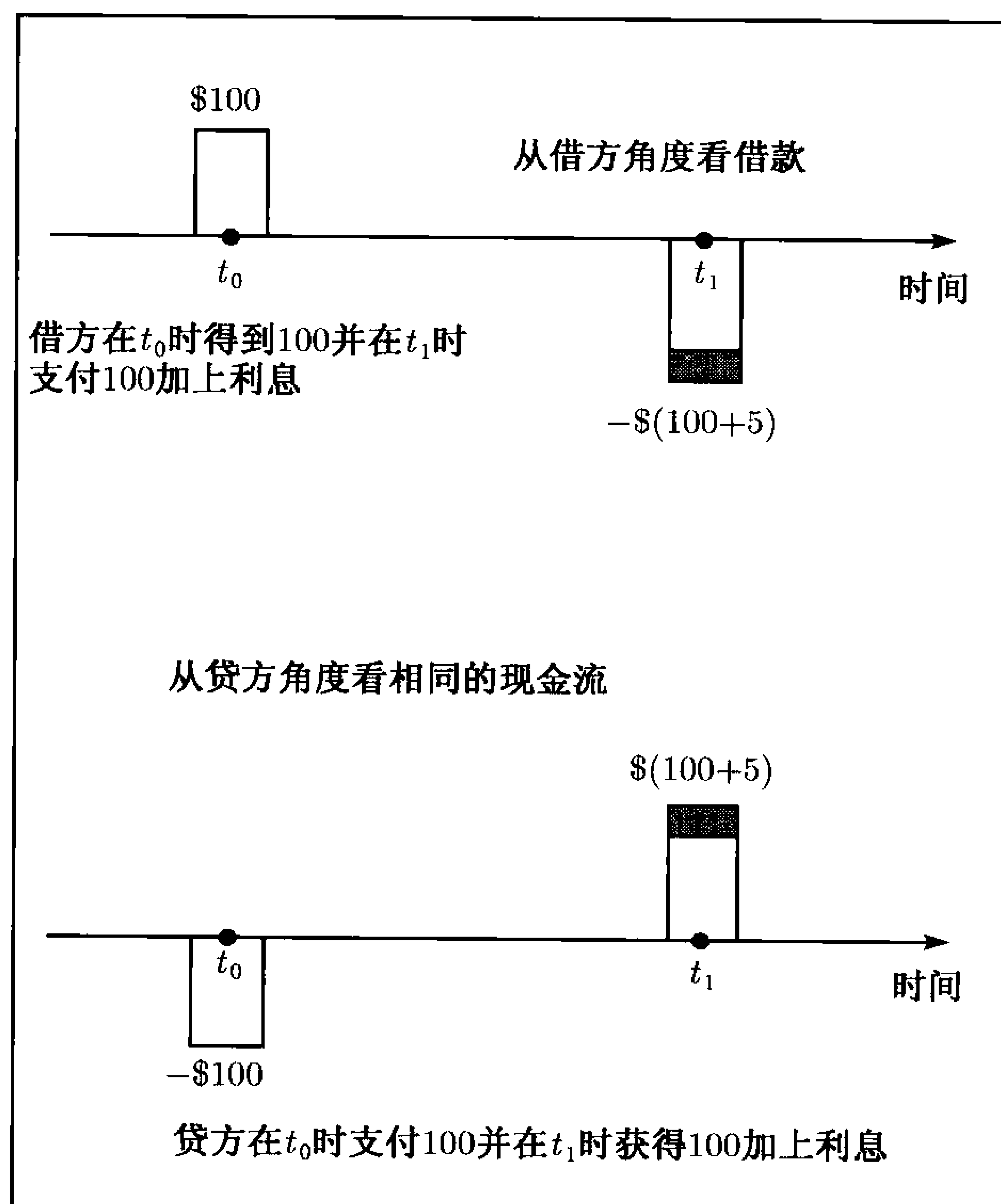



图 3-1a

值得注意的是, 图 3-1a 中上面部分图形表明从借方角度考虑的现金流. 事实上, 每笔金融交易至少有两个参与者. 因此, 如果从贷方的角度考虑同样的工具, 我们将会看到与这些现金流相反的图形. 即贷方在 $t_0$ 时借出 100 美元, 然后在 $t_1$ 时收回本金和利息. 这个买卖价差表明利率是卖出 (存款) 利率.

① 假设所考虑期限为一年.

最后, 我们注意到图 3-1a 中所示的现金流不允许任何不确定性. 因为, 在 $t_0$ 和 $t_1$ 时刻, 现金流都是用价值已知的单个矩形表示的. 如果二者中任一现金流存在不确定性, 那么我们在图形中需标示出这种情况.

例如, 如果在贷款偿还时存在违约可能, 那么现金流表示应像图 3-1b 那样. 如果借方违约, 则无任何支付. 在 $t_1$ 时, 存在两种可能. 贷方或得到 105 美元或什么也得不到.

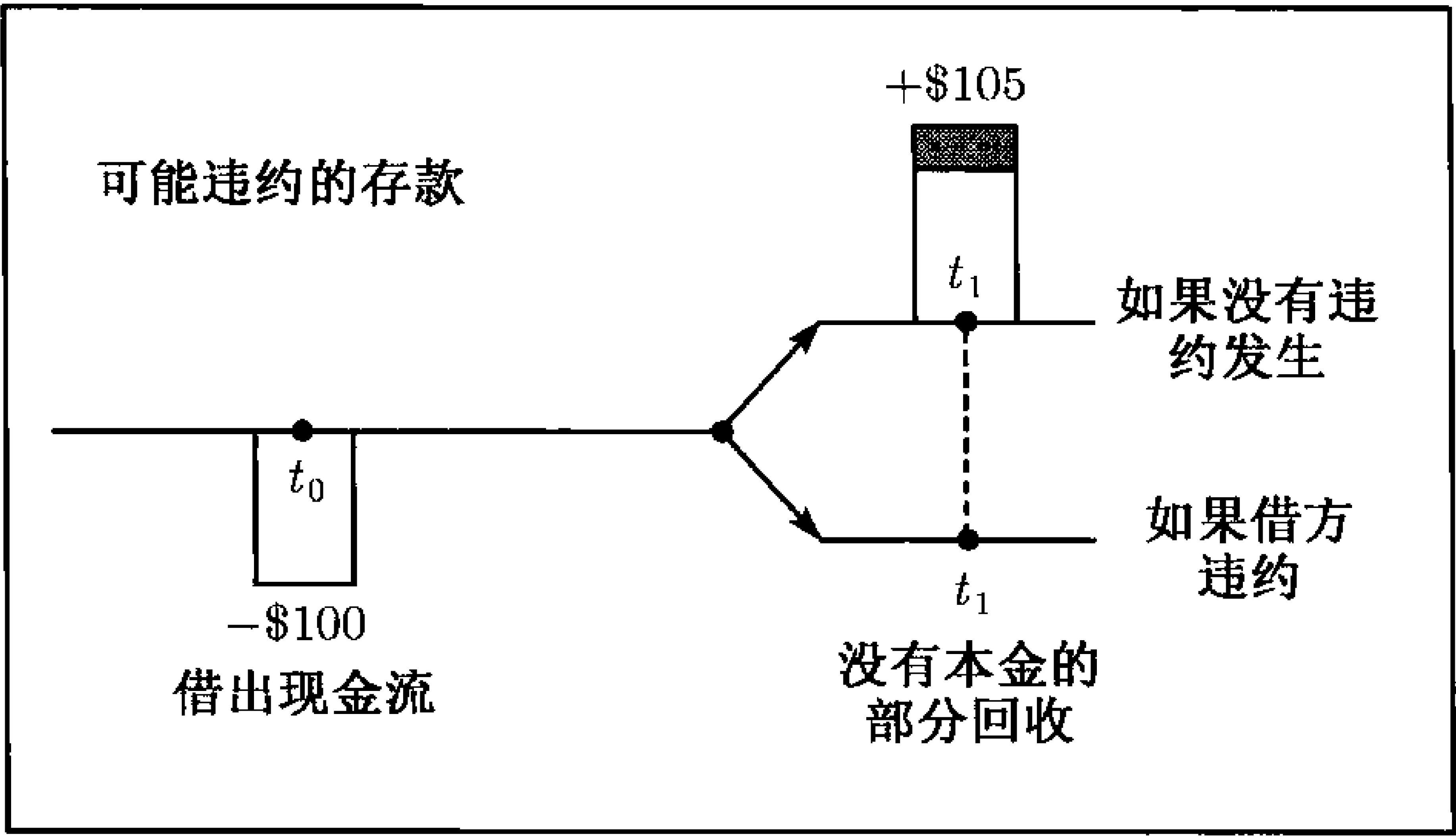



图 3-1b

现金流的特殊性质可视为它的属性. 在任何时刻, 根据这些不同的属性, 市场参与者和企业有着各自不同的需求. 他们交易现金流来达到所期望的目标. 这是通过交易具有不同现金流属性的金融合约来实现的. 我们现在列出具有已知属性的几种主要类型的现金流.

1. 不同货币的现金流

最初在市场上设计的金融工具所交易的现金流, 除了表示它们的货币外其他各方面都是完全一样的.

在图 3-2 中, 决策者预计在 $t_0$ 时支付 100 美元而且同时得到 $100e_{t_0}$ 单位欧元. 这称为即期外汇交易, 因为交易都发生在时刻 $t_0$. $e_{t_0}$ 为即期汇率, 它表示 1 美元可以兑换的欧元数目.

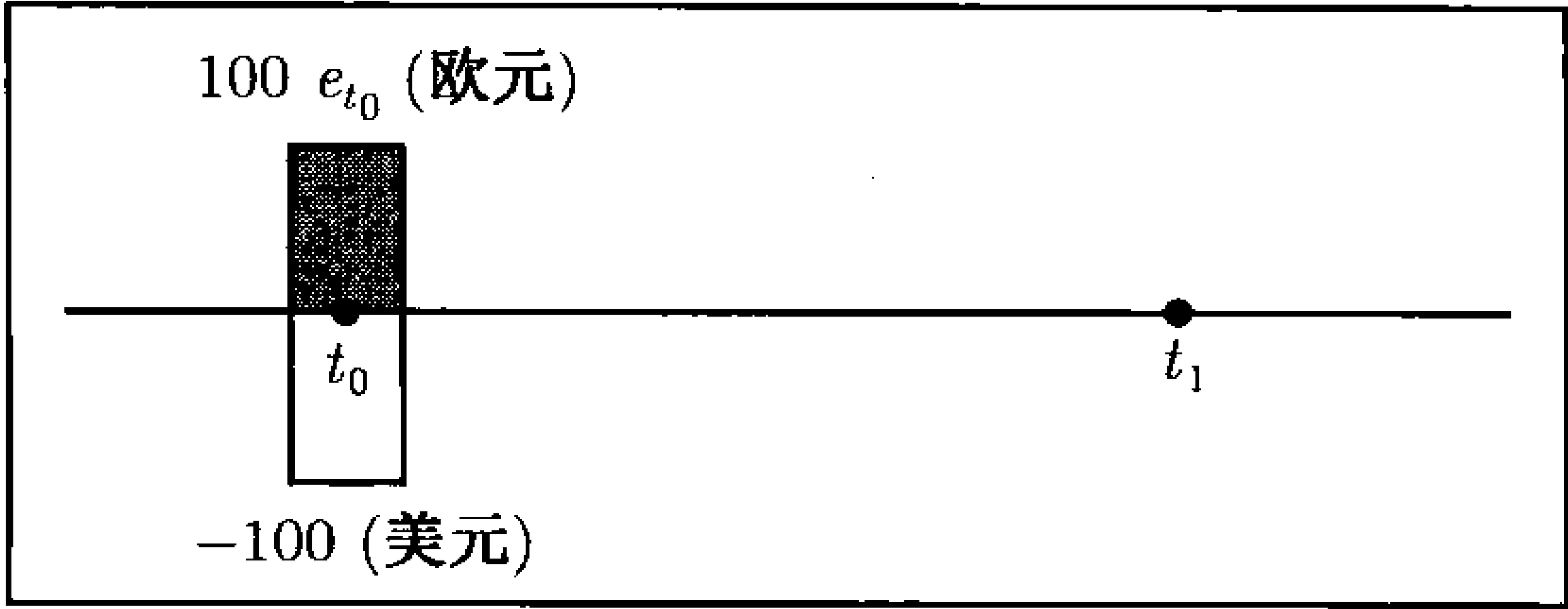



图 3-2

2. 不同时间的现金流

一个市场参与者想要用 $t_0$ 时的一个现金流, 交换另一 $t_1$ 时的现金流. 如图 3-3 所示, 这个市场参与者在 $t_0$ 时支付现金, 在 $t_1$ 时得到相同货币的现金流. 两笔现金流大小的差别在于这段时期现金流产生的利息. 贷款和存款都属于这个类型.

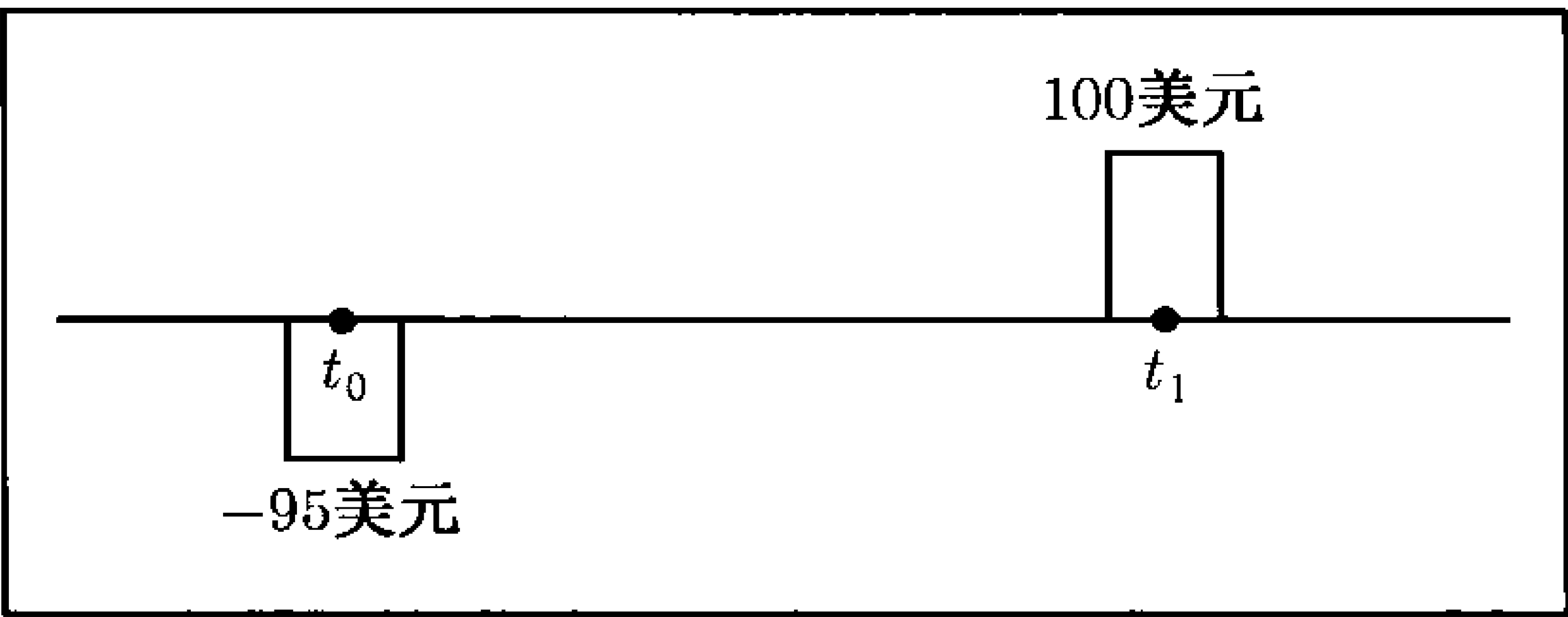



图 3-3

我们注意到这些贷款可以用黄金、白银、小麦或者其他商品表示, 也可以用其他指定的货币表示.

3. 市场风险不同的现金流

如果交换具有不同市场风险特性的现金流, 我们将得到比即期外汇交易或存款更复杂的金融工具. 图 3-4 所示的是不同市场风险下的现金流交易. 市场参与者支付的金额正比于本金$N$ 的 $L_{t_1}$ 个百分点, 作为交换, 他将接受 $N$ 的 $F_{t_0}$ 个百分点的金额. 其中的下标表明, $L_{t_1}$ 是在 $t_0$ 时未知, 而要到 $t_1$ 时才能知道的浮动利率. 而 $F_{t_0}$ 在 $t_0$ 时是确定的, 并且是一个远期利率. 现金流交易在 $t_2$ 时进行, 并且涉及两种不同的风险. 用来交换这种风险的金融工具通常称为互换, 它们交换浮动风险和固定风险. 互换不只限于利率. 举个例子, 一个市场参与者可能愿意支付浮动 (有待决定) 石油价格且接受一个固定油价. 我们可以为所有类型的商品设计这种形式的互换.

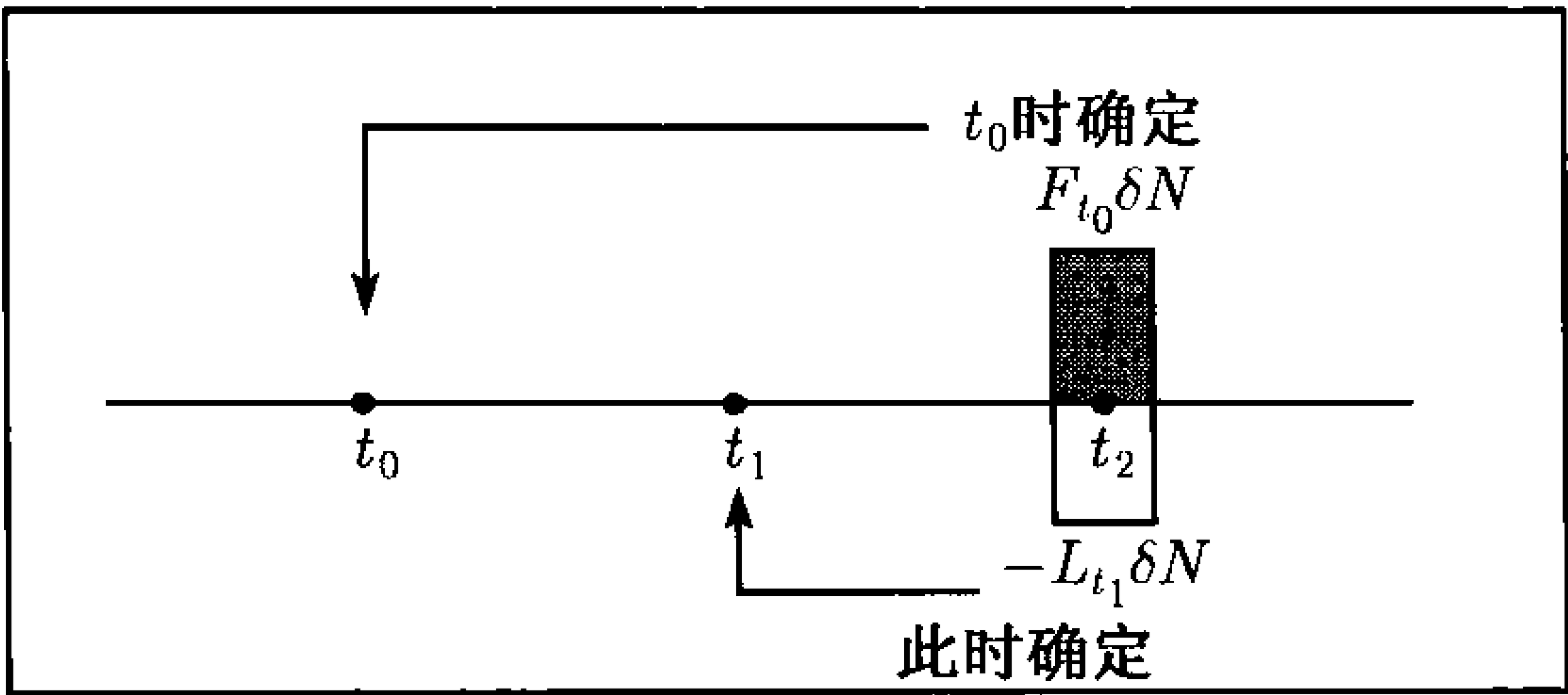



图 3-4

4. 信用风险不同的现金流

每个借款者的违约概率是不同的. 交易具有不同信用风险特性的现金流就产

生了信用工具.

在图 3-5 中, 一个交易对手支付的金额是不确定的, 它取决于一个决策者对所保证的收入金额是否违约. 市场参与者可以买卖具有不同信用风险特性的现金流, 这样他们可以调整自己的信用敞口. 例如, 可以交易 AA 级的现金流来对冲 BBB 级的现金流.

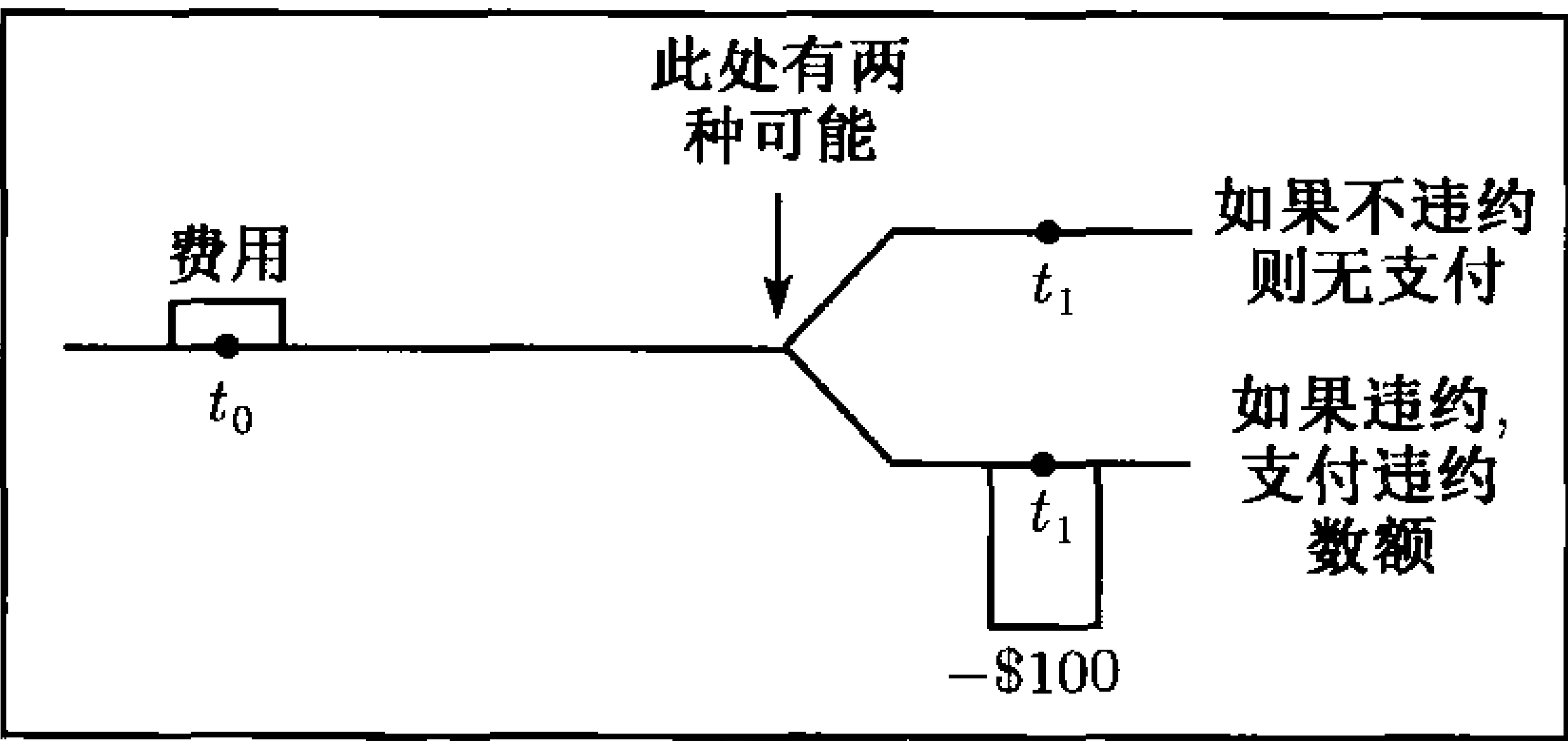



图 3-5

5. 波动率不同的现金流

交易具有不同波动特性现金流的金融工具是相当新的产品. 图 3-6 表示了在 $t_2$ 时用一个具有固定波动率的现金流来对冲一个已实现的 (浮动) 波动率, 后者可在区间 $[t_1,t_2]$ 内观测到. 这种工具称为*波动率互换*或 Vol- 互换.

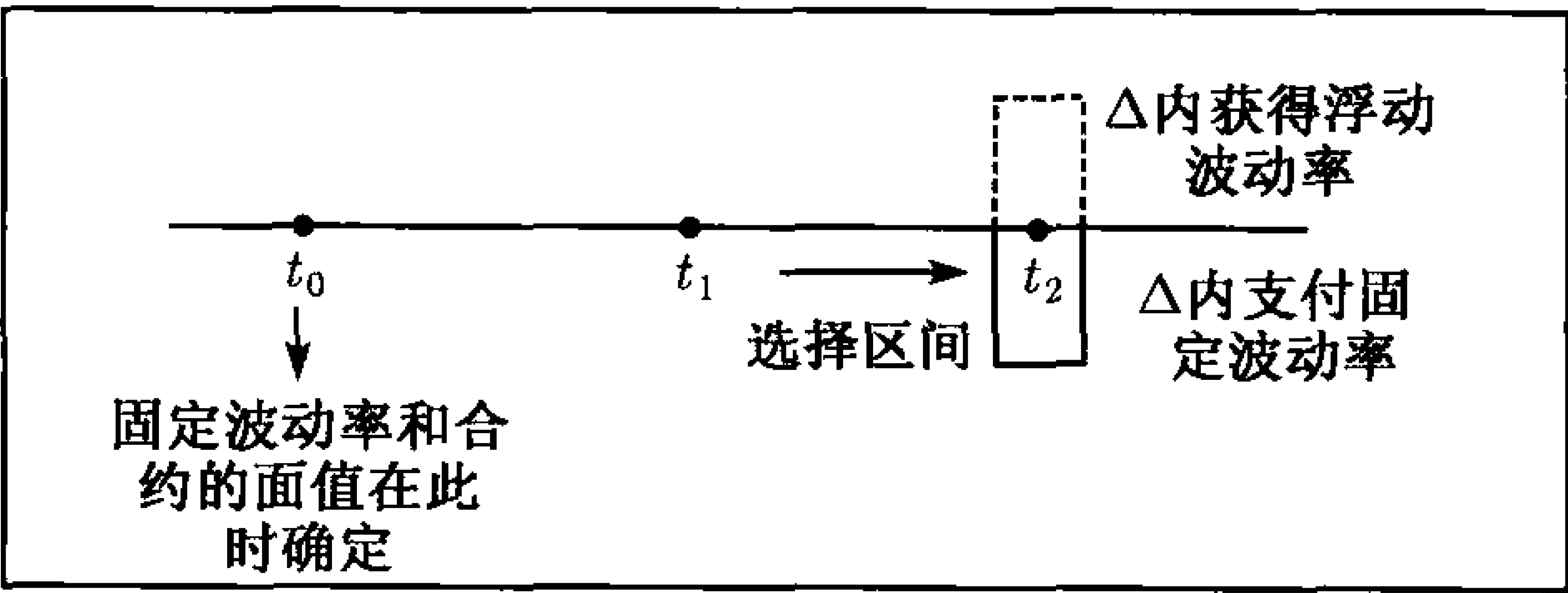



图 3-6

6. 敏感性不同的现金流

现金流不仅依赖风险因素, 还可能依赖这些风险的敏感度. 我们可以交易同一个风险因素下不同敏感度的现金流.

图 3-7 给出了这样一个例子. 30 年期的贴现债券价格具有显著的曲率, 这意味着债券价格随收益率变动的敏感度*不是*常数. 事实上, 30 年期债券的价格是收益率的*非线性*函数. 但是, 同样的情况对两年期债券却不适用. 它的价格是收益率的 (拟)*线性*函数. 可以设计适当的金融工具以交易*凸性*差.

期权和债券是用来交易凸性的两种最普通的工具.

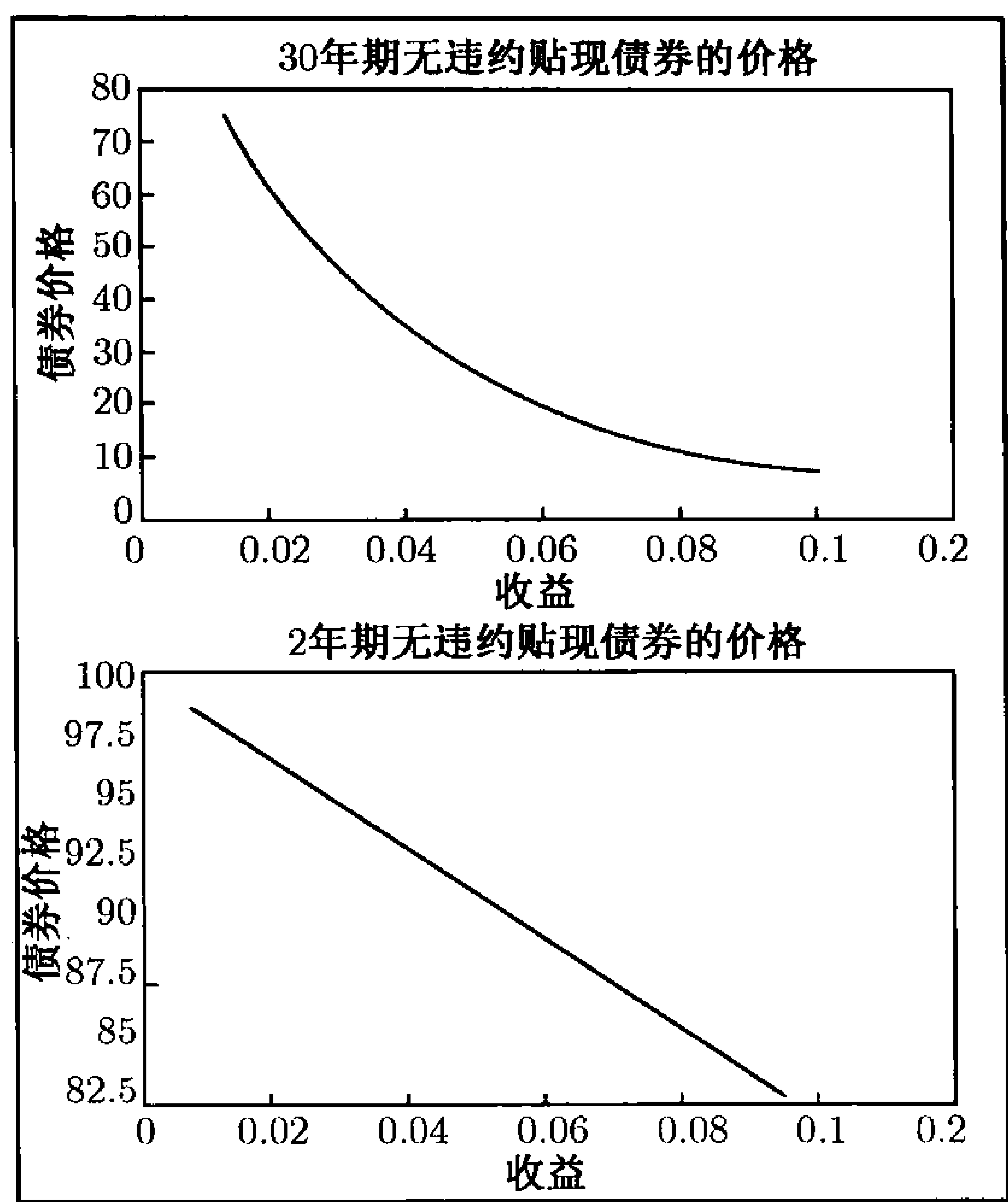



图 3-7

## 3.3 远期合约

本章仅讨论最基本的现金流交易. 我们考虑远期、期货合约和作为基础的银行间货币市场. 这些都是最简单的, 且其中某些是流动性最好的工具. 由于种种原因, 它们是创造合成工具的理想工具. 一般来说, 远期和期货都是线性的, 它们通常具有很高的流动性, 而且在货币远期情形下, 其标的资产是同质的. 许多技术难题都因标的货币的同质性而自动解决. 关于利率的远期和期货存在更多的困难, 这方面内容将在第 4 章讨论.

一份远期或期货合约可以固定未来标的资产的卖价或买价, 这对于对冲、套利和定价都是很有用的, 而且对创造合成工具也是非常重要的. 考虑下面的解释.

金融工具使用不同的货币命名. 用美元进行交易的市场参与者通常使用用美元表示的金融工具. 因为流动市场的范围比较大, 对于美元来说, 这是很好操作的. 市场专业人士可以向使用这些工具的客户提供各种类型的服务. 另一方面, 还存在一小部分由流动的货币, 比如瑞士法郎 (CHF) 命名的金融工具. 那么, 瑞士市场专业人士向其客户提供相同服务的权利将被剥夺吗? 原则上, 关于美元/瑞士法郎的流动外汇 (FX) 远期合约可以使得以 CHF 为基础的客户也可以得到用美元命名的金融工具.

我们可以首先在 $t_0$ 时买入或卖出美元，然后利用以美元命名的金融工具来执行任何操作，以此来代替在 CHF 下的交易. 流动的外汇远期合约允许在 $t_0$ 时，将期货美元现金流再转化为 CHF. 所以不同货币的流入和流出在合约缔结时就已经确定了. 只要流动远期合约存在，市场专业人士就可以利用以美元命名的工具来执行任何其他货币的操作.

作为说明，下面我们提供一个例子，其中合成零附息债券是通过外汇远期合约和另一国家的债券市场创造出来的.

**例**

假设在 $t_0$ 时我们要买入以美元命名的无风险贴现债券，债券到期日为 $t_1$，且现价是 $B(t_0,t_1)$. 只要存在外汇远期合约并且相关信用风险相同，我们就可用由任何其他货币命名的债券通过合成方法实现此交易.

首先，我们买入一定数量以 (比如说) 欧元命名且有相同到期日、相同违约风险和价格 $B(t_0,t_1)^E$ 的债券. 这需要在市场上以即期汇率 $e_{t_0}$ 用美元买欧元. 然后利用欧元远期合约卖出欧元远期，这些欧元将在 2005 年 12 月 31 日债券到期时收到. 远期汇率是 $F_{t_0}$.

最后的结果是，我们现在支付美元并且在到期日获得既定数量的美元. 这与以美元命名的债券的现金流是相同的. 现金流的操作如图 3-8 所示.

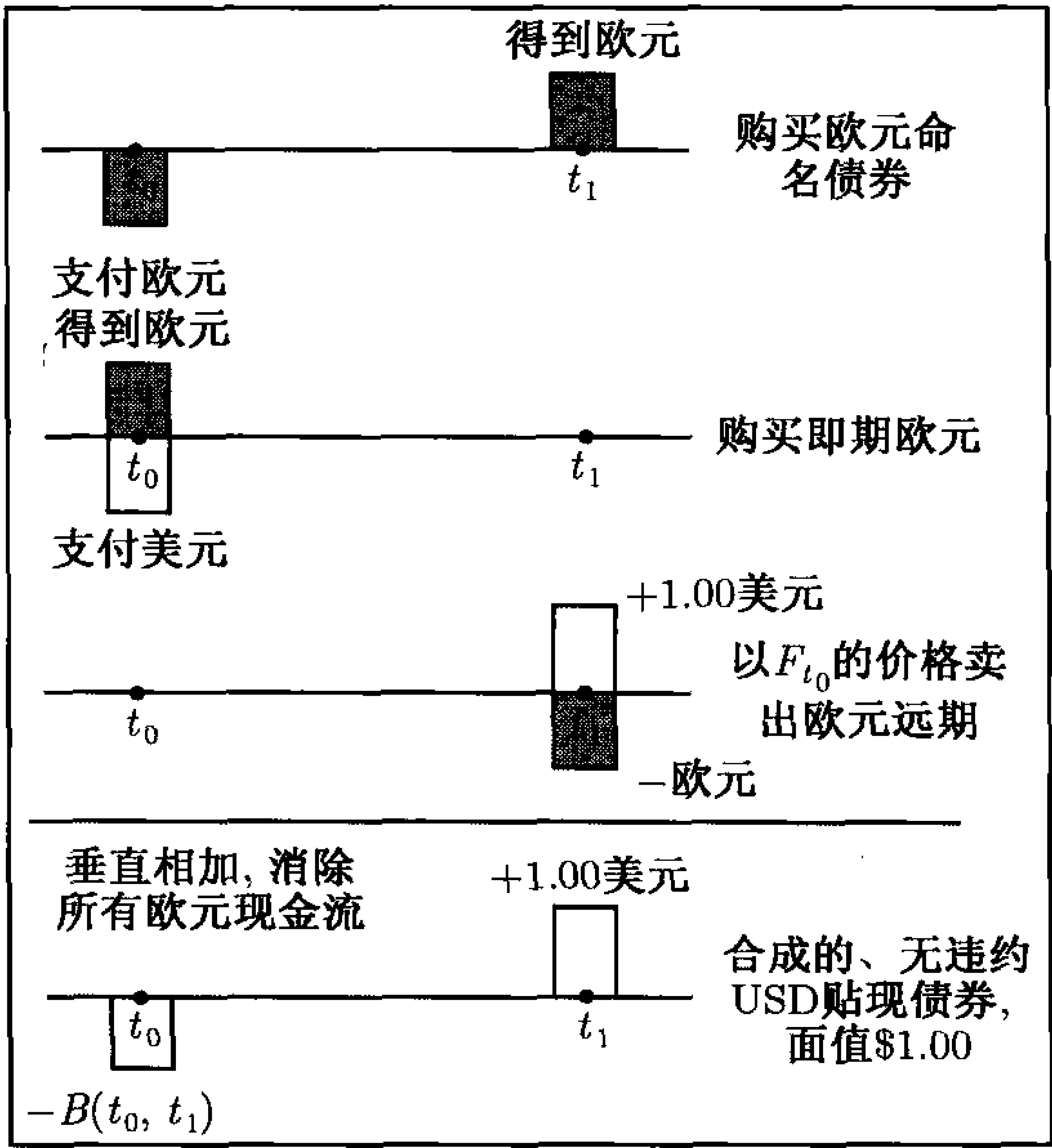



图　3-8

原则上，以上这些操作对任意的 (线性) 标的资产都适用，操作买卖远期合约的能力在这里也是非常重要的. 在进一步讨论这一类操作之前，我们先给出远期合约

的正式定义.

远期是一种在 $t_0$ 时缔结的合约, 它承诺在未来某个时刻 $t_1(t_0 < t_1)$ 以**远期价格**$F_{t_0}$ 接受 $N$ 个单位标的资产的交割. 标的资产的现价 $S_{t_0}$ 称为即期价格, 但不写入合约中, 而 $F_{t_0}$ 则在结算期间要用到. 我们注意到 $F_{t_0}$ 有一个下标 $t_0$, 因而在 $t_0$ 时是确定的. 合约在 $t_0$ 时没有任何实质交易, 所有交易将在 $t_1$ 时发生. 图 3-8 就是这种合约的一个例子.

远期合约按客户的需要在两个当事人之间签订. 这是很灵活的工具. 合约 $N$ 的大小、到期日 $t_1$ 和写入合约的其他条件都可由双方协议调整.

如果相同的远期买卖是通过一个同质化合约进行, 其中合约的大小、到期日及其他指定条款都是预先确定好的, 交易是通过正式交易所完成, 且有正规盯市, 那么称这种工具为**期货合约**.

远期合约的头寸或者是多头寸或者是空头寸. 如第 2 章所介绍的, 多头寸是指在未来日期 $t_1$, 以价格 $F_{t_0}$ 接受合约标的资产的承诺. 如图 3-9 所示. $F_{t_0}$ 是合约的远期价格. 随着时间的推移, 新订的合约价格将会变化, 在到期日远期价格变成了 $F_{t_1}$. 差值 $F_{t_1} - F_{t_0}$ 是头寸持有者的收益或损失. 我们需要注意以下两点. 第一, 因为远期合约在缔结时不需要任何现金支付, 所以 $t_0$ 时合约价值在 $x$ 轴上. 这意味着在合约缔结时, 合约的市场价值为 0. 第二, 在 $t_1$ 时, 即期价格和远期价格将相同 (或非常接近).

空头寸是指在未来日期 $t_1$, 以协定价格 $F_{t_0}$ 交付合约标的资产的承诺. 远期空头寸如图 3-9 所示. $F_{t_0} - F_{t_1}$ 是空头寸持有者的收益或损失.

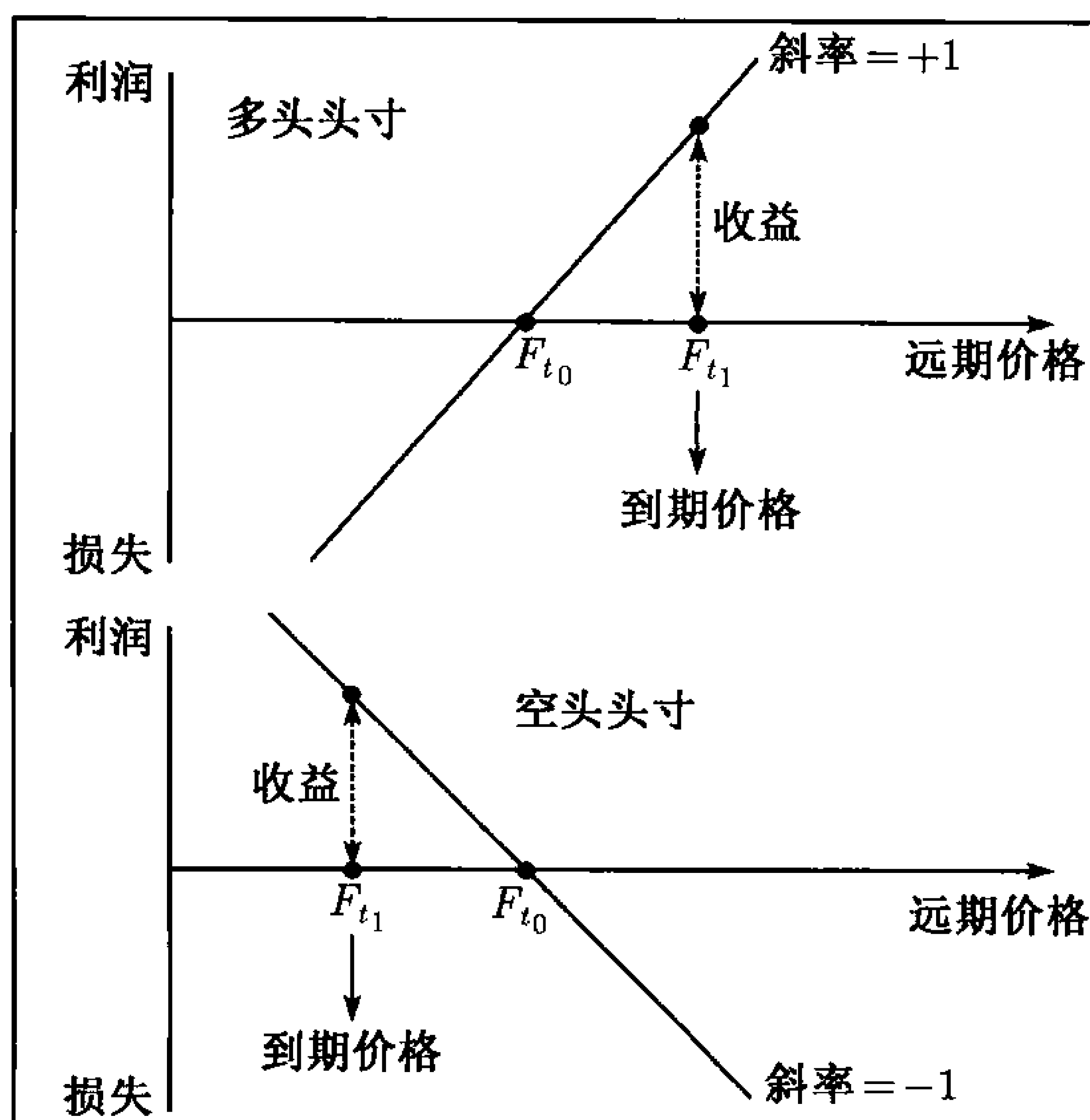



图 3-9

**例**

基本的远期和期货合约的标的资产非常广泛. 下面举几个熟悉的例子.

(1) 货币远期. 被称为外汇远期, 是指在未来时刻 $t_1$, 用一种货币来买 (卖) 另一种货币.

(2) 存贷款期货. 一种货币在未来某个日期与自身交换. 我们称之为远期贷款或存款. 它们的另一个名称叫远期对远期. 期货提供了利率交易的一种更方便的方法, 所以, 远期贷款不具有流动性, 而远期贷款的期货最具有流动性.

(3) 商品期货, 例如石油、玉米、猪肉和黄金. 在市场中, 甚至有标的为天气情况的期货.

(4) 单个股票和股票指数期货和远期. 我们不能通过交割一揽子股票来结算股指期货合约, 这种类型的合约用现金结算. 损失者用现金补偿获利者, 而不是交换标的产品.

(5) 互换期货合约. 这种合约相对较新, 它们由期货互换率承诺组成. 同样也是通过现金结算. 与期货交易相比, 场外远期交易市场占主导地位.

我们由最简单和最具流动性的合约之一——货币远期合约工程开始讨论. 远期利率产品的工程与应用将在第 4 章中讨论.

## 3.4 货币远期

货币远期是流动性很好的工具. 虽然比较简单, 但在很多金融工程问题中都要用到它.

考虑欧元/美元汇率①. 图 3-10a 所示的是用欧元远期购买 100 美元的现金流. 在 $t_0$ 时, 合约指定未来以 $100/F_{t_0}$ 欧元买入 (卖出)100 美元. 结算即实际货币交割将在 $t_1$ 时进行. 远期汇率是 $F_{t_0}$. 在 $t_0$ 时无实际交易.

显然, 远期汇率 $F_{t_0}$ 的确定必须使得合约双方都对未来的交割感到满意, 因此不需要任何即时的补偿性支付. 这意味着远期合约在 $t_0$ 时的价值为零. 随着时间的推移和市场的变动, 合约价值可以为正值或为负值.

本节讨论货币远期工具的结构. 如何创造这样一类的合成工具? 如何分解一份远期合约? 如果这些问题都解决了, 就可以考虑将我们的方法应用于对冲、定价和风险管理等问题了.

构建一个 (货币) 远期合约或任意线性工具的一般方法如下.

(1) 从图 3-10a 的现金流出发.

(2) 分解图形, 并分别将 (两个) 代表现金流的矩形放入图 3-10b 和图 3-10c 中.

① 欧元/美元表示基础货币是欧元.

(3) 然后在仔细选择的日期加减新的现金流, 以使被分解的现金流转变成投资者愿意买卖的实际金融合约.

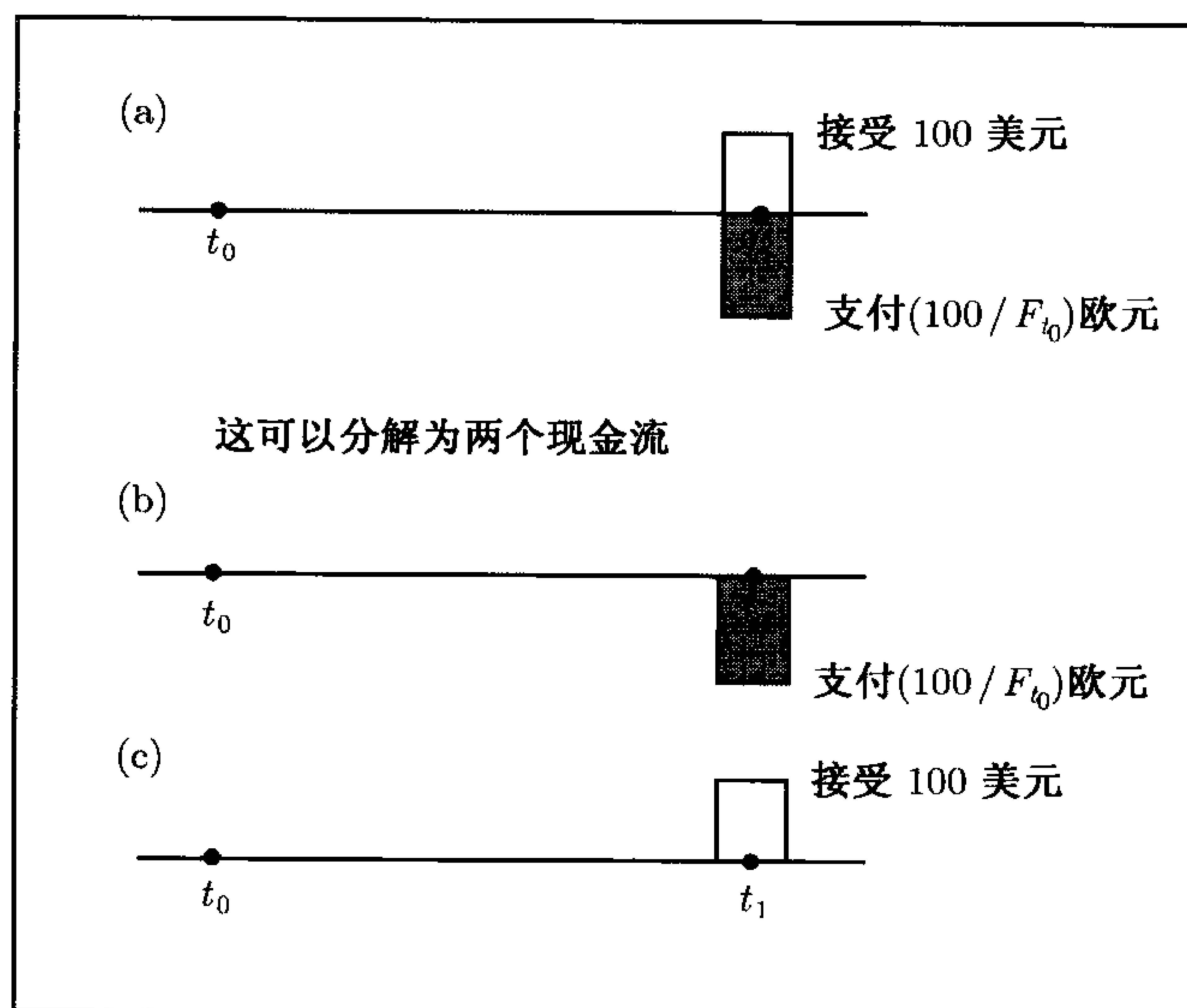



图 3-10 abc

(4) 最后, 在上述过程中要确保当图形垂直叠加时, 新添加的现金流相互抵消掉, 而原始现金流被恢复.

随着所应用的工具复杂性的增加, 这个过程也会越来越清楚. 下面举第一个例子.

### 3.4.1 货币远期工程

我们将使用上述方法来构造货币远期, 并详细讨论它们具体的操作步骤. 最终目标是获得合约方程, 并且通过这种方式, 把初始合约表示成两个或多个更为初等合约的和.

首先从图 3-10a 所表示的现金流入手. 如果将两个现金流分解, 我们将得到图 3-10b 和图 3-10c. 现在的问题是: 没有人愿意购买图 3-10b 的现金流, 也没人愿意卖出图 3-10c 的现金流. 确实, 没有人愿意做只有付出而无回报的事. 因此图 3-10b 和图 3-10c 不能表示可以交易的金融工具.

然而, 我们按照前述方法中的第三步插入新的现金流, 将它们转化为可交易合约. 在图 3-10b 中, 增加对应的现金流入. 在图 3-10c 中, 增加对应的现金流出. 通过调整这些新增现金流的大小和产生时间, 可以把图 3-10b 和图 3-10c 中的交易转化成具有实际意义的金融合约.

我们将尽可能地使问题变得简单. 对图 3-10b, 最好在 $t_0$[①]时增加正向现金流, 如图 3-10d 所示. 这里我们用 $C_{t_0}^{eur}$ 来表示该现金流大小.

在图 3-10c 中, 在 $t_0$ 时增加一个负现金流, 从而得到图 3-10e. 这个现金流大小规定为 $C_{t_0}^{usd}$. $C_{t_0}^{usd}$ 的大小此时还未知, 只知道它代表的是美元.

将图 3-10d 和图 3-10e*垂直相加*, 应该复制出我们从图 3-10a 开始时的现金流. 而此时, 情况却不是这样的, 因为 $C_{t_0}^{usd}$ 和 $C_{t_0}^{eur}$ 代表不同货币的现金流, 它们在 $t_0$ 时不能抵消. 但是, 这里有一种非常简单的解决方法. 通过考虑合成工具的第三部分, 我们可以将 $t_0$ 时 "多余" 的现金流抵消掉. 考虑图 3-10f, 其中在 $t_0$ 时将 $C_{t_0}^{usd}$ 和 $C_{t_0}^{eur}$ 进行交换. 在增加此成分之后, 图 3-10d、图 3-10e 和图 3-10f 中现金流垂直相加正好得到与图 3-10a 相同的现金流. 如果信用风险相同, 那么我们就成功地用一个合成工具复制出了该远期合约.

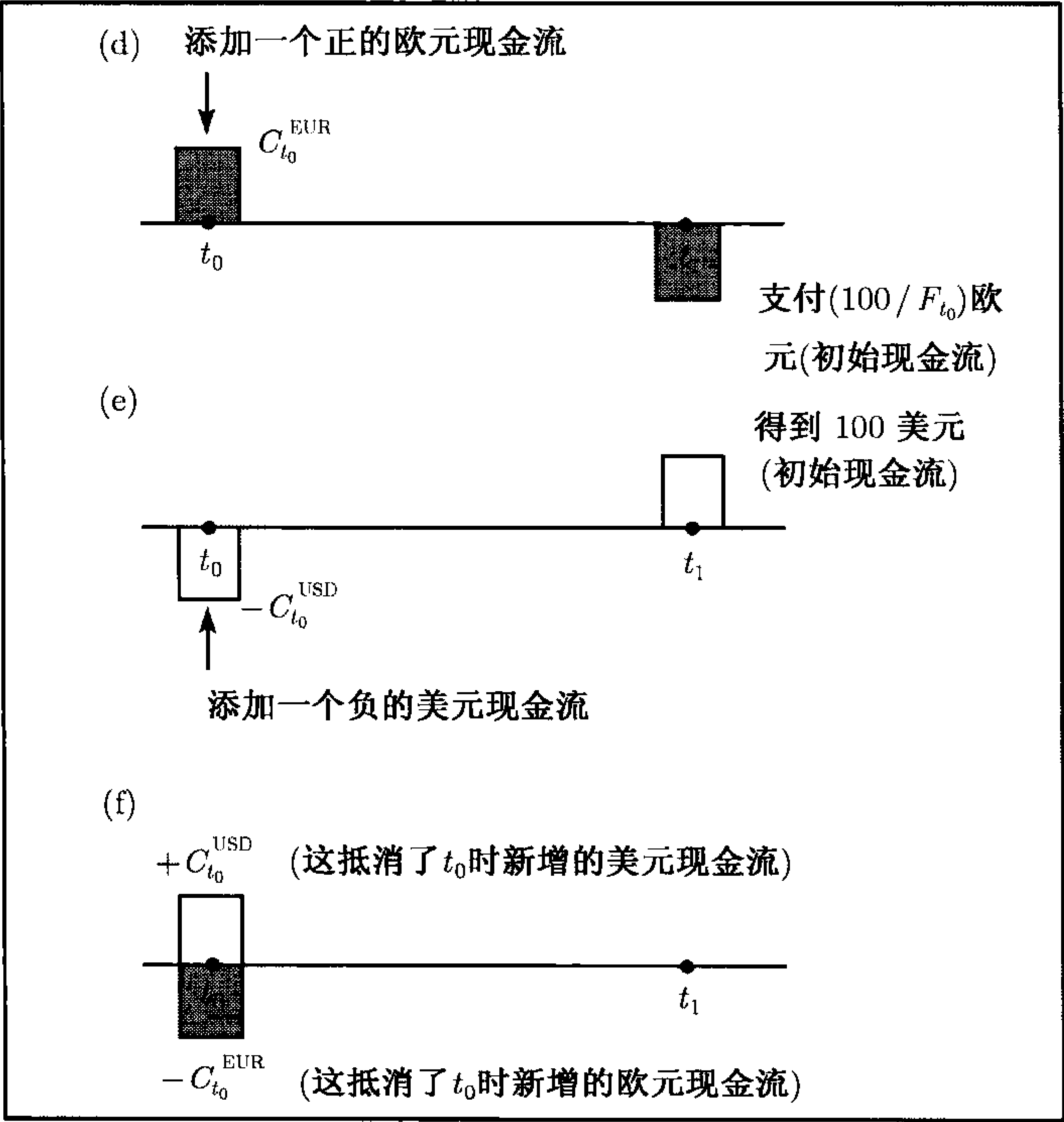



图 3-10 def

### 3.4.2 合成工具

然而, 我们还不清楚图 3-10d、图 3-10e 和图 3-10f 中合成工具的构成. 事实上,

① 我们可以将现金流添加在其他时间, 但是这会使得合成工具更加复杂, 缺少流动性, 一般也比较昂贵.

通过在这些图形中增加现金流, 我们可以恢复图 3-10a 的原始工具. 但是这些图形代表何种合约? 答案依赖于对图 3-10d、图 3-10e 和图 3-10f 所示合成工具的图形解释.

事实上, 这些现金流在实际中可以用不同方式加以解释. 我们考虑两种主要的解释, 一种是存款–贷款, 另一种是国库券.

1. 一种货币市场合成工具

第一种合成工具通过使用货币市场工具获得. 为此, 我们需要对货币市场工具进行简要的回顾. 下面列出了一些重要货币市场工具以及它们的报价、注册、清算及惯例. 该列表并不全面.

**例**

*存款/贷款. 期限小于一年. 以本国和欧洲货币单位命名. 本国存款当天结算, 欧洲货币存款在两个工作日内结算. 不涉及注册过程, 不可转让.*

*大额存单 (CD). 一般来说, 期限为一年以上. 大额存单支付息票, 有时以贴现形式出售. 其报价以收益率为基础, 存在本国货币存单和欧洲货币存单两种形式. 本国货币存单当天结算, 而欧洲货币存单在两个工作日内结算. 大额存单通常是不记名的而且可以转让.*

*国库券. 期限分为 13 周、26 周和 52 周. 在法国, 国库券期限可以为 4 周至 7 周; 在英国, 也有期限为 13 周的国库券. 在美国和英国国库券贴现出售. 在其他国家, 也有以收益率为基础报价的. 以本国货币发行的国库券是不记名的, 而且可以转让.*

*商业票据 (CP). 期限是 1~270 天. CP 是期限非常短的证券, 以贴现出售, 并且当天结算, 不记名, 可以转让.*

*欧洲商业票据. 期限为 2~365 天, 但大多是 30 天或 180 天的. 一般贴现出售, 以收益率为基础报价. 欧洲商业票据可以任何一种欧洲货币出售, 但一般是以欧洲美元的形式, 在 2 个工作日内结算, 可以转让.*

那么, 我们如何利用这些货币市场工具来解释图 3-10 所示的外汇远期合成工具呢?

一种货币市场解释如下. 图 3-10e 中的现金流表示在 $t_0$ 时支付 $C_{t_0}^{usd}$, 在未来时刻 $t_1$ 获得 100 美元. 显然, 银行同业存款产生的现金流同这种类型相符, 则 $C_{t_0}^{usd}$ 可以表示 100 美元在 $t_0$ 时的现值, 其中贴现因子可用欧洲存款利率获得.

$$C_{t_0}^{usd} = \frac{100}{1 + L_{t_0}^{usd}\left(\frac{t_1 - t_0}{360}\right)}. \tag{1}$$

注意我们利用 ACT/360 作为存款利率 $L_{t_0}^{usd}$ 的起点, 因为现金流是用欧洲美元表

示的. 另外, 我们也利用货币市场关于利率的惯例.[①] 在已知 $L_{t_0}^{usd}$ 观测值的条件下, 由以上公式, 我们可以通过计算得到 $C_{t_0}^{usd}$ 的值.

那么又如何解释图 3-10d 中的现金流呢? 显然, 这是银行间市场的同业贷款. 图中现金流表示在 $t_0$ 时获得 $C_{t_0}^{eur}$, 并且在未来 $t_1$ 时以欧元支付 $100/F_{t_0}$. 现金流值表示为

$$C_{t_0}^{eur} = \frac{100/F_{t_0}}{1 + L_{t_0}^{eur}\left(\frac{t_1 - t_0}{360}\right)}, \tag{2}$$

其中, $L_{t_0}^{eur}$ 是欧元利率.

最后, 我们需要解释图 3-10f. 图中现金流表示在 $t_0$ 时, 用 $C_{t_0}^{usd}$ 兑换 $C_{t_0}^{eur}$. 因此这里实际上是以汇率 $e_{t_0}$ 即期购买美元.

现在可以给出此合成工具的完全描述了:

- 银行同业贷款欧元 (图 3-10d);
- 利用这些欧元资金, 购买即期美元 (图 3-10f);
- 将购买的美元存入同业银行市场 (图 3-10e).

此组合能精确地复制出货币远期, 因为通过在图 3-10d、图 3-10e 和图 3-10f 中添加现金流, 可以准确地复原图 3-10a 所示的货币远期现金流.

2. 国库券合成

我们同样可以利用国库券市场来构造一份合成货币远期. 事实上, 令 $B(t_0, t_1)^{usd}$ 表示在 $t_1$ 时支付 100 美元的无违约风险贴现债券在 $t_0$ 时的价格; 类似地, 令 $B(t_0, t_1)^{eur}$ 表示 $t_1$ 时支付 100 欧元的另一无违约风险的贴现债券在 $t_0$ 时的价格. 那么, 我们可以将图 3-10d、图 3-10e 和图 3-10f 所示的现金流重新解释成下面的交易:[②]

- 图 3-10d 是 $B(t_0, t_1)^{eur}$ 的空头头寸, 其中借入 $1/F_{t_0}$ 单位证券然后以市价卖出, 得到 $B(t_0, t_1)^{eur}/F_{t_0}$ 欧元;
- 在图 3-10f 中, 在当前汇率下, 将欧元兑换成美元;
- 在图 3-10e 中, 用这些美元购买 1 单位美元命名的债券 $B(t_0, t_1)^{usd}$.

在 $t_1$ 时, 这些操作等价于用 $100/F_{t_0}$ 欧元购买 100 美元, 假定这些债券到期时以面值支付.

因此, 资产组合

$$\{卖出 1/F_{t_0} 单位的 B(t_0, t_1)^{eur}, 买入 B(t_0, t_1)^{usd}\}, \tag{3}$$

和相应的美元即期买卖是远期货币合约的另一个合成品.

① 如果是国内存款或欧洲英镑存款, 天数计算的基数是 365 天. 这是金融工程惯例中需要注意的.
② 若忽略时间因素, 不考虑这种流动贴现债券在所期望的到期日是否存在.

3. 合成的选择

如果一种工具的合成可以由许多方法构造, 那么金融工程师应当选择哪种合成方法进行对冲、风险管理和定价呢? 对此我们进行简单的说明.

一般来说, 市场参加者应当按照以下几条原则选择最希望的合成工具: (1) 成本最低; (2) 流动性最好, 其他条件相同情况下, 流动性最好的通常也是成本最低的; (3) 监管最方便的; (4) 从资产负债表角度看是最合适的. 当然, 最后的决策必须进行全面权衡, 并且要考虑市场参加者的特殊需要.

## 3.5 合成与定价

合成资产的主要用途是定价. 在其他条件相同的情况下, 复制资产组合要与原始工具的价格相同. 所以, 通过加总构成资产的价值, 我们可以得出形成复制资产组合的成本. 这样, 一旦市场参与者加上一个适当的溢价, 我们就可以得到原始工具的价格.

在我们的讨论中, 定价就是获得货币远期的未知量, 即为前面提到的远期汇率 $F_{t_0}$. 我们首先考虑一组定价方程, 由它们可以导出闭形式的定价公式.

先考虑图 3-10f, 它表示 $t_0$ 时 $C_{t_0}^{usd}$ 和 $C_{t_0}^{eur}$ 的市场价值应该相等. 否则, 合约一方将不愿意进行此交易. 这意味着

$$C_{t_0}^{usd} = C_{t_0}^{eur} e_{t_0}, \tag{4}$$

其中 $e_{t_0}$ 是即期欧元/美元汇率. 代入方程 (1) 和 (2) 得

$$F_{t_0}\left[\frac{100}{1+L_{t_0}^{usd}\left(\frac{t_1-t_0}{360}\right)}\right] = \left[\frac{100}{1+L_{t_0}^{eur}\left(\frac{t_1-t_0}{360}\right)}\right] e_{t_0}. \tag{5}$$

解出远期汇率 $F_{t_0}$ 为

$$F_{t_0} = e_{t_0}\left[\frac{1+L_{t_0}^{usd}\left(\frac{t_1-t_0}{360}\right)}{1+L_{t_0}^{eur}\left(\frac{t_1-t_0}{360}\right)}\right]. \tag{6}$$

这就是著名的抛补利率平价方程. 式 (6) 将 $F_{t_0}$ 表示为 $t_0$ 时可观察变量的函数. 因此, 利用市场报价可以在 $t_0$ 时计算出 $F_{t_0}$ 的数值解, 而不需要对它作任何预测[①].

使用国库券得到的第二个合成工具给出了另一种等价的定价方程. 既然都是在当前汇率 $e_t$ 下估计价值, 两种债券头寸的价值应该相等, 即为

$$F_{t_0} B(t_0, t_1)^{usd} = e_{t_0} B(t_0, t_1)^{eur}. \tag{7}$$

① 事实上, 引入预测模型确定 $F_{t_0}$, 会导致错误的市场价格并可能产生套利机会.

所以, 国库券市场的 $F_{t_0}$ 价格为

$$F_{t_0} = e_{t_0} \frac{B(t_0, t_1)^{eur}}{B(t_0, t_1)^{usd}}. \tag{8}$$

如果两种货币的债券市场与相应存款和贷款市场具有相同的流动性, 那么由这种合成获得的 $F_{t_0}$ 与由存款利率获得的 $F_{t_0}$ 相近[①].

## 3.6 合约方程

一旦一种金融工具用其他流动资产的组合复制出来了, 我们就可以写出一个*合约方程*, 并且由此产生一系列全新的合成工具. 本节将导出该合约方程. 下一节则将讨论合约方程的几个应用. 本节提出了构造静态复制资产组合的基本方法, 因此它对后续章节具有中心作用.

我们已经讨论了如何构造一个货币远期的合成品. 基本思想是: 一个由下列工具构成的资产组合将在相同时期产生与货币远期有相同信用风险的现金流:

{*欧元贷款, 美元存款, 用欧元即期购买美元*}

这意味着在下面 (非真实的) 的假设下:

(1) 无交易费用;

(2) 无询价差;

(3) 无信用风险.

我们可以将原始工具与有关合成工具间的等价关系写成一个合约方程, 该方程在实际中很容易生成. 事实上, 通过货币市场获得的合成工具涉及的三种合约交易, 可以用下面的 "方程" 描述:

| 外汇远期<br>用欧元购买美元 | = | 贷款<br>在$t_0$时借入$t_1$时到期的欧元 | + | 即期操作<br>用欧元买美元 | + | 存款<br>在$t_0$时存入$t_1$时到期的美元 | (9) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

这种操作可以应用到任意两种货币间的外汇远期.

方程 (9) 即为一个合约方程. 方程左边合约的现金流与右边合约产生的总现金流相同. 但并不意味着两边的货币价值总是相同的. 实际上, 右边一个或多个合约在某些特殊经济体中可能不存在或者市场可能没有机会为这些合约定价.

本质上, 该方程表示: 等式两边有关的风险和现金流属性是相同的. 如果无信用风险, 无交易费用, 并且在所有工具中的市场都具有流动性, 那么我们就可以期待套利使得合约方程两边的价格相等.

---

① 事实上, 由于合成的流动性和信用风险完全不同, 两种计算所得的 $F_{t_0}$ 存在差异.

## 3.7 应　用

前面导出的合约方程以及导致此方程的现金流起初可能被认为是纯理论的构造, 其实际应用非常有限. 事实并非如此. 这里我们讨论 4 个例子, 它们将说明如何利用合约方程解决市场参与者面临的实际且普遍的问题.

### 3.7.1 应用 1：留置税问题

首先讨论利息收入的留置税问题. 我们的目的不是注解税收方面的问题, 而是想用这个例子说明合成工具应用的重要思想.

基本想法很容易说清楚. 如果政府要对某种工具 (比如债券) 的所得征收留置税, 而且如果该种工具可以用合成方法加以复制, 那么合成工具就不存在留置税. 如果人们知道如何复制它, 那么合成工具的投资者将在本质上相同的风险下获得高得多的净收益.

**例**

*假设一个经济体要求对政府债券利息收入征收留置税, 设留置税率为 20%. 这种债券无违约风险并且无息票, 到期日为 $T$, 其 $t$ 时的价格记为 $B(t,T)$. 这意味着如果*

$$B(t,T) = 92, \tag{10}$$

*则投资者在 $t$ 时支付 92 美元, 获得此面值为 100 美元的债券. 因债券到期日为 $T$, 所以*

$$B(T,T) = 100. \tag{11}$$

*显然, 债券持有者可获得的利息为*

$$100 - B(t,T) = 8. \tag{12}$$

*但是由于留置税, 实际获得的利息仅为 6.4:*

$$\text{实际获得的利息} = 8 - 0.2(8) = 6.4. \tag{13}$$

*于是债券持有人的实际收入远比自己投资赚到的少, 特别是对于拥有高资产值的投资者要少很多. 如果投资 5 000 万美元, 那么投资者将支付 87 万美元的留置税. 问题是我们的金融工程能否对此提供帮助.*

如果市场专业人员可以构造一个合成债券, 它与原始债券相比, 除了留置税外, 具有相同的现金流 (和信用风险) 特征, 那么问题就解决了, 因为合成工具可以通过构造使得它不必缴纳留置税.[①]

① 在本章中, 我们假设不存在信用风险. 实际在构造合成工具时, 需要考虑信用风险. 对于信用违约互换 (CDS), 合约方程中的这种复杂问题具有直接的解.

我们可以立即利用此前提出的任意贴现债券的合成思想和公式 (9) 中的合约方程. 下面使用任意两种货币 $Z$ 和 $X$ 来讨论此问题. 假设两种货币的国库券在各自相应的市场上可以自由交易. 关于国库券的合约方程可写成下面形式

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{外汇远期}\\ \text{卖出 } Z \text{ 购买 } X\end{array}} = \boxed{\text{卖出 } Z \text{ 国库券}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{即期操作}\\ \text{用 } Z \text{ 购买货币 } X\end{array}} + \boxed{\text{购买 } X \text{ 国库券}} \tag{14}$$

将上式进行代数运算, 我们把 $Z$ 国库券移到等式左边, 并且将全部其他工具移到等式右边, 得

$$-\boxed{\text{卖出 } Z \text{ 国库券}} = -\boxed{\begin{array}{l}\text{外汇远期}\\ \text{卖出 } Z \text{ 购买 } X\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{即期操作}\\ \text{用 } Z \text{ 购买货币 } X\end{array}} + \boxed{\text{购买 } X \text{ 国库券}} \tag{15}$$

现在将负号变成正号, 这意味着我们进行反向交易, 从而得到 $Z$ 国库券的合成

$$\boxed{\text{买入 } Z \text{ 国库券}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{外汇远期}\\ \text{买入 } Z \text{ 卖出 } X\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{即期操作}\\ \text{用 } Z \text{ 购买货币 } X\end{array}} + \boxed{\text{购买 } X \text{ 国库券}} \tag{16}$$

因此, 为了构造 $Z$ 贴现债券的合成, 我们首先需要利用一个无留置税经济体中的货币或国库券. 用记号 $X$ 表示该国的货币. 以汇率 $e_{t_0}$ 在 (16) 中用 $Z$ 交换 $X$. 再用所得 $X$ 购买 $X$ 国库券. 同时我们在 $t_1$ 时远期购买 $Z$ 国库券. 图 3-11 是这些操作的几何解释. 我们可以看到, 通过增加等式右边操作所产生的现金流, 我们同样可以得到 $Z$ 国库券.

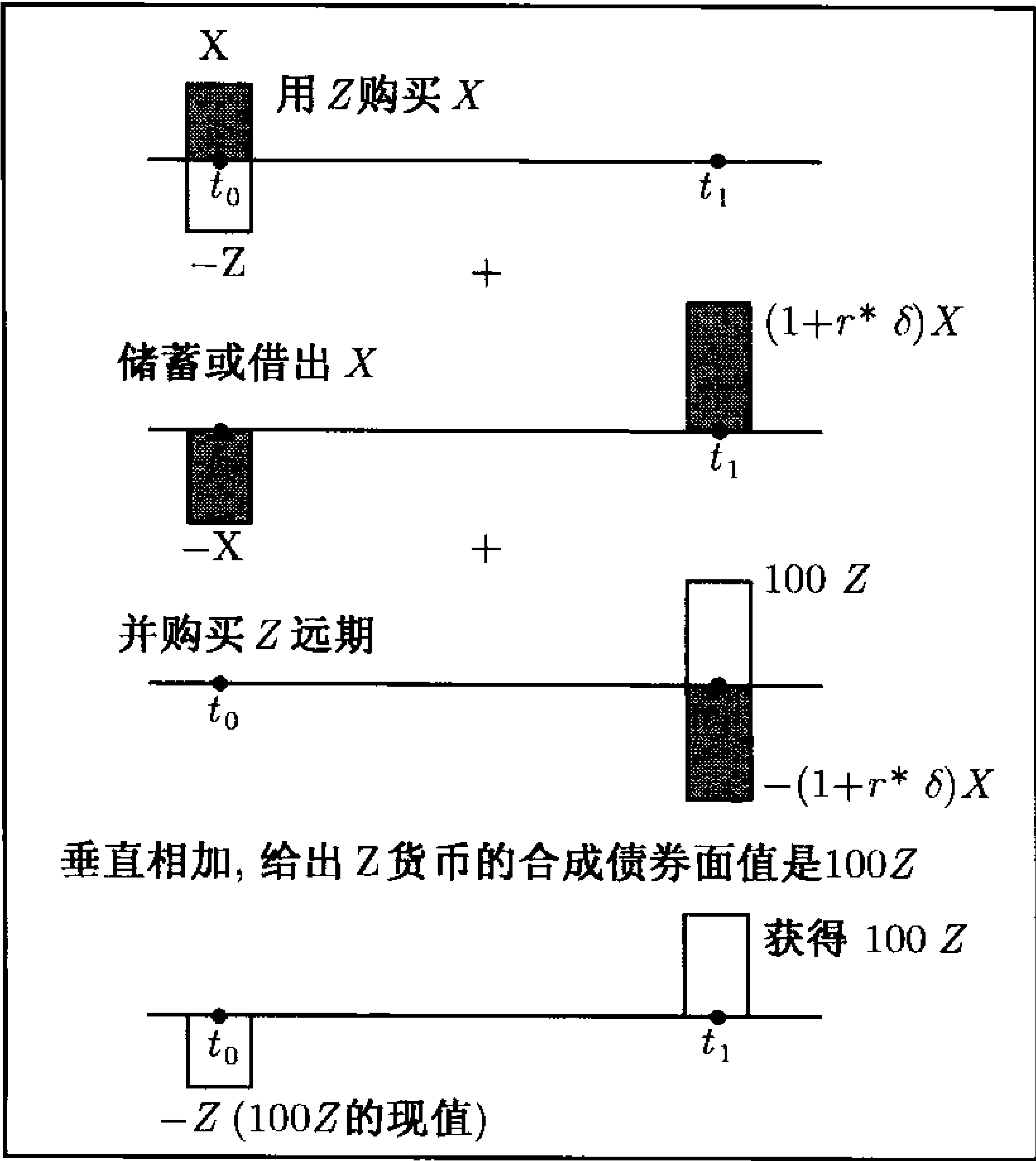



图　3-11

这些操作的简单思想是：投资者对 $Z$ 国库券要缴纳留置税，因此他们通过其他国家不交留置税的债券市场，购买 $Z$ 远期来确保 $t_1$ 时 $Z$ 国库券的回收. 概括地说，这是一种策略，它利用他国货币作为载体来持有资金，确保头寸进出在 $t_0$ 时是确定的.

### 3.7.2 应用 2：构造合成贷款

合约方程第二个应用在第 1 章已经简单介绍过. 下面我们考虑 1997 年的市场事件.

**例**

随着北海道 Takushoku 银行的倒闭，上周出现了"日本溢价"，即日本银行在欧洲美元市场融资的附加成本突然增加. 在美元存款市场，据说日本银行现在对其美元存款相对要多支付大约 40 个基点，而一周前还不到 30 个基点.

面对较高的美元融资成本，日本银行试图寻找一种美元资金的替代资源. 借入日元，并且在即期市场用日元卖出美元，在远期市场用美元购买日元. 由此导致美元/日元的远期汇率突然增长. (IFR,1997 年 11 月 22 日)

无市场经验的读者也许认为这种操作难以理解.[1] 但运用公式 (9) 的合约方程可以解释上面例子中日本银行的策略. 事实上，日本银行的这种策略就是构造合成美元贷款，因为美元贷款不是太贵就是由于信用等级不够而难以获得. 这里专家提供了使用合成工具的一个极好例子.

下面我们详细讨论这个案例. 再次从公式 (9) 的合约方程开始，但这里考虑美元/日元汇率：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{外汇远期}\\ \text{在}t_1\text{时卖出美元购}\\ \text{买日元}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{贷款}\\ \text{借入}t_1\text{期限美元}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{即期操作}\\ \text{在}t_0\text{时支付美元购}\\ \text{买日元}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{存款}\\ \text{存入}t_1\text{期限日元}\end{array}} \tag{17}$$

对上式进行代数运算. 注意到式中右边存在贷款合约. 这是一个真正的美元贷款，通过整理等式右边合约，我们可以将它单独放在左边. 那么，该贷款可以用一个复制资产组合来表示.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{贷款}\\ \text{借入}t_1\text{时到期的美}\\ \text{元}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{外汇远期}\\ \text{在}t_1\text{时卖出美元购}\\ \text{买日元}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{l}\text{即期操作}\\ \text{在}t_0\text{时支付美元购}\\ \text{买日元}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{l}\text{存款}\\ \text{借入}t_1\text{时到期的日}\\ \text{元}\end{array}} \tag{18}$$

因为我们把存款和即期操作移至等式另一边，所以符号发生了变化. 在这里，带减号的存款意味着逆转现金流图，故为贷款. 带减号即期操作即是交换两种货币.

---

[1] 一个基点表示 1%的 1%，即 1%等于 100 个基点.

因此, 合约方程最后写为

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 美元贷款 | = | 外汇远期<br>在$t_1$时卖出美元购买日元 | + | 即期操作<br>在$t_0$时支付日元购买美元 | + | 贷款<br>借入$t_1$时到期的日元 | | (19) |

这个合约方程可以用来解释此前日本银行的操作. 根据此报价, 日本银行在银行间 (欧洲) 市场贷款欧洲美元受阻, 转而在本国市场贷款日元再用日元购买 (现金) 美元. 但同时, 他们卖出美元对日元的远期来对冲未来货币敞口. 简单地说, 日本银行构造了合约方程右边所隐含的合成品. 图 3-12 显示了这些操作的几何原理. 这里我们再次看到如何利用另一种货币作为中介工具来持有资金.

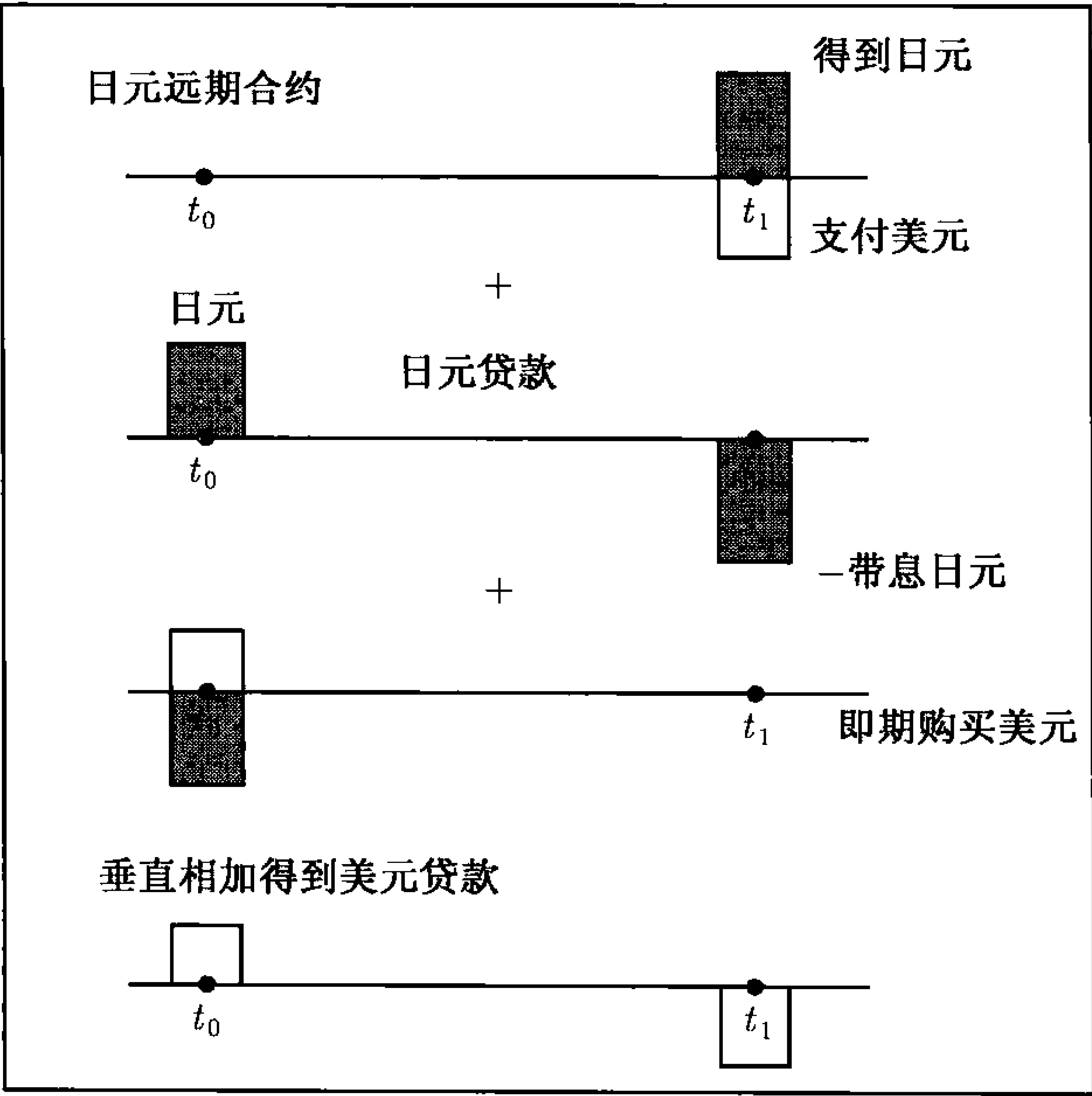



图 3-12

### 3.7.3 应用 3: 资本管制

一些国家限制资本的流动, 这就是所谓的*资本管制*. 我们假设用本国货币 $X$ 即期购买美元在一些国家是被禁止的.

金融工程师能够通过合约的相关性构造一个*合成的即期操作*. 这种即期操作是公式 (9) 中所示契约方程的一个部分. 重新整理公式 (9), 可以得到

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 用$X$即期购买美元 | = | 外汇远期<br>在$t_1$时卖出$X$购买美元 | + | 美元贷款<br>在$t_0$时借入美元 | + | 在$t_0$时存入$X$,$t_1$时到期 | | (20) |

上式右边的资产组合与存在资本管制的即期购买美元相同. 这种操作被称作**平行贷款**. 平行贷款广泛应用在商业中, 特别是广泛应用于巴西和其他一些新兴市场.[①]图 3-13 表示这种操作的几何解释.

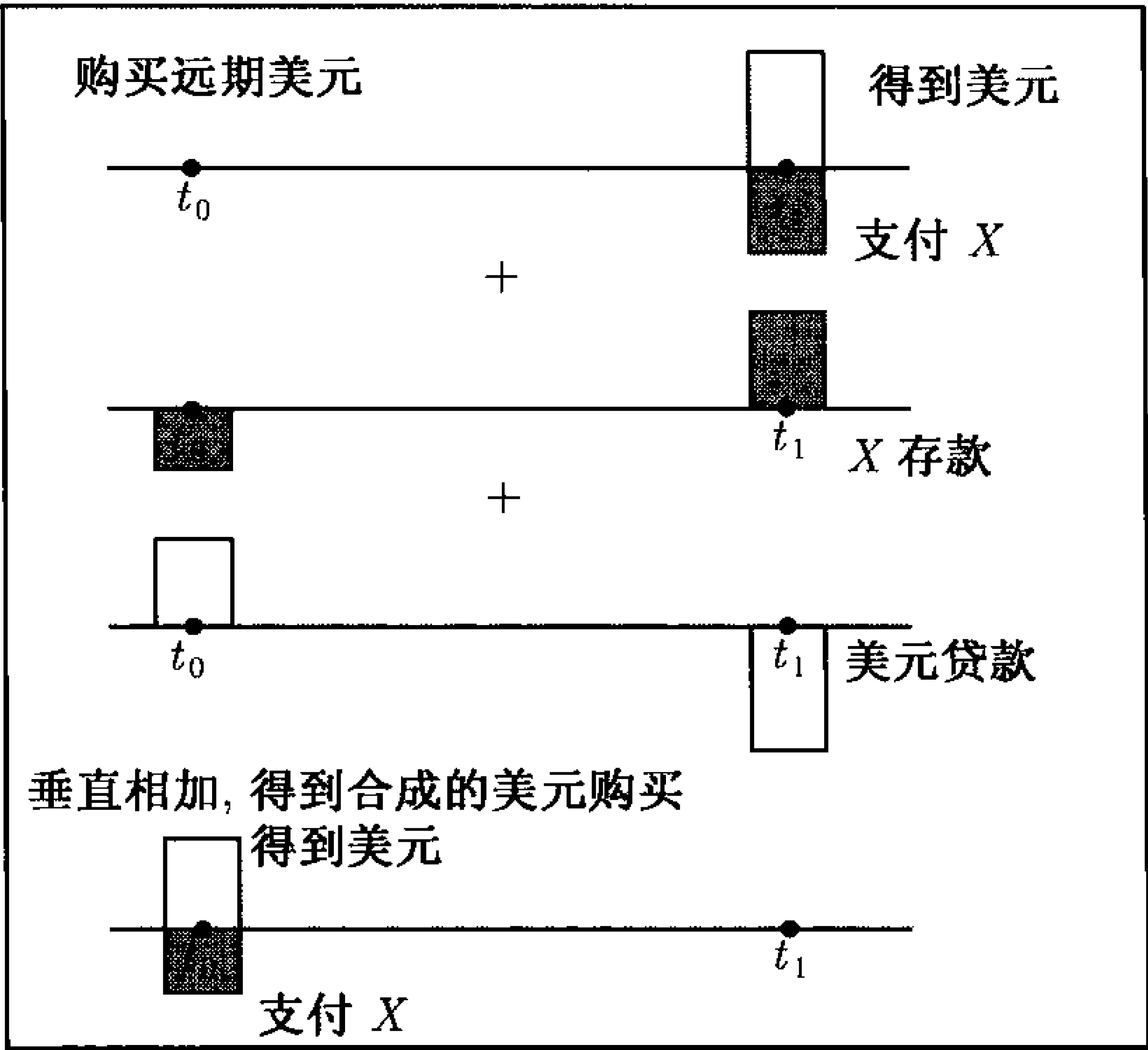



图 3-13

### 3.7.4 应用 4: "交叉" 货币

我们最后的这个例子没有直接利用合约方程 (9). 但它是合约方程理论的有趣应用, 此处考虑它也很合适.

在外汇市场上交易的 "交叉汇率" 是最简单的合成之一. 交叉汇率是不包含美元的货币价格. 主要的 "交叉" 是欧元/日元、欧元/瑞士法郎和英镑/欧元. 其他 "交叉" 相对较少. 举例来说, 如果一个交易者想要在台湾购买瑞士法郎, 那么他将执行两种交易而不是单一的即期交易. 他将用台币购买美元, 并且卖出美元购买瑞士法郎. 最后结果是用台币购买瑞士法郎. 为什么交易者执行两种交易而不是在台湾直接购买瑞士法郎呢? 这是因为交易费用较低, 另外, 美元/瑞士法郎及美元/台币汇率的流动性较高, 从而使得这样操作相对比较便宜.

我们可以将这些操作归结为一个合约方程:

| 用台币即期购买瑞士法郎 | = | 用台币购买美元 | + | 卖出美元购买瑞士法郎 | (21) |
|---|---|---|---|---|---|

很容易看出为什么合约方程成立. 如图 3-14 所示, 前面两个图中现金流的叠加使得美元因素相抵消. 由此, 我们成功地构造了用台币即期购买瑞士法郎的合成工具.

① 读者可能提出质疑: 如果在一个经济体中不可能购买外币, 那么如何贷款外币呢? 答案很简单, 可以通过某个外国同行完成美元贷款.

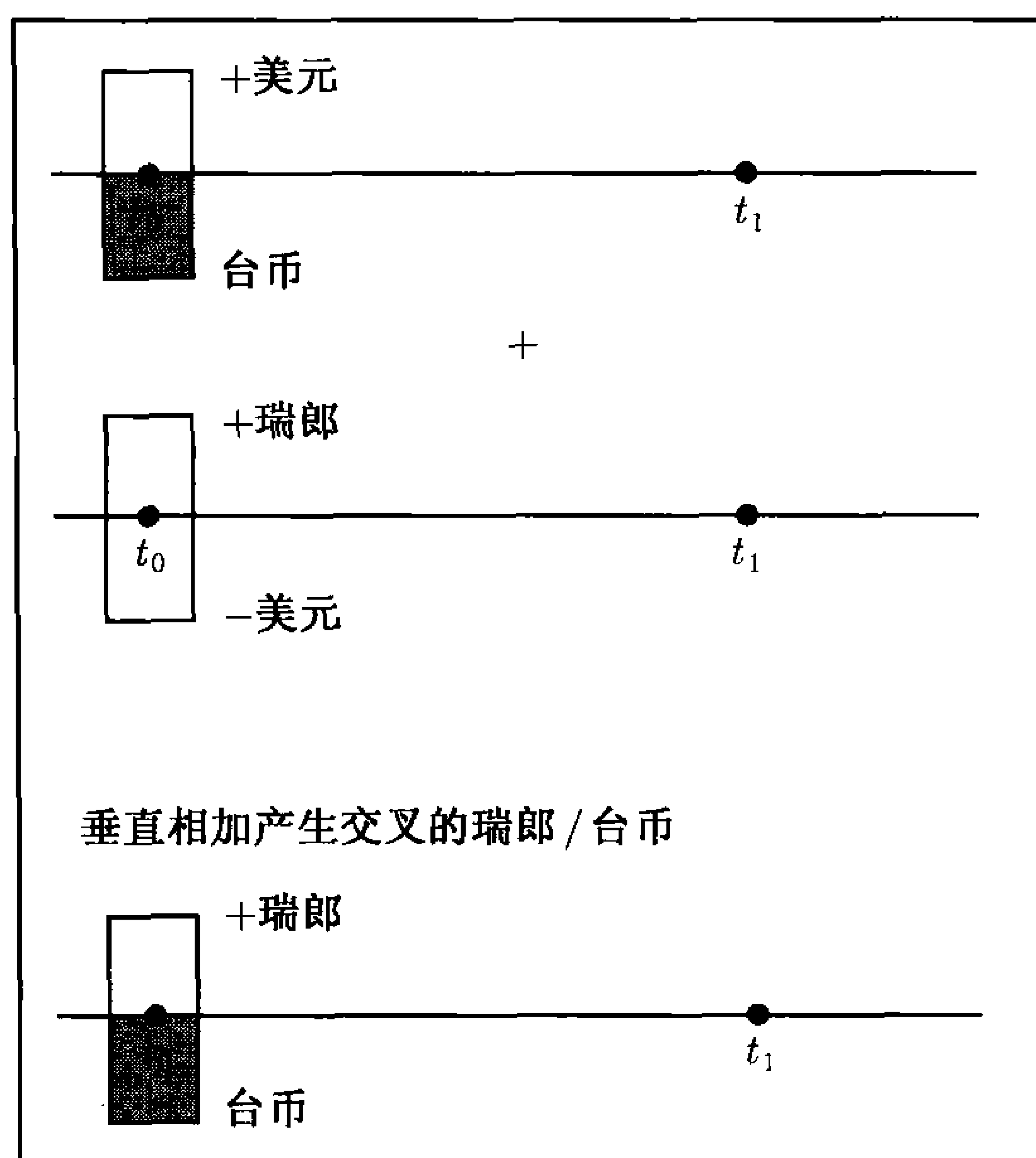



图 3-14

这是一个有趣的例子. 由于交易费用、流动性和其他因素 (例如: 法律和组织结构), 合成工具与实际合约的价格差别并不是总能显露出来. 同样有趣的是合成工具一般都比较便宜. 所以, 在买卖一个工具之前, 交易者应该考察一下是否存在具有同样功能但更便宜的合成工具.

## 3.8 "更好" 的合成工具

在前几节中, 我们构造了远期外汇 (以下称为 FX) 合约的两个合成品. 问题是: 是否存在构造最优合成品的方法? 或者更实际地, 交易者在购买了一个便宜的合成品, 并加上利润后卖给某个客户, 其买卖价差是否最小?

**FX 互换**

我们可以利用所谓的 FX互换和支付单一买卖价差的方法来替代支付两个单独的买卖价差. 就像公式 (9) 中的合约方程一样. 图 3-15 表示了一个 FX 互换的结构.

根据图形可以看出, 我们至少有两种方式解释 FX 互换. 一个 FX 互换是由写在同一张 "交易单" 上的两笔交易构成: 一笔是某种货币的市场存款, 另一笔为另一种货币的市场贷款. 另一种解释是, 可将一个互换看作是两个交易对手分别即期购买和远期卖出两种货币, 两个交易仍然写在同一张交易单上.

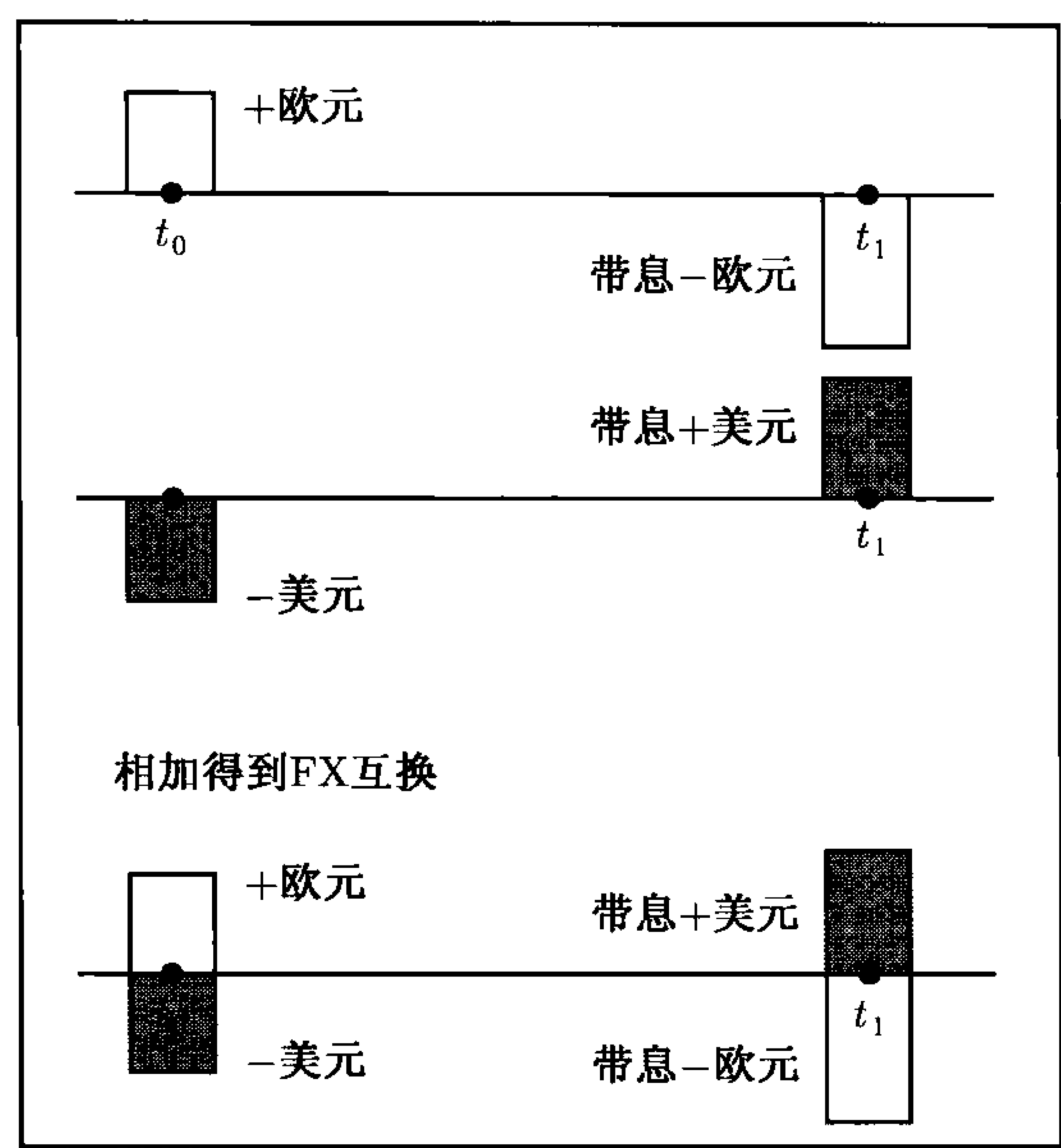



图 3-15

通过与一个即期操作相结合, FX 互换很容易复制远期货币合约, 如图 3-16 所示. 因为这是存款与贷款的互换, 所以利率的变化在 FX 互换中起到了重要的作用. 毕竟, 互换的一方将贡献出高利率的货币, 因此这一方要求对方对其损失予以补偿.

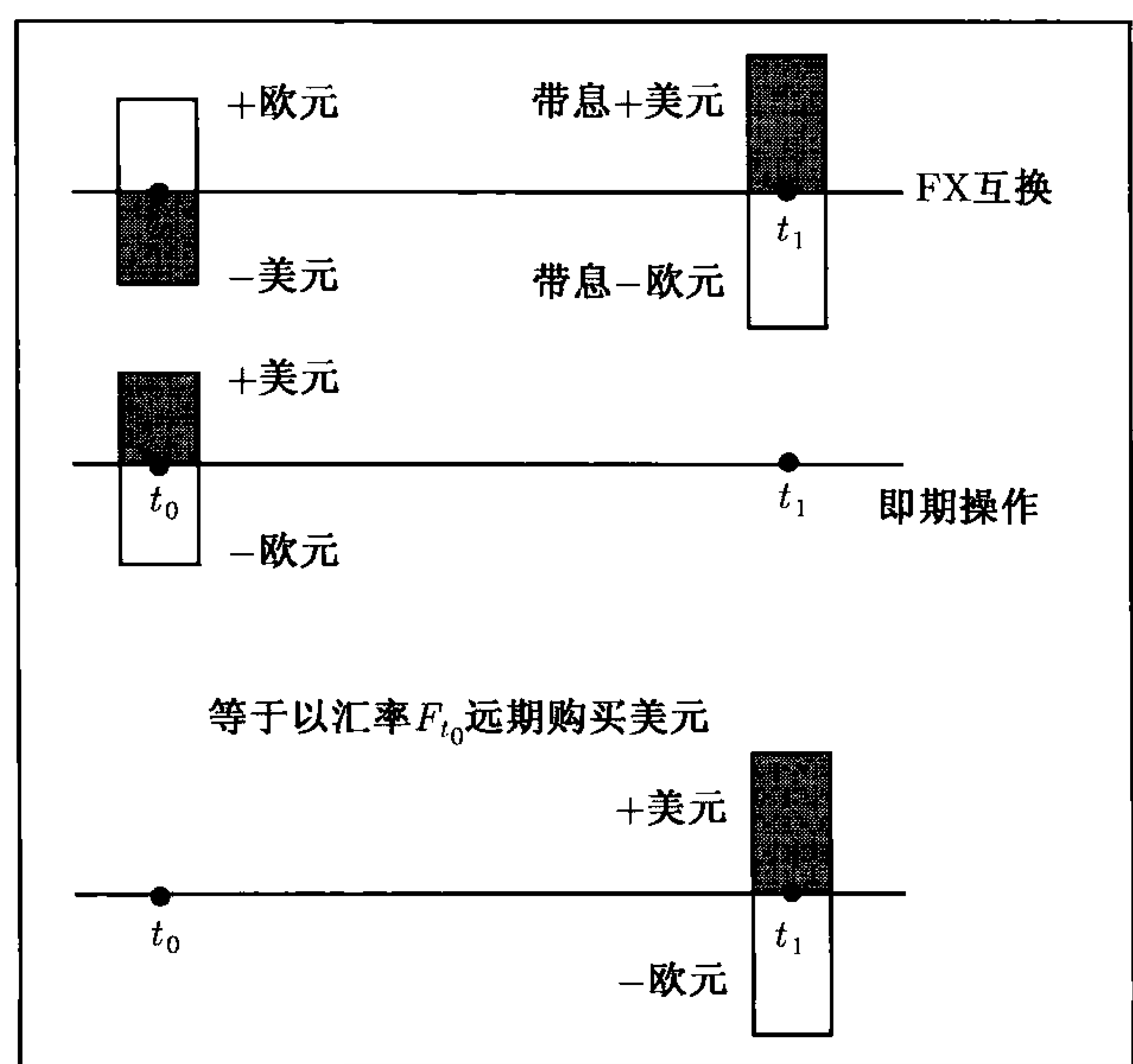



图 3-16

这种补偿将在 $t_1$ 时以相应的高支付回报给他. 和在 $t_0$ 时不同, 在 $t_1$ 时双方交换的金额必定不相等.

1. 优势

为什么与远期直接汇率相比, 银行偏好 FX 互换呢? 从金融工程的角度看, 这是非常重要的一点. 它说明了溢价产品的优势.

FX 互换与之前提到的合成品相比具有几个优势.

第一, FX 互换是银行同业工具并且其客户通常不能使用. 银行之间每天都有业务往来, 所以合约执行期间, 双方承担的风险较小. 在流动市场, 与由存贷款或国库券构造的合成工具相比, FX 互换构造的合成品的潜在买卖价差较小.

第二是流动性. 一个市场参与者如何在不改变价格的情况下借入和贷出两种货币呢? FX 互换可以很好地解决此问题. 使用 FX 互换, 交易者无需买卖存款, 只需要相互交换它们.

FX 互换的最后一个优点在于它们对资产负债表的影响, 或者说它对资产负债表没有影响. 由图 3-16 得出的合成工具导致资产和负债的增加. 借入新的资金并且将其贷出, 这样的交易可能导致新的信用风险, 因而要求新的资本金. FX 互换不在资产负债表项目之列, 因此图 3-16 所示的合成工具对资产负债表的影响也较小.

2. 报价惯例

银行偏好用*互换*或者*远期点*进行报价, 而不喜欢使用远期直接汇率. 相关术语和惯例的举例说明如下.

**例**

假设欧元/美元的远期直接汇率报价如下:

| 买价 | 卖价 |
|---|---|
| 1.0210 | 1.0220 |

即期汇率报价如下:

| 买价 | 卖价 |
|---|---|
| 1.0202 | 1.0205 |

与远期直接汇率报价相比, 交易者更愿意通过远期直接汇率减去即期汇率得到的远期点来报价:

| 买价 | 卖价 |
|---|---|
| 8 | 15 |

事实上, 远期点可以直接由公式 (6) 或公式 (8) 得到.

市场惯例有时也产生与交易活动相关的有用信息, 远期 FX 的报价正是这样. 实际上, 远期点报价比远期直接汇率报价具有更重要的优点: 揭示了市场活动的细小方面. 远期点的报价本质上与即期汇率变动无关, 它仅依赖于利率的变化. 另一方面, 远期直接汇率报价依赖于即期汇率的变动. 所以, 通过远期点报价, 市场专业人士可以将利率变动和即期汇率变化带来的风险相互分离. 汇率的风险由即期交易者承担. 远期 FX 只交易与利率差相关的风险.

为了更好地理解这一点, 我们举个例子. 假设 $F_{t_0}$ 和 $e_{t_0}$ 分别是 $t_1$ 时的远期利率和 $t_0$ 时的即期汇率, 如公式 (6) 所示. 利用公式 (6), 在不计买卖价差的条件下, 我们近似得出

$$F_{t_0} - e_{t_0} \cong (r^d_{t_0} - r^f_{t_0}) \left( \frac{t_1 - t_0}{360} \right) e_{t_0} \tag{22}$$

其中 $r^d_{t_0}$ 和 $r^f_{t_0}$ 分别表示本国和外国货币的利率.[①] 将公式 (22) 求偏导数得

$$\begin{aligned} \partial(F_{t_0} - e_{t_0}) &\cong (r^d_{t_0} - r^f_{t_0}) \left( \frac{t_1 - t_0}{360} \right) \partial e_{t_0} \\ &\cong 0. \end{aligned} \tag{23}$$

邮
电

如果即期汇率 $e_{t_0}$ 的日变化很小, 那么公式 (23) 的右边近似为 0. 换句话说, 如果利率保持不变, 而且汇率报价保留 4 位小数的话, 远期互换报价将不会因汇率的日变化而改变. 下面例子将解释这意味着什么.

**例**

假设相关利率如下

$$r^d_{t_0} = 0.034\,40, \tag{24}$$

$$r^f_{t_0} = 0.021\,10, \tag{25}$$

这里本国货币是欧元, 外国货币是美元. 如果欧元/美元汇率日波动率为 0.01%, 这是个相当显著的变动, 那么对 3 月期 FX 互换在远期点上有如下变化:

$$\begin{aligned} \partial(F_{t_0} - e_{t_0}) &= 0.013\,30 \left( \frac{90}{360} \right) 0.010\,0 \\ &= 0.000\,033\,25, \end{aligned} \tag{26}$$

如果市场报价只取 4 位小数, 则远期点的变化为零.

因此, 远期点只依赖于利率的变化. 这一点分离了汇率和利率风险并且简化了交易者的工作. 这也说明远期 FX 合约好像“隐藏”在利率合约中.

① 这里假设天数计算的基数为 360 天. 如果其中一种货币的利率计算用 365 天, 那就需要作相应调整.

## 3.9 期 货

到目前为止, 我们只考虑货币的远期合约. 这些都是根据客户的需要设计并经过双方协商的柜台交易合约. 这种合约容易定价而且几乎无购买成本.

期货与远期合约在很多方面是不相同的. 其中有些差别微不足道, 而有些则非常重要. 从而出现对具有相同特点的同类标的资产, 它们的远期和期货的价格完全不相同的情况. 它们的大多数差别来自于期货合约的设计. 期货合约需要具有同质性以增加其流动性. 期货的终止和支付方式都要清楚地指定, 但仍要保留一些选择给参与者. 远期合约是由两个特定的交易方缔结的, 他们可以说明确切的支付和终止条件. 而期货合约却保留一些调整空间直至最后, 因此这些 "选择权" 可能具有市场价值.

此外, 期货合约总是实行盯市, 而对远期合约这又是一种选择. 盯市可能改变隐含的现金流, 从而导致一定程度的凸性.

为了扩展本节对期货和远期的讨论, 我们考虑那些借助期货合约在有组织的交易所进行交易的商品. 以 $S_t$ 表示标的商品的即期价格, $f_t$ 为期货价格, 它们均为交易所报价.

### 3.9.1 期货合约的参数

为了回顾期货合约设计中的主要参数, 我们将考虑两个合约. 问题的关键是, 涉及一项交易的大多数事项应该首先确定好, 从而订立一个同质的、流动好的合约. 对于像大豆这样相对标准化的商品, 做到这一点是相对简单和直接的.

**例** CBOT 大豆期货

(1) 合约数量: 5000 蒲式耳.

(2) 交割等级: 2 号黄色以面值交割, 1 号黄色以超过合约价格每蒲式耳 6 美分交割, 3 号黄色以低于合约价格每蒲式耳 6 美分交割.

注意: 当一个交易者同意交割时, 他将获得某种特定类型的大豆. 事实上, 该交易者还可能在更好的条件下从别人那里获得同样数量的货物. 因此, 大多数期货不是以交割来结束合约, 而是在合约到期前的某个时刻进行一个反方向的交易来冲销原来的头寸.

(3) 波动幅度: 0.25 美分/蒲式耳 (12.50 美元/合约).

(4) 报价: 美分和 0.25 美分/蒲式耳.

(5) 合约月份: 9 月, 11 月, 1 月, 3 月, 5 月, 7 月和 8 月. (显然, 如果期货交易的目的是交割, 那么具有更灵活交割期的远期合约会更方便.)

(6) 最后交易日: 比合约月份早 15 个日历天的营业日.

(7) 最后交割日: 交割月份最后交易日的第二个营业日.

(8) 交易时间: 公开喊价——上午 9: 30 到下午 1: 15, 芝加哥时间, 周一到周五; 电子叫价——上午 8: 30 到下午 6: 00, 芝加哥时间, 周日到周五. 到期合约的交易在最后交易日中午结束.

(9) 单日价格限制: 前一交易日收盘价之上或之下 50 美分/蒲式耳 (2500 美元/合约). 现货月份无限制 (在现货月份开始之前的两个工作日内限制将会提高).

第二个例子是金融期货. 利率期货是所有市场中最具有流动性的工具之一. 它们也是同质合约, 这将在第 4 章中讨论.

**例** LIFFE 3 个月欧元 Libor 利率期货

(1) 交易单位: 1 000 000 欧元.

(2) 交割月份: 3 月, 6 月, 9 月和 12 月. 2003 年 6 月是最后一个可交易合约月份.

(3) 报价: 100− 利率. (注意, 报价保留 3 位小数, 这就是说, 英国银行家协会 Libor 保留 3 位小数, 并且可以用于确定合约的最后价值. )

(4) 最小的价格变动: (波动幅度和价值)0.005(12.50).

(5) 最后交易日: 交割月份的第三个周三的前两个营业日.

(6) 交割日: 最后交易日之后的第一个营业日.

(7) 交易时间: 07: 00 到 18: 00.

这种欧洲货币期货合约将在第 4 章中介绍, 并且今后会多次提到. 特别地, 没有在上述参数表中列出的合约中的某些特性具有有趣的金融工程意义. 欧洲货币期货有一个报价惯例, 它隐含了远期利率与期货价格的线性关系. 这再次说明, 惯例在寻求金融工程问题的合理解方面确实具有重要作用.

最后重要的一点是, 交易所有时会修改期货合约的参数. 因此, 读者只能将这里提供的信息作为一个简单的例子, 并实际考察具体合约的条款.

### 3.9.2 盯市

考虑一个期货合约产生的现金流, 并且将它与具有同样标的资产的远期合约现金流进行比较. 结果会发现, 期货头寸的有效期限事实上是 1 天, 这和远期合约完全不同. 原因是在期货交易中实行了盯市. 头寸盯市的含义是: 交易所每天晚上要将该头寸平仓, 然后又以新的交割价为之开仓. 我们用一个具体的例子来阐述这个过程. 假设某期货合约的标的资产是 1 单位某种商品, 其即期价格为 $S_t$. 这里假设 $t$ 为某个星期一, 该合约在 3 个交易日后到期, 即

$$T = t + 3. \tag{27}$$

进一步假设在此 3 天内的期货交割价轨迹为

$$f_t > f_{t+1} > f_{t+2} = f_{t+3}. \tag{28}$$

如果在到期日期货合约的一个多头头寸通过一个反向头寸来冲抵, 那么该头寸会产生什么样的现金流[①]?

答案如图 3-17 所示. 盯市等价于强迫多头 (空头) 头寸持有者以当天的交割价平仓, 然后又以同样的价格开仓. 于是在该交易的第一个交易日结束时, 以 $f_t$ 价格 "买入" 的期货合约将以价格 $f_{t+1}$ 卖出, (28) 式表明这导致了如下的损失:

$$f_{t+1} - f_t < 0. \tag{29}$$

类似地, 在第二个交易日, 盯市又产生了另一个损失:

$$f_{t+2} - f_{t+1} < 0. \tag{30}$$

之所以出现这种情况, 原因是按照 (28) 式所示的轨迹, 价格又再次下跌. 到期日不再有损失发生了, 因为最后的交割价碰巧和前一天的交割价相同.

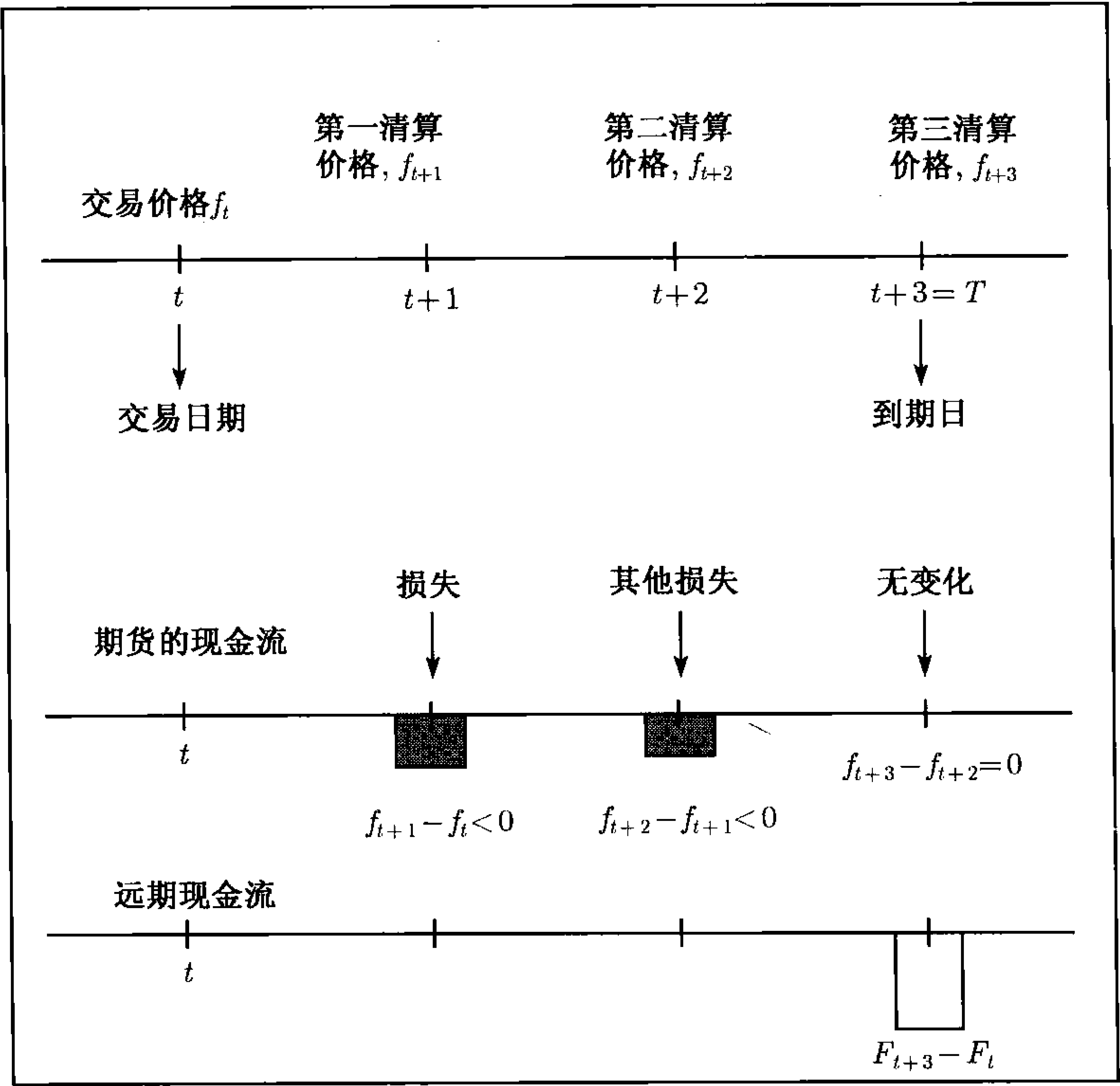



图 3-17

相对照, 图 3-17 中最后一个头寸表示出了远期价格 $F_t$ 产生的现金流. 因为此情况下没有盯市, 资本损失仅发生在合约的到期日. 显然, 这是一种完全不同的现金流模式.

① 如果交易者不用相反头寸冲抵的方式来消除其对清算所的责任, 那么它可能选择接受交割.

### 3.9.3 持有成本与合成商品

什么是一个头寸的持有成本? 我们将间接地回答此问题. 事实上, 如果忽略盯市和有关不重要的细节, 我们可以首先利用早些时候导出的合约方程来创造合成商品.

比如, 假设 $S_t$ 代表咖啡现货价格, 以它为标的资产的某个期货合约的价格是 $f_t$, 到期日是 $T, t_0 < T$. 如何构造该合约的一个合成品? 答案和货币情形非常类似. 使用同样的原理, 我们可以写出下述合约方程:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ 到期的咖啡期货 | = | 贷款<br>在$t_0$时借入$T$到期的美元 | + | 即期操作<br>以$S_{t_0}$的价格购买一个单位的即期咖啡 | + | 以一天$q_{t_0}$的成本存储咖啡直到$T$ | | (31) |

由此方程可以获得两个结果. 首先, 通过再次排列这些合约, 我们创造出一个合成现货:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 即期操作<br>以$S_{t_0}$的价格购买一个单位的即期咖啡 | = − | 贷款<br>在$t_0$时借$T$到期的美元 | + | 买入$T$期的咖啡期货 | − | 以一天$q_{t_0}$的成本存储咖啡直到$T$ | | (32) |

换句话说, 在改变符号后, 我们需要借入 1 单位咖啡, 存入 $S_{t_0}$ 美元, 同时买入一份期货合约, 由此产生一个合成现货.

其次, 合约方程可用于定价. 事实上, 合约方程给出了头寸的持有成本. 为看到这一点, 注意按照方程 (31), 合成品的价值和最初合约的价值是相同的, 因此我们有

$$f_{t_0} = (1 + r_{t_0}\delta)S_{t_0} + q_{t_0}(T - t_0), \tag{33}$$

这里 $\delta$ 是利率 $r_{t_0}$ 日调节因子.

如果储存费用表示为价格的百分比, 并且像利率那样以年率的形式, 那么上述公式变为

$$f_{t_0} = (1 + r_{t_0}\delta + q_{t_0}\delta)S_{t_0}. \tag{34}$$

由此方程知, 离合约到期日越远, 合约价格越高. 这意味着期货期限结构通常情况下是向上倾斜的, 如图 3-18 所表示的那样. 这样的曲线称为交易延期的. 对某些商品, 不可能储存 (比如因为季节等), 或者禁止储存 (比如原油等), 相应的期限结构曲线此时具有负的斜率, 这种曲线称为交割延期的. 持有成本就是利率加上这里的储存成本.

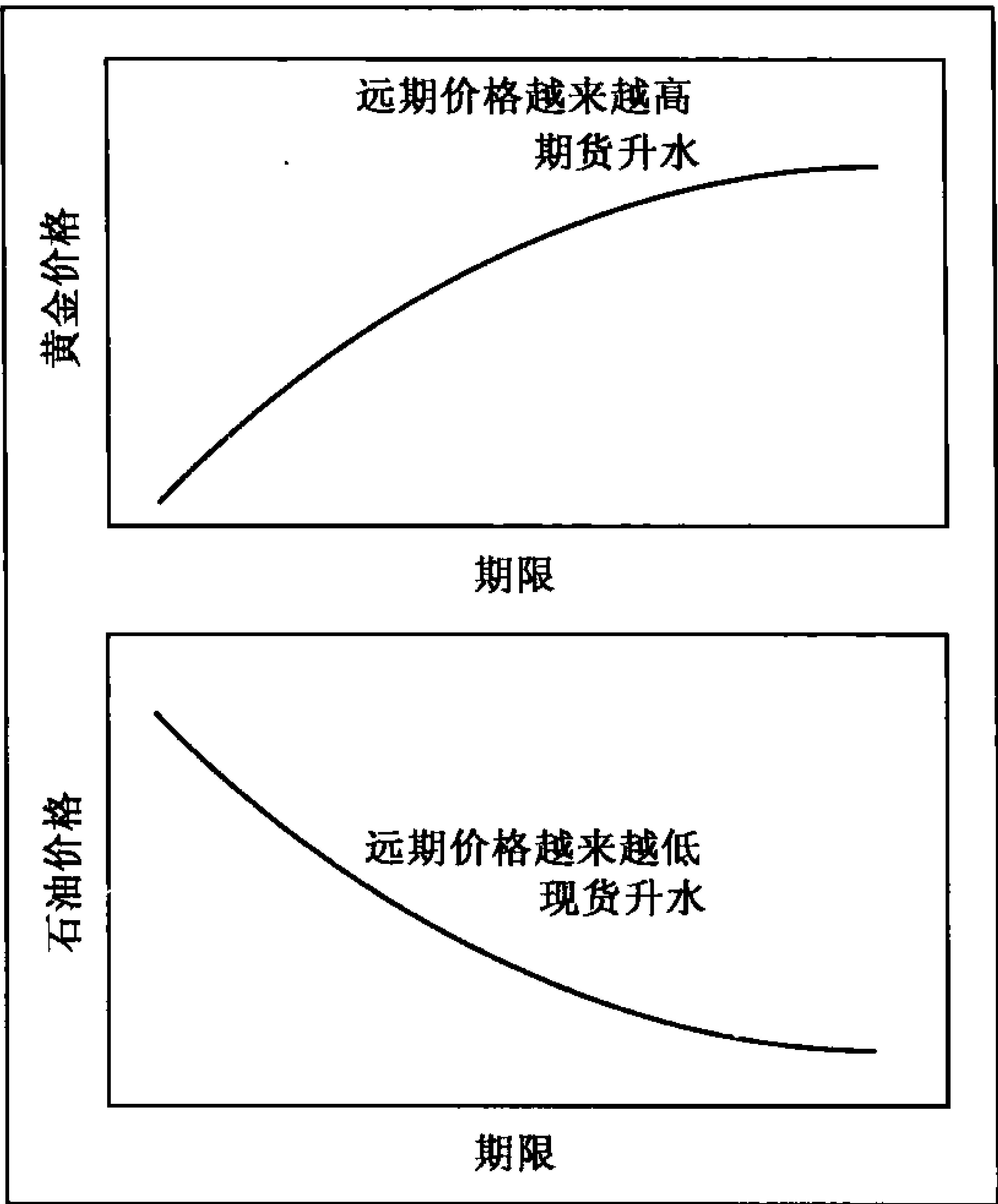



图 3-18

**注记**

虽然没有先期支付, 但购买期货或远期并非没有成本. 如果忽略可能的担保以及期货合约所需要的保证金, 那么订立一个远期或期货合约不涉及其他费用. 考虑一种现货价格为 $P_{t_0}$ 的可储存商品, 假设它的远期价格为 $P_{t_0}^f$. 又假定储存成本以及所有类似的影响可以忽略不计. 那么期货价格由下式给出:

$$P_{t_0}^f = (1 + r_{t_0}\delta)P_{t_0}, \tag{35}$$

其中 $r_{t_0}$ 是适用于该交易者的利率, 而 $\delta$ 是以年的百分比表示的到期所剩时间.

现在假定现货价格在期货合约有效期内保持不变, 这意味着下面的差

$$P_{t_0}^f - P_{t_0} = r_{t_0}\delta P_{t_0} \tag{36}$$

是建立该期货头寸的成本. 注意, 这等价于我们为了保持一个多头头寸借入了期限为 $\delta$、金额为 $P_{t_0}$ 的美元. 然而并没有过任何本金的交换, 因此在发生违约的情况下不会发生本金的损失.

## 3.10 远期惯例

外国货币远期的报价惯例非常特别. 如前面讨论的 FX 互换, 市场不为远期直

接汇率报价, 而是为所谓的远期点报价. 它们是公式 (22) 的定价过程中远期汇率与即期汇率的差值:

$$F_{t_0} - e_{t_0} \tag{37}$$

这个差值也称为 "pips", 记为买价/卖价. 下面给出远期点报价和使用方法的例子.

**例**

假设即期汇率和远期汇率的报价如下:

| 欧元/美元 | 买价 | 卖价 |
|---|---|---|
| 即期 | 0.856 7 | 0.857 2 |
| 1 年 | −28.3 | −27.3 |
| 2 年 | 44.00 | 54.00 |

从这张表中, 我们可以计算出直接远期汇率 $F_{t_0}$.

对 1 年期, 减去负的 pips 得到直接远期汇率:

$$\left(0.856\,7 - \frac{28.3}{10\,000}\right) \bigg/ \left(0.857\,2 - \frac{27.3}{10\,000}\right). \tag{38}$$

对 2 年期, pips 报价为正, 所以我们加上正的 pips 得到远期直接汇率:

$$\left(0.856\,7 + \frac{44}{10\,000}\right) \bigg/ \left(0.857\,2 + \frac{54}{10\,000}\right). \tag{39}$$

远期点提供了调整即期汇率的所需数量, 从而获得远期直接汇率. 根据市场情况, 从即期汇率上加/减远期点. 我们需要简单讨论一些相关的惯例.

这里存在两种有趣的情况. 第一, 假设已知如下 (欧元/美元) 远期点报价 (第二行) 和即期汇率报价 (第一行):

| 买价 | 卖价 |
|---|---|
| 1.011 0 | 1.012 0 |
| 12 | 16 |

注意到买价一列的远期点要比卖价列的远期点低. 如果远期点按这种方式报价, 那么所示点数将加到相应的即期汇率的最后两位.

由此, 我们得到

$$\text{远期直接汇率买价} = 1.011\,0 + 0.001\,2 = 1.012\,2, \tag{40}$$

$$\text{远期直接汇率卖价} = 1.012\,0 + 0.001\,6 = 1.013\,6. \tag{41}$$

注意, 远期直接汇率的询价差要比即期汇率的询价差大.

第二, 如果报价如下:

| 买价 | 卖价 |
|---|---|
| 1.011 0 | 1.012 0 |
| 23 | 18 |

这里情况恰好相反. 买价列的远期点要比卖价列的远期点高. 在这种情况下, 用即期汇率的后两位减去相应的远期点数得到

$$远期直接汇率买价 = 1.011\ 0 - 0.002\ 3 = 1.008\ 7,$$
$$远期直接汇率卖价 = 1.012\ 0 - 0.001\ 8 = 1.010\ 2.$$

我们注意到远期直接汇率的询价差还是比即期汇率的大. 第二种情况说明在远期点报价时, 减号有时可以省略.

## 3.11 结 论

本章深入讨论了两项主要内容: 第一, 期货和远期合约的工程问题; 第二, 合约方程. 通过这个方程我们可以得到合成贷款、合成存款和合成即期交易. 通过充分利用这个合约方程，我们可以学到只有在金融市场工作中才能学到的技术.

我们需要强调远期合约的一些特点, 这些特点在其他互换类型的衍生产品上也同样可以看到. 正是这些特点使得合约成为对市场参与者非常有用的工具.

首先, 在初始时刻, 远期 (期货) 合约不需要任何现金支付. 如果我们在同一天连续交易, 这将使得交易非常便利. 我们根本不需要担心资金问题.

其次, 因为远期 (期货) 合约初始价值为零, 所以头寸持有人不需要变动资产负债表. 交易者不用进行实际买卖. 在远期 (期货) 合约中, 交易者只确定头寸, 所以这些工具不包含在资产负债表中.

最后, 远期合约包括未来时刻的汇兑. 这意味着如果到期前一方 “违约”, 因为实际交易不涉及本金, 所以损失是有限的. 承担风险的是由本金所得收益的那一部分.

## 参 考 文 献

我们建立期货和远期市场, 从而更好地利用各种金融合约、商品和服务. 本章只讨论了这种合约的基本工程方面的内容, 并没有广泛、深入地探讨期货. 在第 4 章中, 我们将讨论远期利率和期货, 但依然有很多工具没有涉及. 为了能广泛地了解现有的期货和远期合约, 我们推荐两本很好的入门书. 第一本是《外汇与货币市场》(Foreign Exchange and Money Markets), 这是一本由路透社供稿的入门通论, 由 Wiley 公司出版. 第二本是由 CBOT 出版的《商品交易指南》(Commodities Trading

Manual). 另外 Hull(2002), Das(1994) 和 Wilmott(2000) 也是深入分析远期合约和期货合约的非常好的参考资料.

## 习　题

1. 2000 年 3 月 3 日, 作为金融工程问题专家的美国财务会计准则委员会 (Financial Accounting Standards Board) 出版了一系列新的有关衍生产品会计的重要建议. 最有名的是 "133 条款", 它影响着风险管理者和金融工程师的日常生活. 其中一位深受新条款影响的财务主管对这些新规则作了以下评述:

*从财务会计的角度来看, 133 条款本身使互换成了一个问题. 新的修正规定不允许区别过分互换对冲使用者和典型互换使用者. 根据 IFR, 这位主管利用了合成互换 FAS 133.*①

a) 忽略互换作为一种工具的细节, FAS 133 中的哪一点主要影响了这位市场参与者?

b) 该主管期望如何通过构造合成工具解决问题?

2. 在此问题中我们讨论黄金开采公司的对冲活动.

a) 黄金开采公司的自然头寸是什么? 利用收益图形说明.

b) 如果黄金价格每年稳步下降, 黄金开采公司如何对冲头寸? 利用收益图形进行说明.

c) 这种对冲会导致损失吗?

3. 今天是 2004 年 3 月 1 日, 天数计数的基数是 1 年 365 天. 在你的 FX 计划书上有如下合约.

合约 A: 2004 年 3 月 15 日, 你将以每欧元 $F_t^1$ 美元的价格卖出 1 000 000 欧元.

合约 B: 2004 年 4 月 30 日, 你将以每欧元 $F_t^2$ 美元的价格购买 1 000 000 欧元.

a) 构造等价于每个合约的合成合约.

b) 假设即期欧元/美元汇率是 1.150 0/1.150 5. 1 年以内美元贷款利率是 2.25/2.27, 德国相应的利率是 2.35/2.36, 求 $F_t^i$ 的数值解.

c) 假设市场上观测到的 $F_t^i$ 的远期点是 10/20. 如何构造套利的资产组合?

4. 考虑以下工具和相应的报价, 将它们按收益率递增顺序排列.

| 工具 | 报价 |
|---|---|
| 30 天美国国库券 | 5.5 |
| 30 天美国国库券 | 5.4 |
| 30 天 ECP | 5.2 |
| 30 天同业存款 USD | 5.5 |
| 30 天 US CP | 5.6 |

你购买一个具有以下特性的 ECP(欧元)

| 价值日期 | 2002 年 7 月 29 日 |
|---|---|
| 到期日 | 2002 年 9 月 29 日 |
| 收益率 | 3.2% |
| 数量 | 10 000 000 美元 |

① IFR, 第 1325 期.

你需要支付多少?

# 案例分析

## HKMA 和对冲基金, 1998

香港金融管理局 (Hong Kong Monetary Authority, HKMA) 因为你和你同为对冲基金经理人的朋友而在新闻报道中出现. 在 1998 年你得知:

(1) 港币对美元高估了大约 20%;

(2) 香港的经济基础是不动产行业;

(3) 香港最大产业——不动产开发商和金融机构不能再忍受高利率;

(4) 香港经济进入衰退期.

你决定利用 "两面游戏"(double play) 对香港经济进行投机, 该地区货币系统的机制使得这种 "游戏" 成为可能. 在 "两面游戏" 中你视 HKMA 为对手.

你将获得一些背景资料. 作为对冲基金的经理人, 为了活动需要你还可以得到不同远期合约的描述. 你所需要的其他数据可以通过因特网搜索获得. 回答下面的问题:

(1) 你的两面游戏策略的基本原理是什么?

(2) 特别地, HIBOR、HSI 和 HSI 期货的相互关系是什么?

(3) 通过确切的期货合约数据, 说明你的头寸.

(4) 在 1 年中, 你的头寸成本为多少?

(5) 你打算如何滚动的你的头寸?

(6) 回顾一下, 香港渡过这个难关了吗?

## 对冲基金依然在打赌货币问题

香港——上周持续上涨的股票市场坚信政府正购买股票, 从而将货币投机者从金融市场中赶出去, 虽然星期五股票以微利收盘.

尽管早些时候表现强劲, 但香港经济依然在恶化. 股票市场在两周前达到五年来最低, 而且关于港币的赌博对于投机者是便宜且简单的.

政府认为大的对冲基金在全球市场下了大赌注, 并且已经通过冲击港币和股票市场获得了相当大的收益.

在这个城市的与汇率货币挂钩的系统下, 当投机者通过购买港币而冲击它时, 它将自动推高利率. 较高的利率吸引更多的投资者将自己的钱存在香港, 这又拉动了货币、但同时他们也会冲击股票市场, 因为上升的利率损害了公司借款和扩张的能力.

投机者在下跌的股票市场上通过卖空 (short-selling) 股票–卖出借来的股票来赚钱, 他们期望股票价格下跌, 并且希望股票可以更便宜地被替代. 差值就是空头–卖方 (short-seller) 的收益.

相对于脆弱的经济和其他亚洲货币, "许多独立操作的对冲基金相信港币的定价过高," 太平洋集团有限公司对冲 - 基金机构的 Bill Kaye 说. Kaye 先生指出因为在过去的一年中新加坡币贬值, 新加坡的办公室租金比香港便宜 30%, 为了保持自身的竞争力, 这增加了香港货币贬值的压力.

同时对冲基金,“愿意承担某段时间会损失金钱的风险”,他说. 而他们赌定香港将其 15 年历史的与货币挂钩的汇率降至 7.80 港币对 1 美元.

这些基金相信他们可以投机不计其数的美元却几乎不承担风险. 原因是: 如果一个对冲基金赌港币将因与汇率挂钩而倒下, 这将是单面打赌, 这个基金的经理人这样认为. 这是因为如果当地货币放弃盯住汇率, 它很可能下降. 而且对冲基金唯一的风险是保持盯住不变, 在这种情况下, 通过远期合约在未来时刻卖出港币, 则他们仅损失缔结交易的最初成本.

成本可以很低, 允许对冲基金吸收损失并再次同样下赌. 当对冲基金缔结一个合约在一年内卖出港币, 指定在 12 个月内购买港币兑美元. 如果保持钉住汇率货币, 替代港币的费用是 U.S. 和香港间的 12 个月利率的差值.

在周四, 同业银行利率差值大约是 6.3 个百分点. 所以基金经理人对港币在周四下 100 万美元赌注, 将支付 6.3%或 63 000 美元.

基金经理人是否执行这样的交易, 决定于港币放弃与汇率挂钩的可能性和他期望港币贬值多少.

像一些对冲-基金经理人一样, 如果他认为挂钩货币将贬值大约 30%, 那么他相信在一年内放弃挂钩汇率有 1/4 的可能, 则缔结交易是有意义的. 这是因为交易的费用 (63 000 美元) 比 30%贬值或者比 300 000 美元的潜在收益的 1/4 少. 对于那些认为会放弃挂钩汇率的人, “这是相当不错的交易,” Kaye 先生说. 他说在最近几月里他没有做空香港股票或货币.

《华尔街日报》, 1998 年 8 月 24 日

# 第 4 章　简单利率衍生工具的金融工程

## 4.1　引　　言

外币和商品远期是最简单的衍生工具. 本章将介绍一些比较复杂的金融工具, 涉及的一些金融工程方法要用到*远期贷款*、*欧洲货币期货*和*远期利率协议*(FRA). 这些将为下面两章讨论以互换为基础的金融工程奠定基础. 事实上这里讨论的 FRA 合约通常被认为是普通互换的雏形.

由于多种原因, 利率策略和风险管理较之于外汇、股票或与商品有关的衍生工具更复杂. 这里我们指出两点原因.

首先, 从定义可看出利率衍生产品的支付依赖于某些利率. 为了给它定价, 就要用贴现因子将未来支付的现金流贴现来算出它的现值. 但贴现因子本身是一个取决于利率的变量, 如果利率是随机的, 那么依赖于利率的现金流的现值就是一个非线性的随机变量, 结果就会难以计算. 导致未来现金流现值波动的因素有两个: 一个是未来现金流本身; 另一个是用于贴现这些现金流的*贴现因子*. 而在处理股票或商品衍生产品时, 这种非线性性或者不存在, 或者即使存在, 对定价的影响也相对较小.

其次, 每个利率都与一个到期日有关. 这意味着应用利率衍生产品时, 处理的不是单个的随机变量, 而是取向量值的随机过程. 这样的随机向量就要求我们在定价、风险管理和战略性建仓时采用新的方法.

**趋同交易**

在讨论基本利率衍生产品的复制前, 我们先看一个例子.

在新的欧洲货币产生的前几年里, 人们不知道哪些国家会成为欧元使用国. 在这段时期内, 市场参加者推出了一种所谓的趋同交易. 下面摘录的一段材料就是其中的一个例子.

**例**

*上周有交易者对欧洲统一建立了头寸.*

*交易者卖出意大利和西班牙的利率差. JP 摩根敦促其客户买入 $12 \times 24$ 西班牙 FRA, 并卖出 $12 \times 24$ 意大利 FRA. 按照该银行的想法, 交易时为 133 基点的利差, 将会降到 50 基点以下.*

*进行这些交易的理由是: 如果西班牙加入统一货币, 那么意大利也会如此. 近*

来西班牙的收益率曲线已经落到意大利曲线之下. 按照上述推断, 意大利的收益率曲线将会与西班牙曲线趋于一致, 交易者将由此获利. (IFR, 第 1887 期)

在这个例子中, 交易商为了获利而买卖利差, 这些利差正是通过本章将要讨论的远期利率协议来买卖的. 如果两个国家使用统一的货币, 那么意大利和西班牙之间的利差就会下降,[①]该 FRA 头寸就会获利. 市场专业人士称之为卖利差. 由于利差降低会使他们获利, 因此从某种意义上来讲, 他们是在卖空利差.

本章将讨论一些使用远期贷款、FRA 和欧洲货币期货的金融工程方法. 我们首先讨论这些基本的衍生工具, 并得到可以用来产生其他合成工具的合约方程, 进一步由这些合成工具导出各种定价公式.

## 4.2 Libor 和其他基准利率

首先要定义 Libor 利率的概念. 这一类的基准利率对于构造利率工具是非常必要的.

Libor 即伦敦同业银行间贷款利率 (London Interbank Offered Rate). 它是衡量伦敦一组预先选定的银行间贷款成本的算数平均利率, 是只有银行才能提供和获得资金的价格, 且是借款银行无需提供任何抵押品的无担保利率. BBA-Libor 通过预先选出一组伦敦银行来确定.[②]伦敦时间每天 11：00 公布 9 种货币的 Libor.

Euribor 是一个在布鲁塞尔确定的类似概念. 它是通过对一些欧洲大陆银行的测验确定的. Libor 和 Euribor 显然是很相似的. 伦敦银行和法兰克福银行面临着相似的风险和融资成本, 因此它们以几乎相同的利率借出欧元, 但由于组成 Libor 和 Euribor 的银行成员不同可能会使二者有微小的差异.

比较重要的 Libor 期限有隔夜, 1 周, 1 个月, 2 个月, 6 个月, 9 个月和 12 个月. 我们把 Libor 作为到期日函数的图形称为 Libor 曲线.

Libor 是一种货币市场收益, 在大多数货币中它采用实际/360 的方式报价. 以 Libor 为标的的衍生产品称为 Libor 工具. 银行利用这些衍生工具和标的欧洲市场贷款构造了 Libor 敞口. 起同样作用的其他基准利率还有 Tibor(东京) 和 Hibor (香港).

本章提到的 “利率” 是指 Libor 利率. 有了 Libor 的概念, 就可以定义将要用到的一些主要工具. 首先是远期贷款. 虽然远期贷款不是流动性工具, 但它是我们展开讨论的一个很好的出发点. 接下来我们将讨论远期利率协议和欧洲货币期货.

---

① 虽然单个利率会上升或下降.

② BBA 代表英国银行家协会.

## 4.3 远期贷款

远期贷款的构造与其他任何远期合约一样, 所不同的仅在于买卖的是一笔贷款而不是货币或商品. 在 $t_0$ 时签定一个在未来时间 $t_1$ 结算的合约, 交易者收到 (或交割) 一笔到期日为 $t_2$ 的贷款, $t_1 < t_2$. 合约中会明确标明贷款采用的利率. 这个利率是在 $t_0$ 时确定的, 我们称之为远期利率, 用 $F(t_0, t_1, t_2)$ 来表示. $t_1$ 是这笔未来贷款的起始时间, $t_2$ 是到期时间.

如图 4-1 所示, 在 $t_0$ 时签定一个合约, 在未来时间 $t_1$ 时收到 100 美元; 本金和利息在 $t_2$ 时支付. 利息为 $F_{t_0}\delta$, 其中 $\delta$ 是计息时间:

$$\delta = \frac{t_2 - t_1}{360}. \tag{1}$$

为了简化记号, 我们把 $F(t_0, t_1, t_2)$ 缩写为 $F_{t_0}$. 如第 3 章, 如果一年以 365 天计, 那么天数计算惯例应该调整.

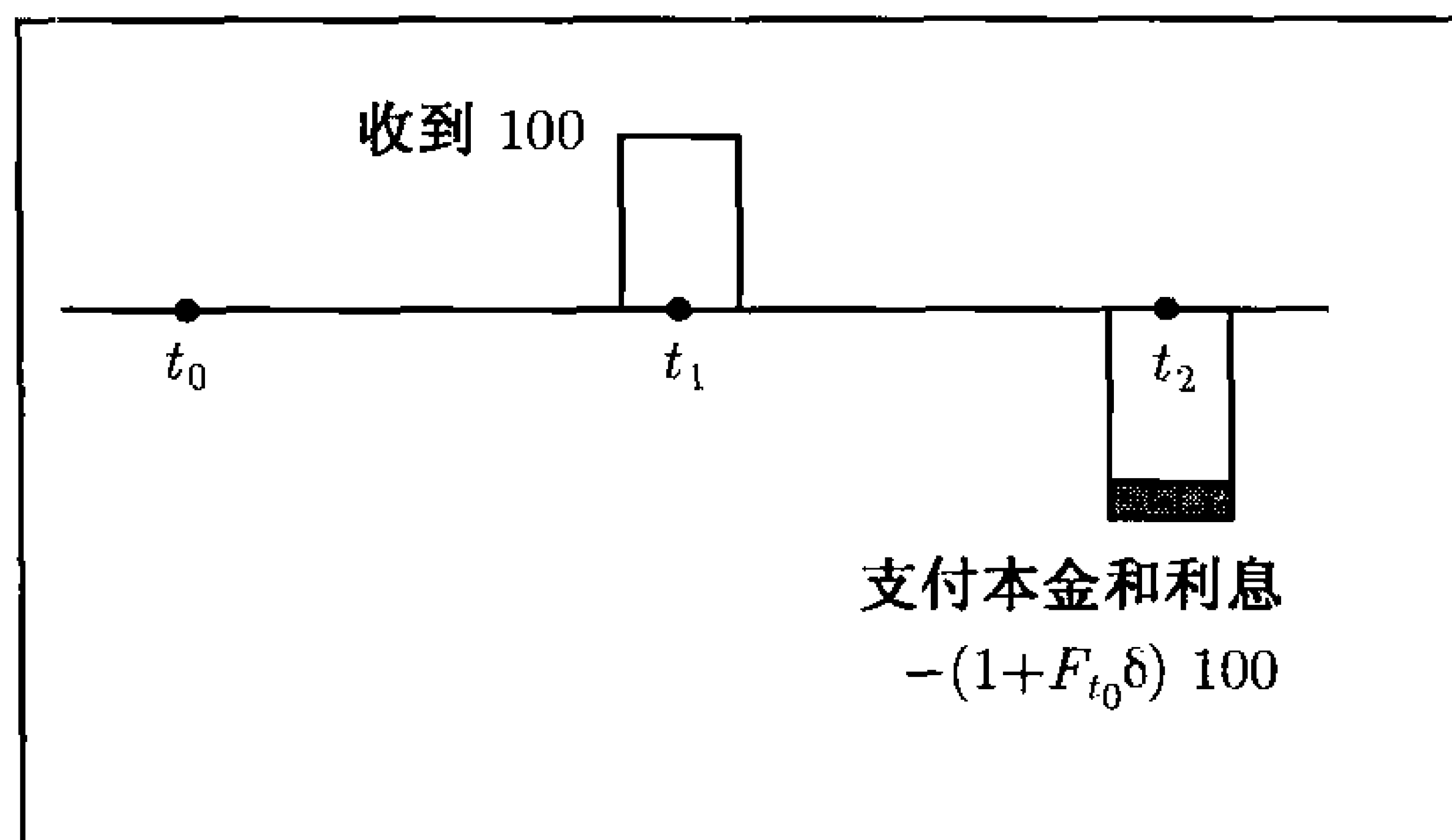



图 4-1

远期贷款在财务报表、税收和风险管理方面有极大的灵活性. 下面几种情况都要用到远期贷款.

- 一个企业想锁定"现行"较低的货币市场借款利率.
- 一家银行想锁定"现行"较高的贷款利率.
- 一个企业可能面临 $t_1$ 时的浮动利率债务. 它打算通过锁定未来贷款成本来对冲该债务.

容易看出远期贷款是如何实现以上目的的. 在图 4-1 所示的远期贷款中, 借款的一方同意在 $t_1$ 时收到 100 美金, 并在 $t_2$ 时连本带息一起偿还. 关键的一点是远期贷款中的利率在 $t_0$ 时就确定了. 远期利率 $F(t_0, t_1, t_2)$ 在 $t_0$ 时锁定了一个未知变量, 因而消除了由未知利率带来的风险. $L_{t_1}$ 是 $[t_1, t_2]$ 时期贷款的 Libor 利率, 它只有在未来时间 $t_1$ 时才能知道. 固定的远期利率 $F(t_0, t_1, t_2)$ 能够消除由不确定的 $L_{t_1}$ 带来的风险.

本章将讨论几个运用远期贷款和远期利率协议的例子.

### 4.3.1 远期贷款的复制

这一部分把第 3 章的方法应用到远期贷款来得到复制它的合成工具. 较之于合成工具本身, 我们更关心的是构造这些合成工具的方法. 虽然远期贷款不是流动性工具, 也极少在市场上交易, 但其合成工具产生的一个合约方程对我们发现远期利率协议的合约方程很有用处, 而远期利率协议是流动性很好的金融工具.

与在第 3 章一样, 我们按如下步骤构造一个远期贷款合成工具. 首先, 把远期贷款的现金流拆分成独立的图表, 并通过加上或减掉适当的现金流来把它们转化成已知的流动性工具. 这样当把这些现金流加在一起时, 额外的 (即人为加上或减掉的) 现金流会相互抵消, 从而还原回初始的工具. 图 4-2 展示了以下步骤.

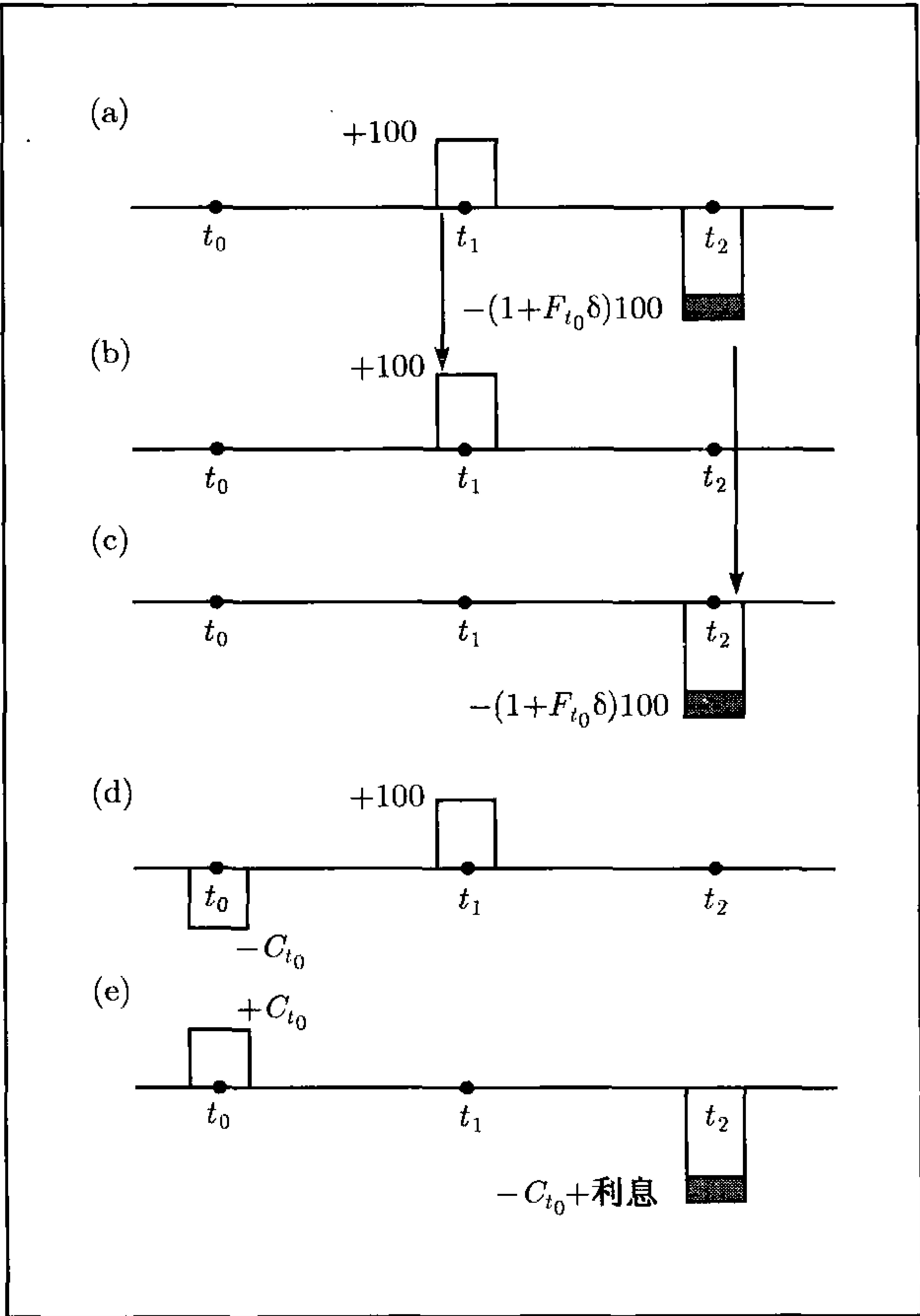



图 4-2

(1) 从图 4-2a 中远期贷款的现金流开始, 把它的两次现金流拆成两个独立的图表. 注意在这一步拆分后的现金流不能形成可交易的合约. 显然没有人会买图 4-2c, 且每个人都想获得图 4-2b.

(2) 为了使这些现金流可交易, 需要在每种情况下都加上补偿现金流, 具体来说就是在图 4-2b 中, 在 $t_0$ 时加一个负的现金流,[①]如图 4-2d 中所示, 现金流大小为 $C_{t_0}$, 记为 $-C_{t_0}$.

(3) 在图 4-2c 中, 在 $t_0$ 时加一个正的现金流, 得到图 4-2e, 该现金流为 $+C_{t_0}$.

(4) 要确保图 4-2d 和图 4-2e 竖直相加 (时间对齐) 后可以恰好复制图 4-2a 中的现金流, 两个新加进去的现金流必须大小相等、符号相反, 从而互相抵消. 图 4-2d 和图 4-2e 竖直相加消除了 $t_0$ 时的现金交换, 恰好复制了图 4-2a.[②]

至此, 我们需要将图 4-2d 和图 4-2e 中的现金流解释为具体的金融合约, 从而可以确定该合成工具的组成部分. 可以通过多种方法做到这一点. 针对不同的解释, 构造该合成工具的资产也会不同.

1. 债券市场复制

第一个合成工具可以通过债券和短期国库券市场来获得. 虽然这并不是市场参与者喜欢的方式, 但其中的原理构成了金融工程的基础. 以 $\{B(t_0,t_i), i=1,\cdots,n\}$ 表示某种交易活跃的无风险折价债券, 它们有各自具体的到期日, 面值都是 100.

那么, 在单纯的折价债券市场上, 我们可以把图 4-2d 中的现金流理解为 $t_1$ 到期的折价债券的多头头寸. 交易商在 $t_0$ 时支付 $C_{t_0}$, 在 $t_1$ 时收到 100. 这意味着

$$B(t_0,t_1)=C_{t_0}. \tag{2}$$

因此如果无风险债券价格已知, 就可以确定 $C_{t_0}$ 的值.

一旦给图 4-2e 的现金流标上号, 该远期贷款的合成工具就可以完全描述出来了. 图 4-2e 中的现金流代表什么呢? 看起来像一个 $t_2$ 到期的折价债券的适当空头头寸.

这是否意味着要卖空一单位的 $B(t_0,t_2)$ 呢? 答案是否定的. 因为图 4-2e 中 $t_0$ 时的现金流必须等于 $C_{t_0}$,[③]然而我们知道

$$B(t_0,t_2)<B(t_0,t_1)=C_{t_0}. \tag{3}$$

即一个 $t_2$ 到期的债券比一个 $t_1$ 到期的债券要便宜, 因此卖空一单位 $t_2$ 到期的债券不足以产生图 4-2d 中 $t_0$ 时所需要的资金. 这个问题很容易解决, 即不是卖空一

① 如果我们在其他时间加, 就会得到不同的远期贷款.
② 这就是两次现金流大小都是 $C_{t_0}$ 而符号相反的原因.
③ 否则, 当我们把 4-2d 和 4-2e 竖直相加时 $t_0$ 时的现金流不会抵消.

单位而是 $\lambda$ 个单位 $t_2$ 到期的债券. $\lambda$ 满足下式

$$\lambda B(t_0,t_2)=C_{t_0}. \tag{4}$$

但因为已知 $B(t_0,t_1)=C_{t_0}$, 所以很容易就可确定 $\lambda$:

$$\lambda=\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}. \tag{5}$$

由 (3) 式知 $\lambda$ 会大于 1, 卖空这么多份额的 $t_2$ 到期的债券就会为 $t_1$ 到期的折价债券的多头头寸产生足够的现金流, 因此我们就获得了远期贷款的第一个合成工具:

$$\left\{\text{买一单位}t_1\text{到期的贴现债券, 卖空}\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}\text{单位}t_2\text{到期的贴现债券}\right\} \tag{6}$$

为了再次验证这个结果, 把图 4-2d 和图 4-2e 竖直相加而重新得到图 4-2a 中远期贷款的现金流.

2. 定价

如果市场流动且没有其他交易成本, 套利行为能保证远期贷款中的现金流和它的复制组合 (合成) 的现金流相同. 换句话说, 图 4-2d 和图 4-2e 中 $t_2$ 时的现金流大小应该相等, 这意味着

$$1+F(t_0,t_1,t_2)\delta=\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}, \tag{7}$$

这里的 $\delta$ 跟前面一样为计息时间:

$$\delta=\frac{t_2-t_1}{360}. \tag{8}$$

同样, 如果一年以 365 天计, 天数计算惯例应该调整. 这种无套利关系是金融工程的基础. 如果给定了债券价格 $\{B(t_0,t_1),B(t_0,t_2)\}$, 我们就可以用方程 (7) 代替债券市场给远期贷款定价. 更重要的是, 公式 (7) 表明了不同到期日的远期利率和折价债券价格之间的一种非常重要的关系. 但折价债券的价格是用来计算未来现金流现值的贴现因子, 这意味着远期利率在金融资产的定价和风险管理中是至关重要的.

在考虑远期贷款的第二个合成工具之前, 我们讨论一下套利的概念.

3. 套利

事实上, 假设公式 (7) 不成立会怎样呢? 我们分析两种情况, 假定这两种情况下都没有询价差 (bid-ask spreads). 首先假设 $t_0$ 时的市场报价满足

$$(1+F_{t_0}\delta)>\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}, \tag{9}$$

其中 $F_{t_0}$ 是 $F(t_0, t_1, t_2)$ 的缩写形式. 在这种情况下, 市场参与者能在债券市场上以低于远期收益 (通过在远期贷款市场中贷款给别人获得) 的成本获得一个合成远期贷款, 从而保证了他会获得正的收益. 这是因为该 "合成" 的融资成本, 用 $F^*_{t_0}$ 表示

$$F^*_{t_0} = \frac{B(t_0, t_1)}{\delta B(t_0, t_2)} - \frac{1}{\delta} \tag{10}$$

低于远期利率 $F_{t_0}$, 持有这个策略到到期日 $t_2$ 就会获得无风险收益.

这些套利收益可以通过以下几个步骤获得: (1) $t_0$ 时卖空 $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}$ 单位 $t_2$ 到期的债券, 由此获得 $B(t_0, t_1)$ 美元的现金; (2) 用获得的现金买一单位 $t_1$ 到期的债券; (3) $t_1$ 时把从到期债券得到的 100 美元以 $F_{t_0}$ 的利率借出. 这些操作的结果是, 在 $t_2$ 时交易商欠款 $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}100$, 并且将收到 $(1 + F_{t_0}\delta)\,100$, 而在 (9) 的条件下后者大于前者, 所以就产生了套利.

现在考虑第二种情况, 假设 $t_0$ 时的市场报价满足

$$(1 + F_{t_0}\delta) < \frac{B(t_0, t_1)}{B(t_0, t_2)}, \tag{11}$$

则可以建立反向头寸实现套利. 即 $t_0$ 时买入 $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}$ 单位 $t_2$ 到期的债券. 为了获得所需的资金, 卖空一单位 $B(t_0, t_1)$ 债券并借入 100 美元远期. $t_2$ 时, $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}$ 单位 $t_2$ 到期的债券会收到 $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}100$. 然后支付远期贷款, 应支付 $(1 + F_{t_0}\delta)\,100$. 由于在 $[t_1, t_2]$ 内的资金成本比回报低, 显然这样的策略也会产生套利收益.

### 4. 货币市场复制

假设期限直到一年的所有存款都在银行间货币市场活跃报价, 且假定没有套利机会. 图 4-3 表示了远期贷款的另一个合成工具的构造.

图 4-3a 中是远期贷款的现金流, 图 4-3c 表示的是一个欧洲市场贷款, 在 $t_0$ 时以银行间利率 $L^2_{t_0}$ 借入 $C_{t_0}$,[①]图 4-3c 中 $t_2$ 时的现金流要用这个利率来贴现, 即

$$C_{t_0} = \frac{100(1 + F_{t_0}\delta)}{(1 + L^2_{t_0}\delta^2)}, \tag{12}$$

其中 $\delta^2 = (t_2 - t_0)/360$.

然后立即以利率 $L^1_{t_0}$ 把 $C_{t_0}$ 存入银行, 期限稍短一些. 由此得到等式

$$C_{t_0}(1 + L^1_{t_0}\delta^1) = 100, \tag{13}$$

其中 $\delta^1 = (t_1 - t_0)/360$. 如图 4-3b 所示.

把图 4-3b 和图 4-3c 竖直相加就复制了远期贷款的现金流, 由此构造出了远期贷款的第二个合成工具.

① 这里的 $L^2_{t_0}$ 表示的是到期日为 $t_2$ 的 "现金" 贷款在 $t_0$ 时的 Libor 利率.

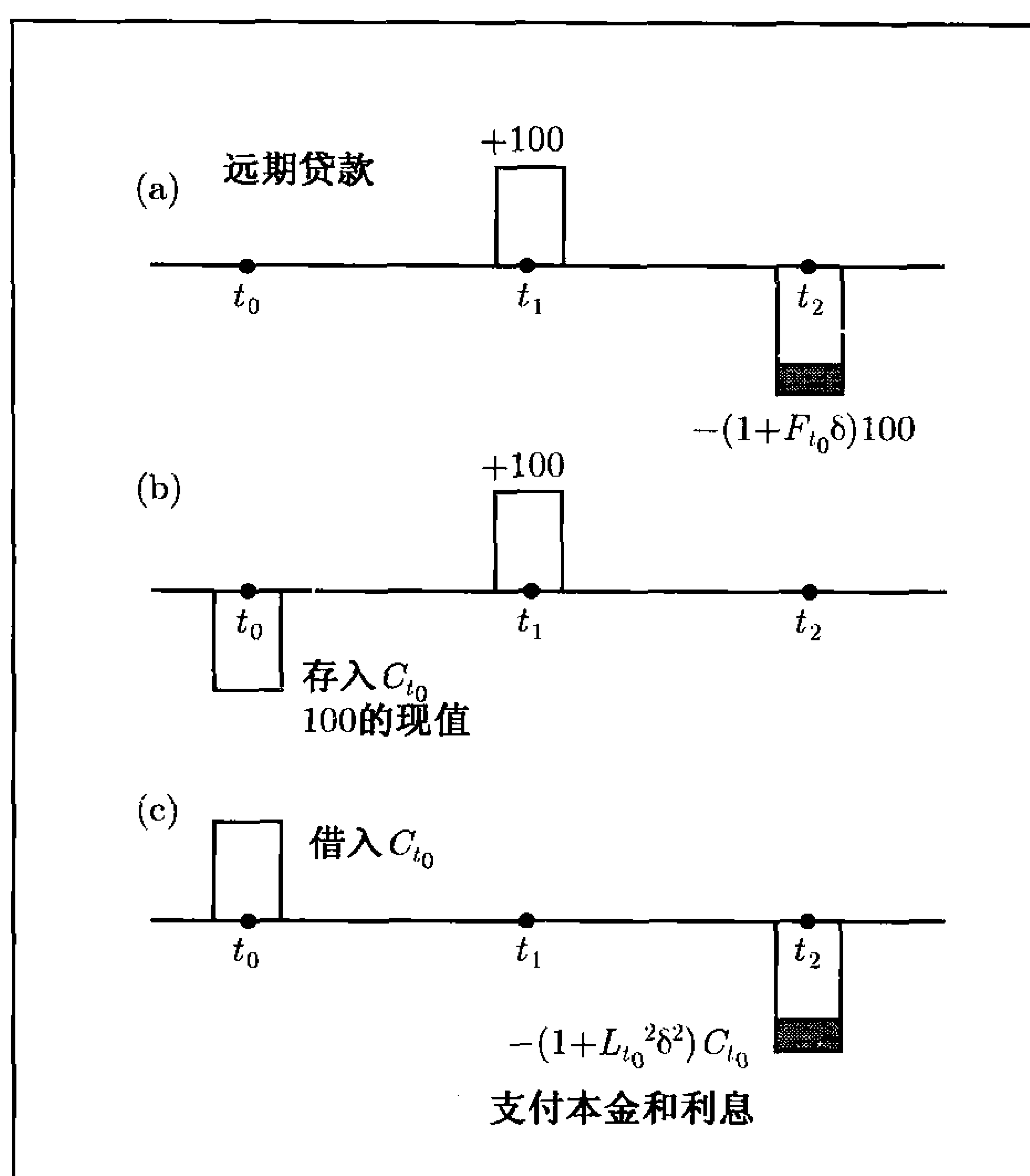



图 4-3

5. 定价

通过货币市场的复制, 我们可得到另外一个定价方程. 在图 4-3 中, 如果信用风险是相同的, 那么由方程 (12), $t_2$ 时图 4-3a 和图 4-3b 中的现金流应该相等. 可以写为

$$(1+F_{t_0}\delta)100 = C_{t_0}(1+L_{t_0}^2\delta^2), \tag{14}$$

其中 $\delta=(t_2-t_1)/360$, 再用公式 (13) 来代换可得最终的定价公式

$$(1+F_{t_0}\delta)100 = \frac{100(1+L_{t_0}^2\delta^2)}{(1+L_{t_0}^1\delta^1)}, \tag{15}$$

化简得

$$(1+F_{t_0}\delta) = \frac{1+L_{t_0}^2\delta^2}{1+L_{t_0}^1\delta^1}. \tag{16}$$

这个公式给出了远期贷款的定价, 也说明了 Libor 利率在确定远期利率中的重要作用.

### 4.3.2 合约方程

可以把前面得到的这些结果转化成合约方程. 用债券市场复制时得到

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$时开始$t_2$时结束的远期贷款 | = | 卖出$B(t_0,t_1)\,/\,B(t_0,t_2)$单位的$t_2$到期的债券 | + | 买入$t_1$到期的债券 | (17) |

如果使用货币市场来构造该合成, 合约方程变为

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$开始$t_2$结束的远期贷款 | = | $t_2$到期的贷款 | + | $t_1$时到期的存款 | (18) |

虽然这些合约方程有缺陷, 但可以通过求解它们来解决一些金融市场上的常见问题. 下面给出一些例子.

### 4.3.3 应用

一旦得到一个远期贷款的合约方程, 就可以像在第 3 章中一样, 通过代数运算来构造进一步的合成工具. 下面讨论三方面的应用.

**1. 应用 1: 构造一个合成债券**

假设一个交易者在 $t_0$ 时想买一个 $t_1$ 到期的债券, 并且他希望这个债券是*流动*的. 遗憾的是他发现唯一的流动性债券是一种有较长到期日 $t_2$ 的 on-the-run①国库券, 其他债券都是 off-the-run 的. 假定所有债券都是折价债券且远期贷款是流动的(实际上是不流动的), 交易商如何由此合成一个短期债券呢?

把合约方程 (17) 变形得

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 买入$t_1$到期的债券 | = | 从$t_1$到$t_2$的远期贷款 | − | 卖出$B(t_0,t_1)\,/\,B(t_0,t_2)$单位$t_2$到期的债券 | (19) |

合约前的 "−" 意味着于此合约中建立*反向头寸*. 由此可见, 一个 $t_1$ 到期的债券可以通过下述步骤合成: 持有一个从 $t_1$ 开始到 $t_2$ 结束的远期贷款, 买入 $\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}$ 单位 $t_2$ 到期的债券. 这样产生的现金流和一个短期债券的现金流是一样的. 更重要的是, 如果远期贷款和长期贷款都是流动的, 那么这个复制策略比其他任何 $t_1$ 到期的 off-the-run 债券的流动性都要好. 它的构造过程如图 4-4 所示.

**2. 应用 2: 解决不匹配问题**

假定一家银行在 $t_0$ 时存在到期日不匹配问题. 它从欧洲市场借入 $t_1$ 到期的资金, 并以 $t_2$ 为到期日把这笔资金贷出. 显然, 银行必须有一笔 $[t_1,t_2]$ 时期的新贷款来延续 $t_1$ 到期的短期贷款, 而 $[t_1,t_2]$ 时期新贷款的利率 $L_{t_1}$ 是未知的, 因而产生

① 一个 on-the-run 债券是有给定到期日的流动性债券, 在该到期日债券中是最新发行的. off-the-run 债券就没有这样的性质, 它是不流动的, 保留在投资者的资产组合中.

了不匹配风险. 公式 (18) 中的合约方程可用来对冲这种不匹配风险, 即通过构造一个合成远期贷款来锁定 $t_1$ 时的融资成本 (利率).

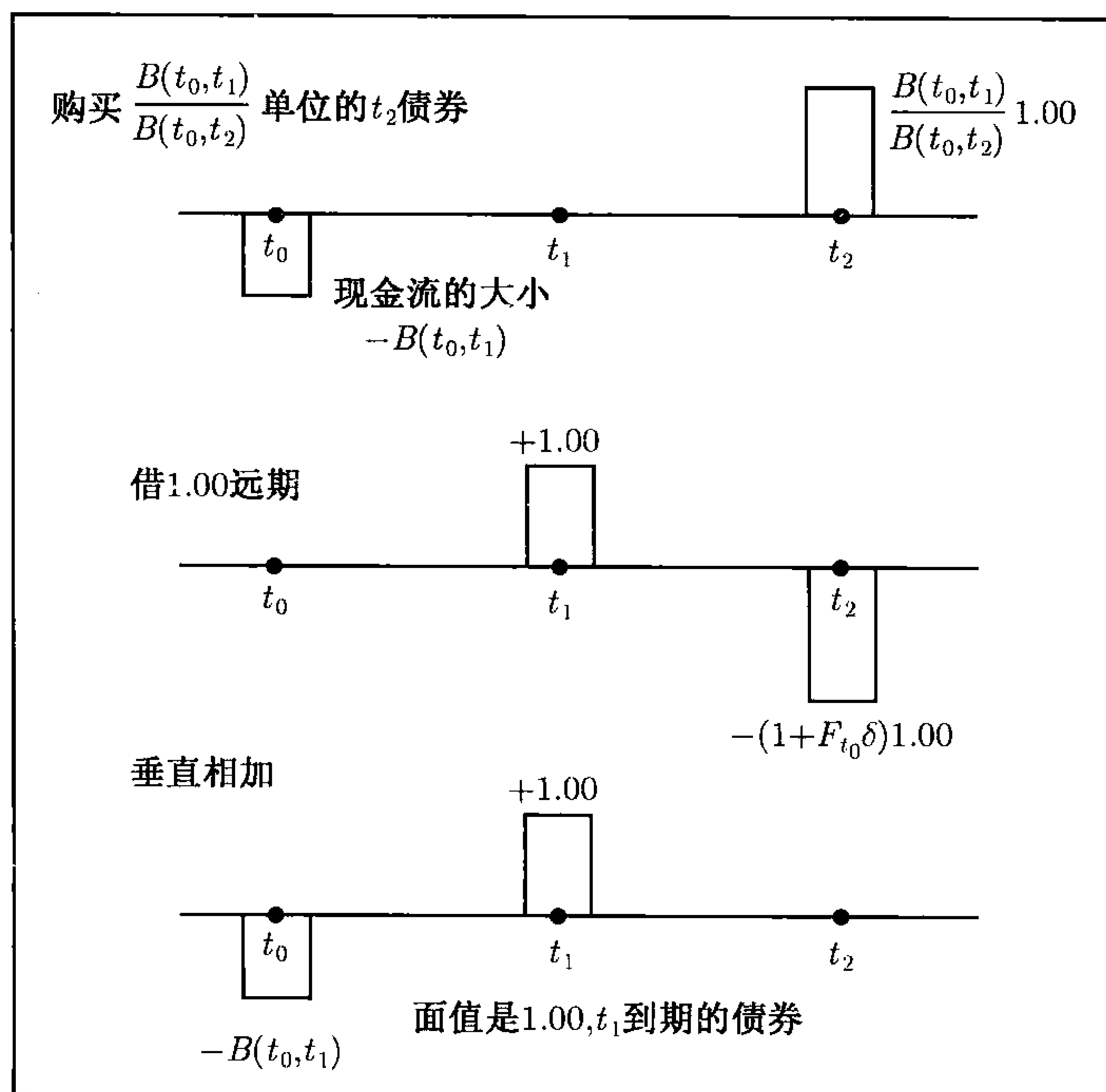



图 4-4

事实上, 由公式 (18) 中的合约方程知短期贷款和长期贷款有如下关系:

$$\boxed{t_2\text{到期的贷款}} = \boxed{\text{从}t_1\text{到}t_2\text{的远期贷款}} - \boxed{t_1\text{到期的存款}} \tag{20}$$

变换符号得

$$\boxed{t_2\text{到期的贷款}} = \boxed{\text{从}t_1\text{到}t_2\text{的远期贷款}} + \boxed{t_1\text{到期的贷款}} \tag{21}$$

由此我们看到远期贷款把短期贷款转化成了长期贷款, 并消除了不匹配风险.

3. 应用 3: 收益率曲线策略

假设我们认为短期利率和长期利率的差将会变小(大). 换句话说, 预期收益率曲线会趋于平稳(陡峭), 那么采取什么策略能从收益率曲线这种预期的变化中受益呢?

一种合理的策略就是建立头寸来获得现在的长期利率, 并支付现在的短期利率. 随着收益率曲线趋于平稳, 长期利率相对于短期利率来说将会下降, 则这一头

寸就会从这种变化趋势中获利. 这意味着市场参与者应该借入短期贷款而贷出长期借贷款. 应该注意的是这种"打赌"依据的不是利率的绝对化水平而是相对变化. 事实上, 利率曲线可以在上下波动中趋于平稳. 一个合约方程可以有效地建立这种头寸.

考虑下面债券市场的合约方程

$$\boxed{\text{从}t_1\text{到}t_2\text{的远期贷款}} = \boxed{\text{卖出适量的}t_2\text{到期的债券}} + \boxed{\text{购买}t_1\text{到期的债券}} \tag{22}$$

这个方程揭示了一个有趣的问题. 前面提到的收益率曲线平稳化策略涉及支付短期利率, 而收到长期利率. 除了符号不同, 方程 (22) 的右端恰好做到了这一点. 交易商需要支付短期利率并收到长期利率. 将方程改变符号得

$$\boxed{\text{从}t_1\text{到}t_2\text{的远期存款}} = \boxed{\text{买入适量的}t_2\text{到期的债券}} + \boxed{\text{卖出适量的}t_1\text{到期的债券}} \tag{23}$$

通过卖空适量 $t_1$ 到期的债券来支付短期利率, 并买入 $t_2$ 到期的债券以获得长期利率, 按照合约方程这等价于从 $t_1$ 开始到 $t_2$ 结束的远期*存款*. 因此交易商可以用*远期利率*代替债券来从收益率曲线平稳化中获益. 他需要做的就是贷出远期贷款, 或更好地——仅仅用适当的工具来*锁定*远期利率. 后一种方法可以避免复制过程中由债券或存款所引发的几乎所有的不可预料的状况, 毕竟现金债券对财务报表有严重的影响. 4.4 节将介绍怎样用远期利率协议有效地产生这一方法.

## 4.4 远期利率协议

一个远期贷款合约意味着两次责任. 首先必须在 $t_1$ 时接收 100 单位货币, 其次, 必须支付利息 $F_{t_0}$, 这种合约有以下几个缺点.

(1) 远期借款者可能不想在 $t_0$ 时收到现金. 在大多数对冲和套利活动中, 人们只想锁定一个未知利率, 而不一定需要一笔现金. 一个典型的例子就是前面 4.2 节描述的趋同交易, 其中参与者收到 (未来) 意大利利率, 支付 (未来) 西班牙利率. 他们的目的是关于这两种利率建立头寸, 而不是在一两年内获得一笔贷款.

(2) 第二个缺点是远期贷款合约存在信用风险, 如果想锁定一个利率, 那么把信用风险放进财务报表不是个好主意.[①]

(3) 远期贷款的这些性质可能使投机者和套利者远离任何潜在的远期贷款市场, 从而使之缺乏流动性.

这些缺点使远期贷款不能成为一个完美的金融工程工具. 一个好的工具应该能把并存于远期贷款中的信用风险和利率承诺*分离*开来. 事实证明有很好的方法可以实现这一目的.

① 注意在图 4-1 的远期贷款中我们假定不存在信用风险.

### 4.4.1 消除信用风险

首先注意到, 交易商仅仅以远期贷款为工具来锁定未来利率 $L_{t_1}$, 在 $t_1$ 时必须立即把收到的 100 美元以市场利率 $L_{t_1}$ 重新贷出. 图 4-5a 所示的是一个 $t_0$ 时签订的远期贷款. 图 4-5b 所示的是相应的*即期存款*. 市场参与者等到 $t_1$ 时以此时已知的利率 $L_{t_1}$ 进行存款, 通过这种方式就无需收到 100 美元且最终只需补偿固定利率 $F_{t_0}$. 这样做, 实际操作者就可以*避免接受* 100 美元的责任, 并仅需兑现支付固定利率 $F_{t_0}$ 的承诺.

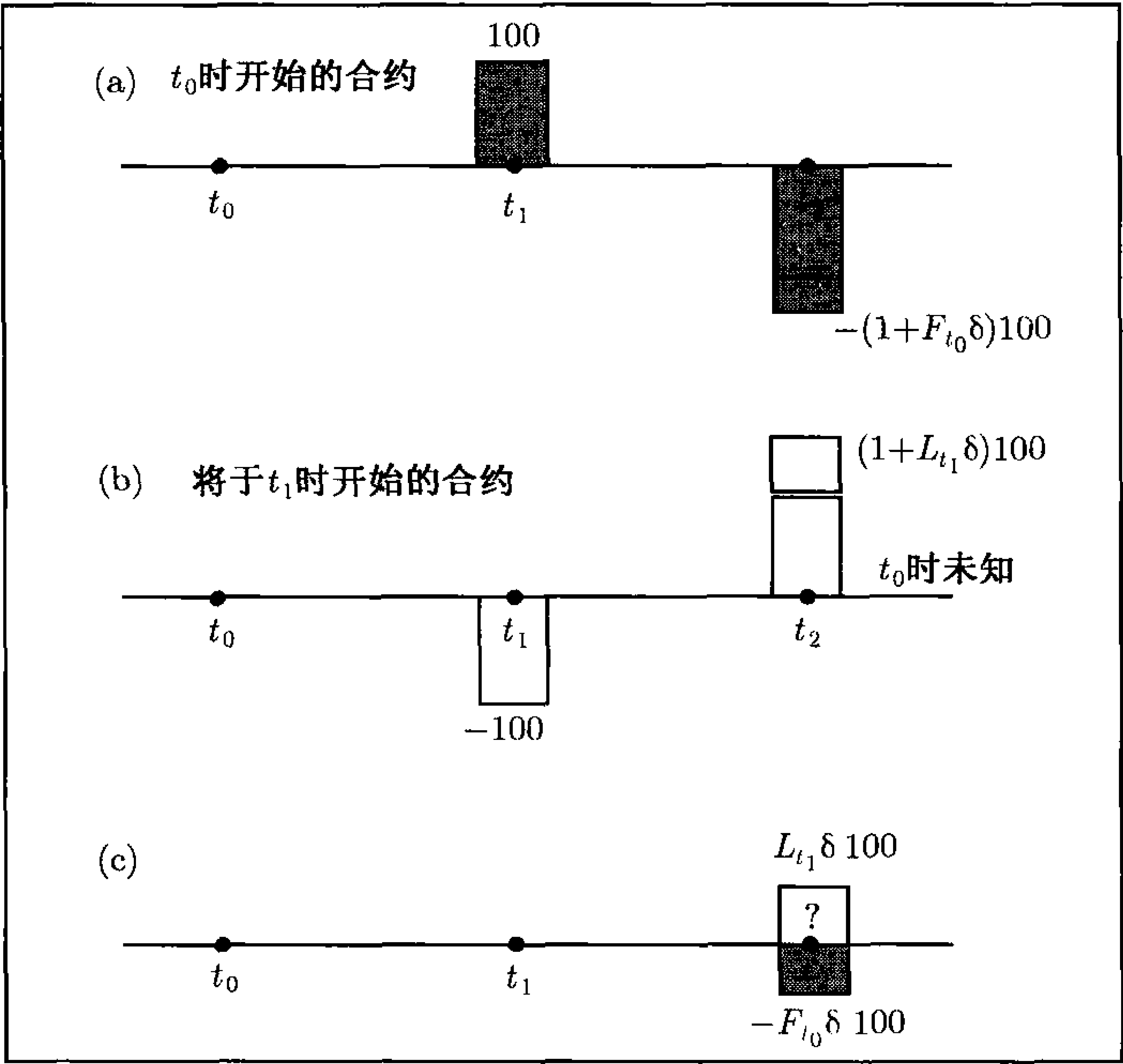



图 4-5

因此, 把远期贷款和未来即期存款结合起来就能达到我们的目的——消除与未知 Libor 利率相关的风险. 这些步骤将会锁定 $F_{t_0}$. 我们看一下图 4-5c 中的策略产生的结果, 把远期贷款 4-5a 和即期贷款 4-5b 相加, 因为 $t_1$ 时刻现金流大小相同符号相反, 所以会互相抵消. $t_2$ 时收到和支付的本金也会抵消, 剩下的只有各自的利息支付. 由图 4-5c 知下面的组合

$$\{一个t_0时签订的t_1开始的远期贷款, 一个t_1时的即期存款\} \tag{24}$$

将产生如下的 (净) 现金流:

| | 支付现金 | 收到现金 | 总计 |
|---|---|---|---|
| $t_1$ | $-100$ | $+100$ | 0 |
| $t_2$ | $-100(1+F_{t_0}\delta)$ | $100(1+L_{t_1}\delta)$ | $100(L_{t_1}-F_{t_0})\delta$ |

因此如果以参数 $N$ 来表示远期贷款的本金, (24) 表示的投资组合在 $t_2$ 时的净现金流为

$$N(L_{t_1}-F_{t_0})\delta, \tag{25}$$

其中 $\delta$ 和通常一样为计息时间.

### 4.4.2 FRA 的定义

我们现在正式引入 FRA 合约的概念. 如果一个客户想用组合 (24) 来达到锁定未来借入或贷出成本, 那么为什么不把这个策略作为一个单一的合约提供给他呢? 这个合约将只包括两个利息支付的交换, 如图 4-5c 所示.

换句话说, 相当于确定了一个名义本金为 $N$, 开始日期 $t_1$ 结束日期 $t_2$, "价格" 为 $F_{t_0}$, 支付为 $N(L_{t_1}-F_{t_0})\delta$ 的合约,[①]这就是一个*后行付款*的远期利率协议或一个 FRA.[②]在一个 FRA 合约中, 如果 $t_1$ 时, $L_{t_1}>F_{t_0}$, 则合约的买方在 $t_2$ 时收到:

$$(L_{t_1}-F_{t_0})\delta N, \tag{26}$$

如果 $t_1$ 时, $L_{t_1}<F_{t_0}$, 则合约的买方在 $t_2$ 时需要支付:

$$(F_{t_0}-L_{t_1})\delta N, \tag{27}$$

由此可见 FRA 合约的买方将支付固定利率, 收到浮动利率.

在市场上交易的 FRA 合约的结算是在 $t_1$ 时而不是 $t_2$ 时才进行, 因此这些交易就涉及如下的贴现现金流, 如果 $t_1$ 时, $L_{t_1}>F_{t_0}$, 则合约的买方在 $t_1$ 时收到

$$\frac{(L_{t_1}-F_{t_0})\delta N}{1+L_{t_1}\delta}, \tag{28}$$

另一方面, 如果 $t_1$ 时, $L_{t_1}<F_{t_0}$, 则合约的买方在 $t_1$ 时需要支付

$$\frac{(F_{t_0}-L_{t_1})\delta N}{1+L_{t_1}\delta}. \tag{29}$$

对于 FRA 的卖方 (经常是一家银行) 来说, 在 $t_1$ 时而不是后来的 $t_2$ 时结算有着微妙的好处. 如果 $[t_0,t_1]$ 时期内的利率变化对银行有利, 那么 $t_1$ 时结算就会降低与支付相关的保证金信用风险, 从而银行就可以以较低的信用等级 (credit line) 经营.

#### 一点说明

补充一点重要的说明. 一个 FRA 合约可以看成是两个利息支付的*交换*. 它的买方将支付已知利息 $F_{t_0}\delta N$, 并收到 (未知数量的) 利息 $L_{t_1}\delta N$. 根据二者大小关系, 结算时就可确定是支出还是收入. $F_{t_0}\delta N$ 可看成是 $t_0$ 时一个市场参与者为获得随机的未知利息 $L_{t_1}\delta N$ 而愿意付出的公平代价, 是 $L_{t_1}\delta N$ 的 "市场价值".

---

① 因为本金是不交换的, 所以 $N$ 是*名义本金*, 尽管如此, 为了确定利息, 我们还是有必要明确 $N$.

② 因为 $L_{t_1}$ 是在 $t_1$ 时才知道, 利息交换则在远期贷款到期日 $t_2$ 时进行, 所以是后期支付的.

### 4.4.3 FRA 合约方程

用图 4-5 的思想可以立即得到 FRA 的合成. 图 4-5 所示的是一笔本金为 $N$ 的固定利率贷款和一笔同样本金的浮动利率贷款的交换, 因此合约方程可表示如下

| 购买一个 FRA | = | $t_1$时开始$t_2$时结束的固定利率贷款 | + | $t_1$时开始$t_2$时结束的浮动利率存款 | (30) |
|---|---|---|---|---|---|

从图 4-5 的构造过程来看, 因为两个贷款本金均为 $N$, 大小相等从而相互抵消了, 所以 FRA 合约没有本金的信用风险, 而只有利率风险的交换. 事实上, 把公式 (18) 中得到的固定利率远期贷款的合约方程代入 (30) 得

| 购买一个 FRA | = | $t_2$时到期的贷款 | + | $t_1$时到期的存款 | + | $t_1$时开始$t_2$时结束的即期存款 | (31) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

这个合约方程又可以用来构造新的合成工具, FRA 剥离的应用就是一个例子.

*应用: FRA 剥离*

市场参与者用 FRA 合约来构造 *FRA剥离*, 进而可构造存款和贷款的合成, 并有助于对冲互换头寸. 我们通过一个基于 FRA 合约方程的例子来理解 FRA 剥离.

假定一个市场参与者想复制一笔 9 个月的固定利率贷款, 那么前面的合约方程意味着参与者应该在 $t_0$ 时以 $L_{t_0}$ 进行现金借款, 并买一个由两个相继的 FRA(一个 $3\times 6$FRA 和一个 $6\times 9$FRA) 组成的 *FRA剥离*. 这样就产生了一个 9 个月固定利率贷款的复制策略. 这里的 $3\times 6$ 表示 $t_2$ 是 6 个月后, $t_1$ 是 3 个月后.

## 4.5 期货: 欧洲货币合约

因为 FRA 的交易成本比较低, 所以远期贷款一般不在场外市场 (OTC) 交易. 欧洲货币期货是另一个不错的选择. 本节以欧洲美元期货为例来讨论欧洲货币期货, 并把它与 FRA 合约相比较. 通过比较会发现设计成功的金融合约的许多有趣方面.

FRA 合约包含了一个浮动利率贷款利息和一个固定利率贷款利息的交换. 在欧洲美元期货合约中, 未来贷款是*间接*交易的. 现金结算也只包含利息的交换. 然而它与 FRA 合约还是有一些不同之处的.

*欧洲货币期货*合约交易远期存款和贷款, 它们是如图 4-1 所示的同质化合约. 顾名思义, 这些合约只涉及*欧洲市场*上的远期存款和贷款. 它的*买方*是一个 3 个月期欧洲美元的潜在*存款者*, 并将锁定一个未来存款利率.

欧洲货币期货合约交割的不是存款本身. 在到期日 $t_1$, 合约以现金结算, 假设以 $Q_{t_0}$ 记市场上期货合约的报价, 则 3 个月期欧洲美元期货合约的*买方*"允诺" 在

$t_1$ 时存款 $100\left(1-\tilde{F}_{t_0}\frac{1}{4}\right)$ 美元, 并在 3 个月后接受 100 美元. 这笔贷款的隐含年利率可由下式算出:

$$\tilde{F}_{t_0}=\frac{100.00-Q_{t_0}}{100}. \tag{32}$$

这意味着市场报价和远期利率是通过公式

$$Q_{t_0}=100.00(1-\tilde{F}_{t_0}). \tag{33}$$

相联系的. 然而远期贷款与之有很大的不同, 远期贷款的利率计算惯例和货币市场收益率相同. 例如计算 $t_1$ 时的支付在 $t_0$ 的现值为

$$PV(t_0,t_1,t_2)=\frac{100}{(1+F_{t_0}\delta)}. \tag{34}$$

而期货合约用类似于贴现率的方法来计算远期贷款在 $t_0$ 时的价值

$$\tilde{PV}(t_0,t_1,t_2)=100(1-\tilde{F}_{t_0}\delta). \tag{35}$$

若想让两次的交易量相等, 即

$$PV(t_0,t_1,t_2)=\tilde{PV}(t_0,t_1,t_2), \tag{36}$$

公式 (34) 和公式 (35) 右边的两个远期利率就不能相等. 当然, 有很多原因会导致公式 (36) 左右两边不相等. 譬如期货市场要有盯市要求, 而 FRA 市场一般不需要. 由于盯市, 收益和损失每天都发生, 这些每天都产生的现金流就可能与隔夜融资利率有关. 因此, 从 FRA 市场上得到的远期利率需要进行调整才能得到欧洲美元期货的远期利率, 反之亦然.①

**例**

假设 $t_0$ 时期货市场价格为

$$Q_{t_0}=94.67, \tag{38}$$

对于一个 2002 年 12 月的第三个星期三到期的欧洲美元合约来说, 这意味着两件事. 首先, 该期间的隐含远期利率由下式给出:

$$F_{t_0}=\frac{100.00-94.67}{100}=0.053\,3. \tag{39}$$

其次, 合约要在 2002 年 12 月的第三个星期三交割

$$100\left(1-0.0533\frac{1}{4}\right)=98.67 \tag{40}$$

---

① 公式 (36) 在 $t_1$ 时的表达式为

$$PV(t_1,t_1,t_2)=\tilde{PV}(t_1,t_1,t_2). \tag{37}$$

在到期日这笔资金不是拿来存款，而是进行合约的现金结算. 举个例子，若在到期日 $t_1$，合约交割价为 $Q_{t_1} = 95.60$，这意味着隐含远期利率是

$$F_{t_1} = \frac{100 - 95.60}{100} = 0.044\ 0, \tag{41}$$

结算金额为

$$100\left(1 - 0.0440\frac{1}{4}\right) = 98.90. \tag{42}$$

因此原始合约的买方会得到补偿，就好像他存了 98.67 美元，而最终收回 98.90 美元. 每 100 美元净收益为

$$98.90 - 98.67 = 0.23, \quad 每100美元. \tag{43}$$

我们可以这样理解这笔收益：开始建立头寸时，未来 3 个月的 (远期) 存款利率为 5.33%，而在结算时下降到 4.4%.

事实上，上面的例子是现实情况的简化. 因为盯市的缘故，收益不会在执行日时一并结算，而是在和约买方的账户中逐渐累积的. 这些收益也会再获得一些利息，因而盯市的收益或损失也与应用于它们的利率变化密切相关，从而使情况变得更加复杂.

### 4.5.1 其他参数

期货合约中还有其他一些重要的参数. 我们只讨论合约的描述，而不讨论其中的细节问题.

下表中列举了 CME 欧洲美元合约的参数.

| | |
|---|---|
| 交割月： | 3 月, 6 月, 9 月, 12 月 (10 年期) |
| 交割 (到期) 日： | 交割月的第三个星期三 |
| 最后交易日： | 11.00 到期日之前的两个工作日 |
| 最小点 (minimum tick)： | 0.002 5(当月合约) |
| "点值"(tick value)： | 6.25 美元 |
| 结算规则： | 结算日的 BBA-Libor 利率 |

虽然欧洲美元合约的设计和惯例可能看起来比较怪，但它还算是一个成功的合约. 首先，用 $Q_{t_0}$ 代替远期利率 $\tilde{F}_{t_0}$ 报价，使合约类似于一个买卖短期国库券的期货合约，简化了相关的对冲和套利策略. 其次，正如前面提到的，合约用现金结算，这样就可以把获得贷款和锁定利率的功能成功的分离开来. 最后，$Q_{t_0}$ 和 $\tilde{F}_{t_0}$ 之间的线形关系也是值得一提的. 假设 $t_1$ 时的存款利率由下式确定

$$D(t_0, t_1, t_2) = 100(1 - \tilde{F}_{t_0}\delta). \tag{44}$$

由

$$\frac{\partial D(t_0,t_1,t_2)}{\partial \tilde{F}_{t_0}} = -\delta 100 = -25. \tag{45}$$

知 $D(t_0,t_1,t_2)$ 关于 $\tilde{F}_{t_0}$ 的变化率 (灵敏度) 是常数, 从而验证了二者之间确实是线形关系.

*TED 利差*

中长期国债 (T-Notes) 和欧洲美元 (ED) 期货利率之间的差称为 TED*利差*. 中长期国债利率是美国政府中期借款成本的一个度量, 而欧洲美元期货与短期私人借款成本相关, 因此 "TED 利差" 包含了信用风险因素. 交易商把欧洲美元期货进行剥离, 然后把它们与相近到期日的中长期国债进行交易. 用国库券 (T-Bills) 和欧洲美元期货也能产生一个类似的利差.

在不同的收益报价方式下, TED 利差的计算需要进行一些技术调整. 中长期国债用的是债券等价收益率, 而欧洲美元期货是采用类似于贴现率的方法来计算的. TED 利差的计算要求在调整这些差别的同时生成期货剥离. 对此需注意几个技术问题.

一旦算出 TED 利差, 交易商就会进行交易以从收益率曲线斜率和私有部门的信用风险的变化中获益. 例如, 如果交易商预料收益率的差别会变大, 它就会持有 TED 利差. 反之, 如果认为收益率差会变小, 他将卖空 TED 利差.

### 4.5.2 FRA 和欧洲美元期货的比较

把 FRA 和欧洲货币期货作一下简单的比较, 这对我们理解这两个概念是有帮助的. (1) 作为 OTC 合约, FRA 是更灵活的金融工具, 而欧洲货币期货合约是按预先订立的统一条款进行交易的. (2) 由于 FRA 的条款不必对外公开, 所以它在*保密方面*很有优势. 而欧洲货币期货合约的条款是要公开的. (3) 通常对 FRA 没有*保证金*的要求, *盯市的要求*也宽松一些, 一般只在结算时才公布资产总值的变化. 而欧洲货币期货既有保证金要求又有盯市的要求. (4) FRA 有*对手风险*, 而欧洲货币期货合约的信用风险是微不足道的. (5) FRA 是按利率报价, 而欧洲货币期货是以价格报价. 因此卖出 FRA 的交易商也可通过卖出欧洲货币期货来对冲其头寸. (6) 最后, 二者间一个有趣的差别在于它们的*可替换性*. 欧洲货币期货合约在下面意义下是可替换的: 即有相同到期日的合约可以互相抵扣, 即使它们是在不同时间为不同目的而签订的. FRA 合约却不能如此, 除非合约双方有一个具体的协议.

*凸性差异*

除了这些结构差异, FRA 和欧洲货币期货合约还有不同的凸性. 欧洲货币期货的定价方程关于 $\tilde{F}_{t_0}$ 是线性的, 而 FRA 的定价方程关于相应的 Libor 利率是非

线性的. 这就需要进行凸性调整, 这也是我们用不同的记号来表示两个远期利率的原因.

### 4.5.3 用欧洲货币期货对冲 FRA

对短期合约来说, 凸性和其他差别可能是微不足道的. 如果忽略凸性差异, 可不可以用欧洲货币期货来对冲 FRA 头寸? 反过来呢?

我们用一个例子来回答这个问题, 这个例子也说明了现实中对冲的一些复杂情况.

**例**

假设 2002 年 6 月 17 日欧洲货币期货的价格如下:

9 月价格 (交割日: 9 月 16 日)96.500(隐含利率 =3.500);

12 月价格 (交割日: 12 月 16 日)96.250(隐含利率 =3.750);

3 月价格 (交割日: 3 月 17 日)96.000(隐含利率 =4.000).

一个交易商想在 6 月 17 日卖一个名义本金为 100 000 000 美元的 $3 \times 6$FRA, 如何用这些期货合约来对冲这笔交易呢?

首先注意, 按照价值和结算日惯例, FRA 的存续期是从 9 月 19 日到 12 月 19 日共计 92 天, 并以 9 月 17 日的 Libor 利率进行结算. 另一方面, 9 月期货合约将以 9 月 16 日的 Libor 利率进行结算, 并且按 30/360 的天数计算惯例来计算计息时间. 由此可知二者的隐含远期利率也会有所不同.

令 $f$ 表示 FRA 利率, $\varepsilon$ 表示它与期货合约的隐含远期利率的差, 利用公式 (28), 本金 100 百万美元的 FRA 结算时价值为

$$\frac{100m((0.035+\epsilon)-\text{Libor})\frac{92}{360}}{(1+\text{Libor}\frac{92}{360})}. \tag{46}$$

注意到, 它是贴现到 9 月 19 日的, 并且一旦已知相关的 Libor 利率, FRA 的持有者就会收到这部分资金. 忽略盯市和其他一些影响, 一个具有类似存续期的期货合约的结算金额为

$$\alpha\left(1m(0.035\,0-\text{Libor})\frac{90}{360}\right). \tag{47}$$

注意至少两点不同. 首先, 期货合约的本金为 100 万美元. 其次, 按惯例期货合约中一个月以 30 天计, 而在 FRA 中是以实际天数计. $\alpha$ 是我们选取的能够对冲 FRA 头寸的期货合约数, 交易商必须选取 $\alpha$ 使得两次的结算值尽可能相近. 这样一来, 通过在这两种合约中建立反方向头寸就可以实现对冲.

#### 一些技术问题

对冲的过程中可能会遇到一些技术问题和实际困难, 我们还是以前面的例子来说明一下这个问题.

(1) 假设要对冲 (或定价)FRA 的某个剥离, 而不是使用已有期货合约的剥离调整单一 FRA, 使之适应于合同, 那么 FRA 的这个剥离就必须处理本金不断增加的问题. 若每个期货合约的本金是固定的, 那么就需要调整期货合约的数目.

(2) 如前所述, 期货市场上 3 个月按 90 天计, 而 FRA 合约是以这 3 个月中的实际天数计算的.

(3) 由于在定价公式中的凸性差异, 两种合约的隐含远期利率会不同, 此外由于 Libor 波动率的变化, $\varepsilon$ 可大可小.

(4) 两合约使用的 Libor 利率或许会有一两天的差别.

以上问题虽然是从一个具体的例子引出的, 但对于大多数对冲和定价有着普遍的意义.

## 4.6 现实中的复杂性

至此, 前面的讨论都忽略了现实中的复杂性. 我们做如下简化: (1) 忽略询价差; (2) 不考虑信用风险; (3) 忽略 FRA 中固定日期与结算日一般不相同这一事实, 实际上这是 FRA 合约中涉及的另一个日期. 下面来讨论这些问题.

### 4.6.1 询价差

我们从询价差 (Bid-Ask Spread) 开始, 用债券市场的构造来说明. 借助于债券市场复制远期贷款时, 买一份 $B(t_0,t_1)$ 债券, 卖空一份 $B(t_0,t_2)$ 债券, 因此必须用到 $B(t_0,t_1)$ 的卖方报价和 $B(t_0,t_2)$ 的买方报价. 这意味着一个远期利率的卖价为

$$1+F_{t_0}^{ask}\delta=\frac{B(t_0,t_1)^{ask}}{B(t_0,t_2)^{bid}}. \tag{48}$$

类似地, 当客户卖一个 FRA 时, 他要用到交易商和经纪人的买方报价. 通过债券市场, 得到

$$1+F_{t_0}^{did}\delta=\frac{B(t_0,t_1)^{bid}}{B(t_0,t_2)^{ask}}. \tag{49}$$

这意味着

$$F_{t_0}^{bid}<F_{t_0}^{ask}. \tag{50}$$

同样的询价差也可通过在货币市场使用询价差的货币市场合成工具创造:

$$1+F_{t_0}^{ask}\delta=\frac{1+L_{t_0}^{1ask}\delta^1}{1+L_{t_0}^{2bid}\delta^2}. \tag{51}$$

显然又有

$$F_{t_0}^{bid}<F_{t_0}^{ask}. \tag{52}$$

因此, 定价通常会产生双向价格.

在市场实践中, FRA 询价差不通过上述方式得到. FRA 利率的价差报价是以下面的方式计算的: 先从相应的 Libor 利率得到一个利率, 然后在它的两方都加上一个利差. 很多人也用流动性更好的欧洲货币期货来做市.

### 4.6.2 非对称性

用 FRA 进行对冲时还存在另一个问题: 来自利率头寸的净收益和净成本是不对称的. 这是因为, 不管是买 (支付固定利息) 还是卖 (接受固定利息), FRA 总是以 Libor 来结算. 但 Libor 是一个卖方利率, 这就产生了一种不对称.

先考虑浮动利率贷款成本的一个对冲. 当一个公司要对冲浮动利率贷款成本时, 贷款现金和对冲策略的利率都是以 Libor 为基础的, 这意味着

- 公司向给它提供贷款的银行支付 Libor + 浮动额.
- 公司向 FRA 的对手支付固定的 FRA 利率, 以对冲这种浮动贷款的成本.
- 公司从 FRA 的对手收到 Libor.

把公司所有的收入和支出相加, 得到净贷款成本为 FRA利率+浮动额.

现在考虑当一个公司对冲 3 个月浮动收入时的情况. 现金头寸的相关利率采用 Libid(欧洲市场上的买方利率), 但 FRA 总是以 Libor 结算. 所以现在情况变为

- 公司接受 Libid, 假定零浮动额.
- 公司接受 FRA 利率.
- 公司支付 Libor.

因此, 公司的净收益为 FRA-(Libor-Libid).

## 4.7 远期利率和期限结构

第 15 章将讨论固定收益金融工程的具体框架, 然而一些期限结构的基本模型还是有必要在这里介绍一下. 这将有助于我们更清楚地理解某些记号和基本概念.

### 4.7.1 债券价格

令 $\{B(t_0,t_i), i=1,2,\cdots,n\}$ 代表债券价格族, 其中每个 $\{B(t_0,t_i)\}$ 表示在 $t_i$ 时支付 1 美元的无违约风险零息债券的价格. 这些 $\{B(t_0,t_i)\}$ 也可以看成用来计算无违约风险现金流现值的贴现向量.

例如, 给定一项复杂的无违约风险资产 $A_{t_0}$, 它由在任意一系列时间 $t_i$, $i=1,\cdots,k$ 支付确定的现金流 $\{C_{t_i}\}$. 利用 $\{B(t_0,t_i)\}$ 很容易得到这笔资产 $t_0$ 时的价值为

$$A_{t_0}=\sum_i C_{t_i}B(t_0,t_i). \tag{53}$$

这就是说, 只要把 $t_i$ 时的现金流与 $t_i$ 时 1 美元的现值相乘, 然后把这些结果对所有的 $i$ 求和即可.

这个想法可以立即应用于国库券的定价. 给定一个面值为 1 美元, 在 $t_i$ 时按息票率 $c\%$ 支付利息的国库券, 它的价值很容易由前面的公式求出, 其中最后一个现金流包括本金和利息.

### 4.7.2 远期利率的含意

本章得到了重要的无套利等式

$$1+F(t_0,t_1,t_2)\delta=\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}, \tag{54}$$

为了避免可能的混淆, 这里的 $F(t_0,t_1,t_2)$ 没有缩写,[①]它表示从 $t_1$ 开始到 $t_2$ 结束应用于远期贷款的远期利率. 把 $\{B(t_0,t_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 中所有债券的无套利关系写出来, 有

$$1+F(t_0,t_0,t_1)\delta=\frac{B(t_0,t_0)}{B(t_0,t_1)}, \tag{55}$$

$$1+F(t_0,t_1,t_2)\delta=\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)}, \tag{56}$$

$$\cdots\cdots \tag{57}$$

$$1+F(t_0,t_{n-1},t_n)\delta=\frac{B(t_0,t_{n-1})}{B(t_0,t_n)}. \tag{58}$$

相继用前一等式替换等式右边的分子, 并注意对第一个债券有 $B(t_0,t_0)=1$, 由此得到

$$B(t_0,t_n)=\frac{1}{(1+F(t_0,t_0,t_1)\delta)\cdots(1+F(t_0,t_{n-1},t_n)\delta)}. \tag{59}$$

这个结果很重要, 即债券价格族 $\{B(t_0,t_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 可以用远期利率族

$$\{F(t_0,t_0,t_1),\cdots,F(t_0,t_{n-1},t_n)\}. \tag{60}$$

来表示. 因此如果给定了所有的债券价格, 我们就可以确定远期利率.

**注记**

第一个远期利率 $F(t_0,t_0,t_1)$ 在 $t_0$ 时确定, 并且适用于 $t_0$ 时开始的贷款, 因此它也是 $t_0$ 时的即期利率:

$$(1+F(t_0,t_0,t_1)\delta)=(1+L_{t_0}\delta)=\frac{1}{B(t_0,t_1)}. \tag{61}$$

① 这里的 $\delta$ 没有 $i$ 下标, 这意味着每个 $t_i-t_{i-1}$ 是常数, 且 $\delta=(t_i-t_{i-1})/360$.

把它写成

$$B(t_0,t_1)=\frac{1}{(1+L_{t_0}\delta)}. \tag{62}$$

债券价格族 $\{B(t_0,t_i), i=1,2,\cdots,n\}$ 可以看成是贴现因子, 市场参与者用它们来得到无违约风险现金流的现值. 因此我们看到远期利率模型对描述收益率曲线和贴现率曲线很有帮助.

## 4.8 惯　例

类似于欧洲存款利率, FRA 是以询价差形式双向报价的, 典型的 3 个月期和 6 个月期系列的 FRA 报价如下.

**例**

*3 个月系列具有以下形式:*

| | | |
|---|---|---|
| 1× 4 | 4.87 | 4.91 |
| 2× 5 | 4.89 | 4.94 |
| 3× 6 | 4.90 | 4.95 |
| ··· | | |

*第一行表示的是 1 个月后开始的为期 3 个月的远期贷款利率, 第二行是指 2 个月后开始的 3 个月期远期贷款利率……依此类推.*

*6 个月系列具有以下形式:*

| | | |
|---|---|---|
| 1× 7 | 4.87 | 4.91 |
| 2× 8 | 4.89 | 4.94 |
| 3× 9 | 4.90 | 4.95 |
| ··· | | |

*根据这个表, 如果某客户想锁定 3 个月后 6 个月期的固定付款利率, 对 1 百万美元的本金, 他会买 3 × 9 的 FRA 并支付 4.95%的利率, 这 6 个月 FRA 的实际净支付为*

$$\frac{1\ 000\ 000\left(\frac{L_{t_3}}{100}-0.049\ 5\right)\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\frac{L_{t_3}}{100}\right)}, \tag{63}$$

*$L_{t_3}$ 是 3 个月后市场上能观察到的 6 个月期 Libor 利率.*

另一个惯例是 FRA 的买方和卖方都以 Libor 作为参考利率. Libor 作为一个卖方利率, 人们可能会认为卖出 FRA 的客户会得到比 Libor 低的利率, 事实并非如此, 因为参考利率是不变的.

## 4.9 一个题外话：剥离

在结束本章之前我们讨论另外一种金融工具, 它是等价于无违约风险折价债券 $B(t_0, t_i)$ 而又最接近实际的金融工具, 称为剥离. 美国剥离在 1975 年就已存在, 而英国剥离出现于 1997 年.

考虑一个长期直接国债、一个德国债券或一个英国金边债券. 假设没有隐含 (implicit) 期权. 这些债券每隔一个固定时期付息一次, 它们的天数计算惯例和付息间隔会有所不同, 但本质上都是标准的长期债务. 但它们不是我们本章讨论过的零息债券.

剥离是从附息国库券引出的. 市场参与者买了长期附息国库券, 然后把每一个息票利息与本金剥离开, 分别将它们进行交易. 这样的债券等价于零息债券. 不同的是, 如果有必要, 它们还可以重新组合成原来的附息债券.

政府债券市场的监管机构, 如英国的英格兰银行或美国财政部都为债券的剥离提供了必要的设施和便利, 并指定了可剥离的证券.①注意, 只有一些特殊的交易商有剥离和重组债券的权利, 他们把账户中的债券进行剥离, 然后把剥离后的债券分别出售.②例如一个 10 年期金边债券被剥离成 20 次利息支付和本金, 这样就产生了 21 个零息债券, 到期日分别为 6 个月、12 个月、18 个月、24 个月等.

## 4.10 结　　论

本章用简单的例子阐明了有关远期贷款和远期利率协议的金融工程应用, 得到了新的合约方程, 并介绍了远期利率 (Libor) 过程. 更重要的是，本章还进一步发展了基于现金流操作的简单图示的金融工程方法.

## 参 考 文 献

除了本章讨论的金融工具以外, 还有许多包含更复杂参数的固定收益金融工具. 其中一些会在后面的章节里讲到. 读一些有关这些工具技术方面的书是很有帮助的. 其中两本是: Questa(1999) 和 Tuckman(2002), 另外还有 Flavell(2002) .

---

① 剥离一个金边债券的成本不高于 2 美元, 且几分钟内就可完成. 虽然这也根据市场环境而变, 但在美国和英国大约有 40% 的债券被剥离.

② 把一些债券设计成可剥离的原因有: (1) 大额债券的发行需要指定 (designated); (2) 应该尽量使债券的利息支付日期重合, 这样当剥离一个两年和一个四年期债券时, 则这两个债券前两年的剥离是可交换的, 从而提高了流动性, 并使得它们的到期日更一致.

# 习 题

1. 你以价格 $Q_0$=94.13 和 5%的初始保证金买了一个 1 欧洲美元的期货合约. 持有此合约 5 天后通过建立一个反方向头寸把它卖出. 其间你观察到以下的交割价格:

$$\{Q_1 = 94.23, Q_2 = 94.03, Q_3 = 93.93, Q_4 = 93.43, Q_5 = 93.53\} \tag{64}$$

(a) 计算逐日产生的收益或损失.

(b) 假设这 5 天内的即期利率固定为 6.9%, 你在清算公司账户上得到或支出的总利息为多少?

(c) 交割时全部的收益和损失为多少?

2. 一家小银行的财务主管以 6.73%的利率借入 3 个月期的资金 3 个月, 同时以 7.87%的利率贷出 6 个月期的资金, 资金总额为 38 百万美元. 为了对冲到期日不匹配的风险敞口, 他需要在 3 个月后再借 38 百万, 并用一个 FRA 来进行对冲.

市场上有来自 3 个交易商的下列报价:

| | | |
|---|---|---|
| 银行 A | 3 × 6 | 6.92−83 |
| 银行 B | 3 × 6 | 6.87−78 |
| 银行 C | 3 × 6 | 6.89−80 |

(a) 这个财务主管的风险暴露是多少? 以现金流示意图表示其结果.

(b) 假设没有其他成本, 计算这个财务主管赢亏平衡的远期利率.

(c) 他能获得的最好 FRA 利率是什么?

(d) 如果交割时的 Libor 利率为 6.09%, 计算他的交割金额.

3. 一家公司将在 3 个月后获得一笔 3 个月的 7 百万美元的贷款, 现行的 3 个月期利率报价是 5.67 到 5.61. 欧洲美元期货价格为 94.90.

假设 3 个月后 3 个月期的存款利率变为 5.25%, 欧洲美元期货价格为 94.56.

(a) 期货价格变化了多少点?

(b) 如果这个投资者想锁定目前的利率, 那么他应该买/卖多少期货合约?

(c) 以 94.90 的价格买入期货合约的投资者会有多少收益 (损失)?

4. 假设市场参与者得知英国银行家协会 (BBA) 将重新确定计算日元 Libor 的银行名单. 在未来某个时间, 一个或多个较 “弱” 的银行会被较 “强” 的银行取代.

这里的问题不是由于银行名单中成员变强是否会使日元 Libor 下降. 事实上, 由于市场运动, 即使小组里有更强的银行加入, 日元 Libor 最终还可能会显著上升. 相反, 值得期待的是相对于其他的日元利率如 Tibor, 伦敦的日元利率 Libor 应该下降. 因此, 要想从 BBA 的这一决定中受益, 市场参与者必须构建一个头寸, 使得市场变化产生的风险被消除掉, 并且 “唯一” 相关变数仍然由 BBA 决定.

(a) 一个交易商如何在不冒太大风险的情况下从这种变化中受益?

(b) 用现金流示意图来说明这是如何实现的.

(c) 以事实说明能够建立什么样的 FRA 利差头寸. 确信该头寸对市场运动是中性的并可构造出来, 唯一显著的变数是 BBA 的决定.

(摘自 IFR 1267 期) 上周英国银行家联盟 (BBA) 决定把一家日本银行从日元 Libor 的银行小组中排除出去后, 有些交易商受到了损失. 英国银行家联盟 (BBA) 的决定公布的前一天, 市场的定价没有显著变化.

在此之前, 有报道称: 许多交易商通过一个叫二进五的远期利率协议利差合约, 以大约 17bp 卖空了 Libor/Tibor 利差. 这实际上是在打赌该日本银行将继续留在 Libor 小组. 当 1 月 20 号星期三 BBA 的决定公布后, 利差从 5bp 左右变到了 22bp 左右, 给交易商造成了盯市损失. 一些人也在一年期日元/美元 Libor 基差互换的急剧变动 (从 26bp 到 14bp) 中陷入困境.

交易商的麻烦都是由 BBA 的决定引起的, 这个决定导致一家日本银行被一家外国银行代替, 且把中国银行、花旗银行、东海银行和樱花银行也排除掉, 而新加入了德意志银行、Norinchukin 银行和 WestLB. 这种变动立即提高了利率确定银行小组总的信用等级, 从而进一步引起日元 Libor(组员银行在日元货币市场上筹集资金的平均成本) 在一日内下降了 8bp. 交易商称: 一家日本银行等价于日元 Libor 利率下降 5bp, 而除去中国银行则等同于下降 1bp 或者 2bp.

如果不考虑即刻的交易损失, 人们对利率确定小组的变化有不同反应, 有些人表示赞成, 他们认为先前的小组不能代表日元现金业务.

一位日元互换交易商说: "大多数现金交易都是在伦敦的外国银行进行的, 小组中有一半是日本银行没有道理." 他还说, 因为小组中有多家日本银行, 使得日元 Libor 利率超过了大多数日元现金交易的积极参与者能够自己筹集资金的界限.

然而也有人表示了不同意见. "从各个方面来看, BBA 现在在日本失去信誉了," 一位美国银行货币市场交易商说.

BBA 官方称, 银行小组成员是由 BBA 的外汇和货币市场顾问小组选择的, 且由 BBA 的 Libor 控制小组秘密提名和讨论. 他们说顾问小组的目的就是保证选出的小组能广泛地反映"银行间存款市场的平衡".

5. 假设你被新西兰一家金融公司聘用, 并很快有机会参与市场交易. 你想为你的客户锁定一个 3 个月的贷款成本 (以新西兰纽币计算). 你考虑一个新西兰纽币的 $1 \times 4$ 的 FRA, 但发现它因市场深度不够而被过高定价了.

所以你转而考虑澳大利亚元. 澳元 FRA 流动性非常好, 且事实证明澳元和新西兰纽币远期很容易获得.

你还有如下的数据:

| | | |
|---|---|---|
| 澳元/新西兰纽元 | 即期: | 1.17/18 |
| | 1 个月远期: | 1.18/22 |
| | 3 个月远期: | 1.19/22 |
| | 4 个月远期: | 1.28/32 |
| 澳元 FRA's | $1 \times 4$ | 8.97 |

(a) 说明你怎样用这些数据创造一个 $1 \times 4$ 新西兰纽币.

(b) 表示出现金流.

(c) 与直接得到一个 $1 \times 4$ 新西兰纽币相比, 你这样做的头寸风险是什么?

(d) 为了总结从该练习中学到的知识 (如果有的话), 想一下, 你是否认为 FRA 和货币远期之间一定有套利关系? 给出解释, 最好提供相关公式.

6. 已知如下信息

| | | |
|---|---|---|
| 三个月 Libor | 3.2% | 92 天 |
| $3\times 6$FRA | 3.3%~3.4% | 90 天 |
| $6\times 9$FRA | 3.6%~3.7% | 90 天 |
| $9\times 12$FRA | 3.8%~3.9% | 90 天 |

(a) 说明如何从一个 3 个月贷款出发构造一个 9 个月固定利率合成贷款, 画出现金流示意图.

(b) 9 个月贷款的贷款成本是多少?

# 第 5 章　互换工程简介

## 5.1　引　　言

金融机构、投资者以及大公司并非对有形的股票、债券或信用产品本身有什么特别的偏好，他们所希望的只是从股票价格或利率敞口中获益，或是对冲与它们相关的风险. 投资者要从股票或债券的投资中获得回报，金融机构则要对冲利率风险、汇率风险或信用风险. 在这里必须有商品作为原材料，但即使这样，人们的目的也不是买卖商品本身，而是买卖与商品价格有关的风险.

既然目的是要获得股价指数或利率敞口，或对冲与它们相关的风险，那么决策者们为什么要在存在其他更好替代物的情况下买卖这些有形的资产呢？应该注意，买卖现金资产有很多负面影响. 首先，它们需要或者会产生现金，因此就存在资金的融通，并且产生的现金需要投资，而这将会影响到资产负债表. 其次，买卖资产的过程就会产生资本利得或资本损失，这意味着交易者必须承担相应的纳税义务. 此外在各种资产的实际买卖中还会有监管干预. 再次，某些资产可能不容易进行买卖，例如，为了得到与标准普尔 500 相关的回报，投资者需要买入 500 种股票，然后定期调整他的资产组合以正确地跟踪标准普尔 500 指数. 这是一件费财费力的事. 最后一点是，为了获得相关回报的敞口而当场买入某些资产，投资者要支付现金，这样可能产生某种信用风险.

互换可以完成同样功能，但完全没有上述缺点. 互换不需要任何初始现金支付. 我们可以在不买入债券的情况下，通过支付市场浮动利率来获得相应的固定利率. 由于所希望的敞口是通过交换现金流获得，故互换不存在信用风险. ① 最后，当所希望的敞口是通过一个互换合约获得时，税收和监管方面的问题也会变化，并且可能会变得对交易双方都更有利.

互换之所以成为金融工程中的核心概念之一，还有另一个原因，那就是构造各种互换的逻辑方法本身正变成一种基准，在互换市场中运用的这些方法可能是进行定价、对冲以及风险管理最适宜的市场化方法.

**银行业的一个实例**

首先提出一个简单问题，什么是银行？问题的答案依赖于我们所关心的银行的

---

① 这里假定了安排此项交易的互换中介是 AAA 评级的机构，实际中也常是这样. 互换可能会有对手风险，但在近来的实践中，一旦互换的盯市价值变负就要求进行抵押.

类型. *货币中心银行*是一个具有各种各样功能的综合金融机构. 其中很多功能涉及复杂的金融、数学和数值方法. 另一方面, *社区银行*, 或称银行的分支机构, 其营运就相对简单多了. 它们的核心业务是收集存款, 向客户发放贷款, 除此之外还履行像发放信用证、信用卡、抵押贷款业务以及转账、汇兑等简单的服务. 这些金融活动可能并不像金融投资或贸易投资那么复杂繁琐, 而且获得的利润也没有那么高, 但它们是最基本的日常经济活动. 以贷款为例, 用来买车的客户贷款, 以及用来进行金融投资、进出口贸易的商业贷款都是一些基本的银行活动.

主要面向零售客户的*社区*银行的功能是什么呢? 这些社区银行并不在利率或股票市场的变动方向上建立头寸. 它们在这些市场所具备的专业知识非常有限. 社区银行也不在远期利率协议、外汇远期或其他相关衍生品合约市场盯市. 社区银行所做的是对家庭或企业进行评估, 然后向他们发放用于像家庭购车或企业经营资金这类贷款. 擅长于这种特殊活动的银行知道怎样去评估客户的*信用*.

换句话说, 从金融工程的观点来说, 传统的银行业务并不需要对利率的变动方向建立头寸. 清楚这一点后就会发现两个问题: 一方面零售客户希望贷款的到期日*较长*, 并且是支付固定利率; 另一方面当客户*存款*时, 他们却希望存款的期限 (相对而言) 较短. 因此, 传统的银行可能有时将不得不开展这样的业务: 同意在较长一段时间内接受*固定*利率, 而在相对较短的时期内*支付*浮动利率, 如此一来, 就产生了*利率风险*.

银行承受上述风险还有另外一个原因. 一般情况下, 收益率曲线是上翘的, 由此知短期贷款的利率较低, 而长期贷款利率相对较高. 所以, 当短期国债的利率为2%时, 10 年期的中长期债券收益率可能会达到4.5%, 私人信贷利率可能要更高. 例如, 在银行间市场拆借时, 通常会在此基础上再加 40 个基点的利差, 这样就使得短期借款的利息为

$$\text{6 个月的基准利率} + \text{信用利差} = 2.00\% + 40\text{bp} = 2.40\% \tag{1}$$

这些资金之后被借出时, 若期限是 10 年或更长, 那么利率可能会超过 5%.

因此存在着这样一种导向: 先从银行间市场*借入短期资金*, 然后作为长期贷款借给零售客户, 特别地, 当利率环境比较稳定且短期利率急剧波动可能性不大时, 这种倾向更明显. 然而, 一个社区银行可能没有专门的研究部门去预测利率的变动, 当利率曲线很陡峭时, 银行的管理层还可能受到诱惑去借入短期而贷出长期, 这也会产生利率风险.

利率互换 (IRS) 就是为了对冲和管理这样的利率风险而产生的. 事实上, 互换已经成为规模最大、流动性最强的一类金融工具. 而且很多金融从业者将*互换曲线*视为分析收益率曲线的基准.

## 5.2 工具: 互换

想象两列具有不同特征的现金流. 它们可以由任何过程产生, 比如由一种金融工具、一项生产活动或者一个自然现象. 它们也都依赖于不同的风险因子. 原则上, 我们可以设计一项合约来交换这两个现金流. 这个合约就是我们所说的*互换*. 为了设计一个互换, 我们要用到以下两条原则.

(1) 互换只是纯粹用来安排两个现金流互相交换的, 所以它不需要任何初始现金支付, 也就是说, 一个互换合约的初始价值应该是 0;

(2) 合约指定了一个*互换利差*, 可以通过调整这个利差使互换双方都愿意交换拥有的现金流.

一个典型的交换如图 5-1 所示, 图中, 第一个现金流从 $t_1$ 时开始, 以后周期性地在 $t_2, t_3, \cdots, t_k$ 等时刻发生, 这 $k$ 个现金流的大小用下面的符号表示

$$\{C(s_{t_0}, x_{t_1}), C(s_{t_0}, x_{t_2}), \cdots, C(s_{t_0}, x_{t_k})\}. \tag{2}$$

这些现金流依赖于一个市场或信用风险因子 $x_{t_i}$ 的向量, 现金流也依赖于*互换利差*或*互换率* $s_{t_0}$. 通过选择 $s_{t_0}$, 可以使得互换的初始价值为 0.

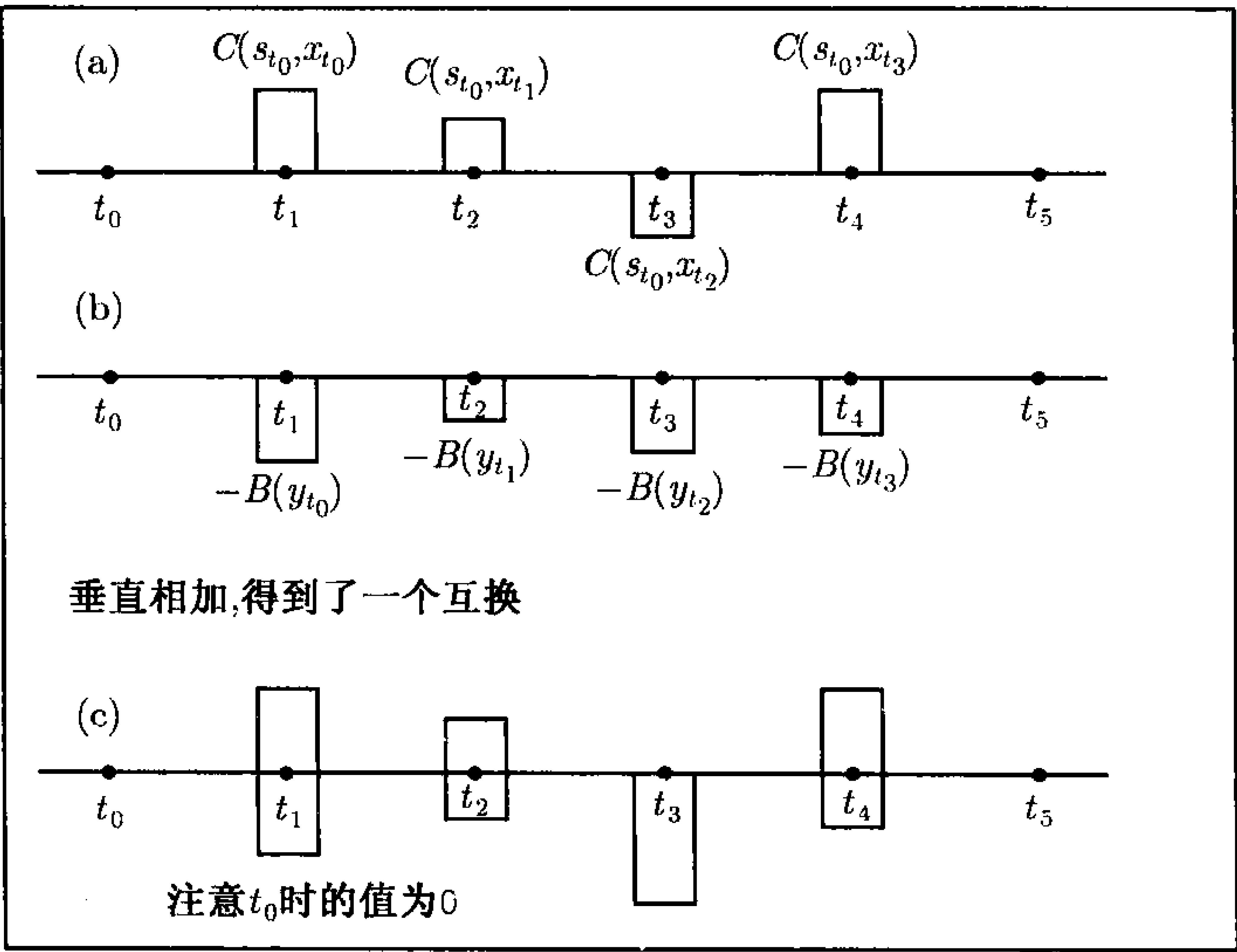



图 5-1

图 5-1b 代表了另一串现金流:

$$\{B(y_{t_0}), B(y_{t_1}), B(y_{t_2}), \cdots, B(y_{t_k})\}, \tag{3}$$

该现金流与某些别的风险因子 $y_{t_i}$ 有关.

此互换规定了在交割日$\{t_i\}$用$\{C(s_{t_0},x_{t_i})\}$来交换$\{B(y_{t_i})\}$. $s_{t_0}$在初始时刻$t_0$确定, 使得互换双方都愿意在没有初始支付的情况下进行互换交易, 如图 5-1c 所示. 其中一方支付$C(\cdot)$, 得到$B(\cdot)$, 对手方则正好相反,[①] 接受$C(\cdot)$并支付$B(\cdot)$. 显然, 如果现金流表示的是同种货币, 就没有必要在每一时间$\{t_i\}$真正交换两个现金流, 而只需要简单地由一方向另一方支付其差额. 实际操作的情况看起来更像图 5-2 所示. 当然一方的支出就等于对方的收入.

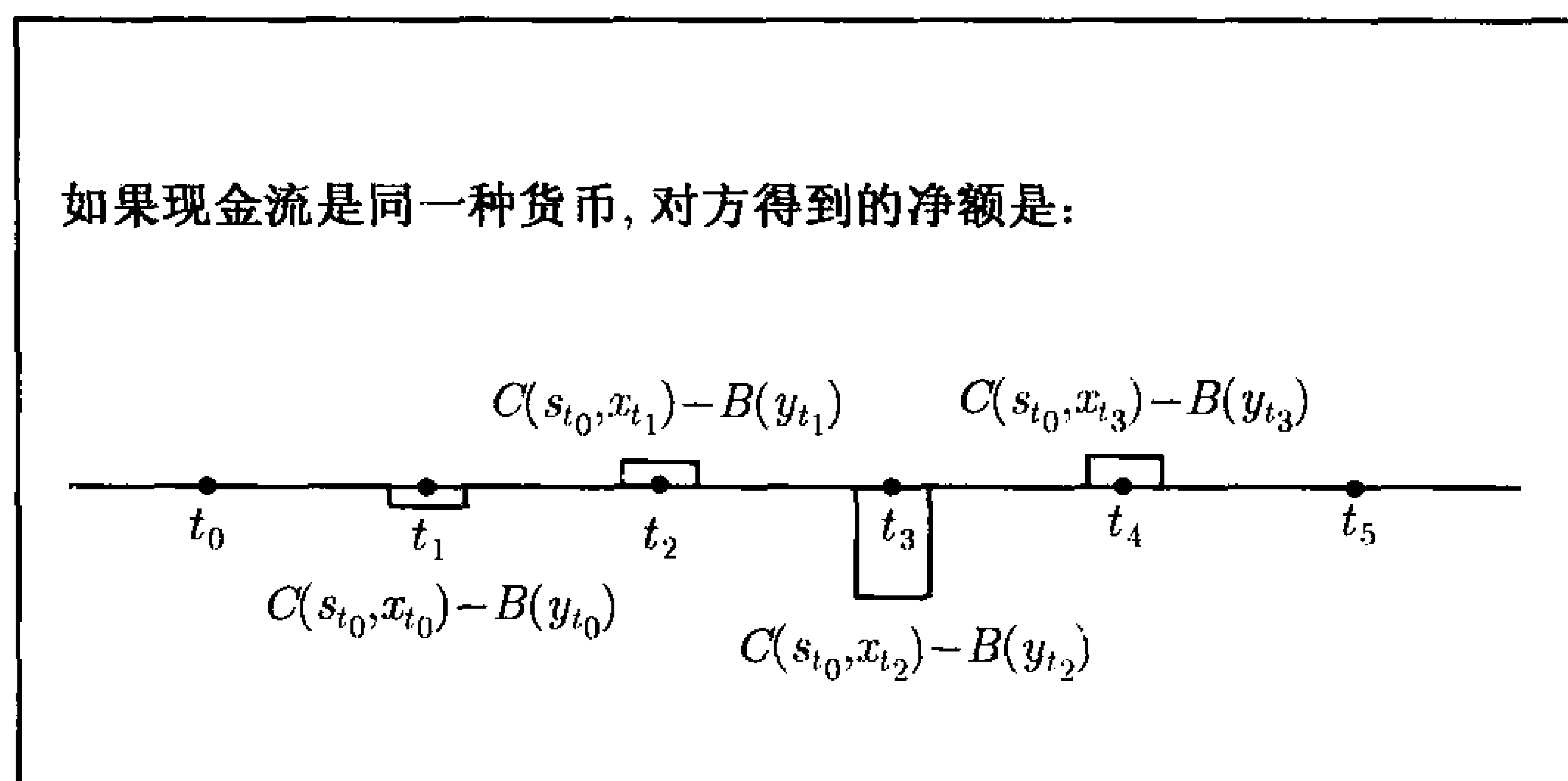



图 5-2

如果双方愿意在没有初始费用的情况下交换两个现金流, 这两个现金流的市场价值在合约签订时肯定是一样的, 而不管它们隐含的风险多么不同. 否则, 一方肯定会要求另一方支付初始费用, 也就是两个现金流的价值之差. 当然, 随着时间的推移, 参数$x_{t_i}$和$y_{t_i}$会发生变化, 从而会使一个现金流比另外一个现金流更加"值钱", 所以一个互换合约的价值在结束时可能是正的, 也可能为负的.

**例**

假设你签了一份互换合约, 合约规定你可以接受 7%的美元回报, 支付 6%的欧元利率. 按已预定的互换利率$e_{t_0}$每 3 个月交换一次. 在初始时刻$t_0$, 给定正确的互换利差, 合约具有价值 0. 这意味着在$t_0$, 支出的现金流和流入的现金流价值相同. 但是, 一旦合约生效以后, 美元利率相对欧元利率可能会下降. 这就使得按 7%利率接受的美元现金流将比支出的欧元更值钱.

结果是, 作为美元现金的接受方, 合约的价值将从零变为正值, 很显然对支付方来说, 合约的价值就将为负的了.

当然, 在时间$t_1,t_2,\cdots,t_n$发生的实际现金流交换远比我们在图 5-2 中所示的要复杂得多. 我们的支付和收入到底是什么? 基于什么样的价格? 什么时候进行观察? 如果没有按时交割的话, 会有什么惩罚? 如果$t_i$碰巧是节假日, 又会怎么办呢? 一个典型的合约要标明很多这样的参数, 这些参数以及其他一些问题都在国际互换

① 这里使用了"现金流"这一术语, 但在实际中交换的也可能是有形物品.

和衍生品协会所建立的文件中给出了明确的规定.

## 5.3 互换的类型

互换的种类很多, 实际上任意的现金流序列都可以用来生成一个互换. 由于篇幅所限, 本书不可能讨论所有相关的内容. 这里我们将集中选取几种重要的互换结构进行详细讨论, 而不是对每种结构都浅尝辄止. 我们希望隐含的互换工程方法能够直接扩展用于其他种类的互换.

### 5.3.1 非利率互换

大多数互换都和利率有关, 已知的有 Libor 以及公司和银行资产负债表中的收益率曲线敞口. 但除此之外互换的种类还有很多, 为了强调这一点, 我们从非利率互换开始讨论. 其中最新和最重要的是信用违约互换. 我们将在以后另辟一章来讨论信用工具, 此处只是简略地介绍. 本章将主要讨论两类互换: *权益互换*和*商品互换*.

1. *权益互换*

有一类互换, 它用一种股票或股票指数的收益去交换其他资产的收益, 通常是交换基于 Libor 的现金流, 这类互换称为*权益互换*.

在权益互换中, 互换双方交换两列现金流, 其中一列是由红利或资本利得 (损失) 产生的; 另一列则基于某种货币市场工具, 通常是 Libor. 一旦清楚地界定了它们, 这两列现金流的价值就可以分别加以估计. 然后在相应的 Libor 基础上分别加上或减去一个*利差*, 就可以使双方在没有初始支付的情况下愿意交换这些现金流. 使得这种交换具有法律约束力的合约叫做权益互换.

因此, 一个典型的权益互换由以下几个要素构成: 初始时间 $t_0$, 股票指数 $I_{t_i}$, 货币市场利率如 Libor $L_{t_i}$. 在时间点 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 互换双方用基于 $I_{t_i}$ 百分比变化的现金流, 记为

$$N_{t_{i-1}}\left(\frac{I_{t_i} - I_{t_{i-1}}}{I_{t_{i-1}}}\right) \tag{4}$$

来交换基于 Libor 的现金流: $N_{t_{i-1}} L_{t_{i-1}} \delta$ 加上或减去一个利差; 其中 $N_{t_i}$ 是名义本金, 它不用交换.

注意, 名义本金允许在每个 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 时间点上重新设定, 并且允许双方定期调整他们关于特定股票指数上的头寸. 在权益互换中, 名义本金也可以是常值 $N$.

**例**

*图 5-3 表示了由某种股票指数 4 年间所产生的资本利得 (损失) 加上红利的现金流, 用该现金流去交换基于 3 个月 Libor 减去 20 个基点的现金流, 每 90 天交换*

一次. 名义本金是 1 百万美元, 在 $t_0$ 时尚不知道每个时间点上要交换的现金流是多少.

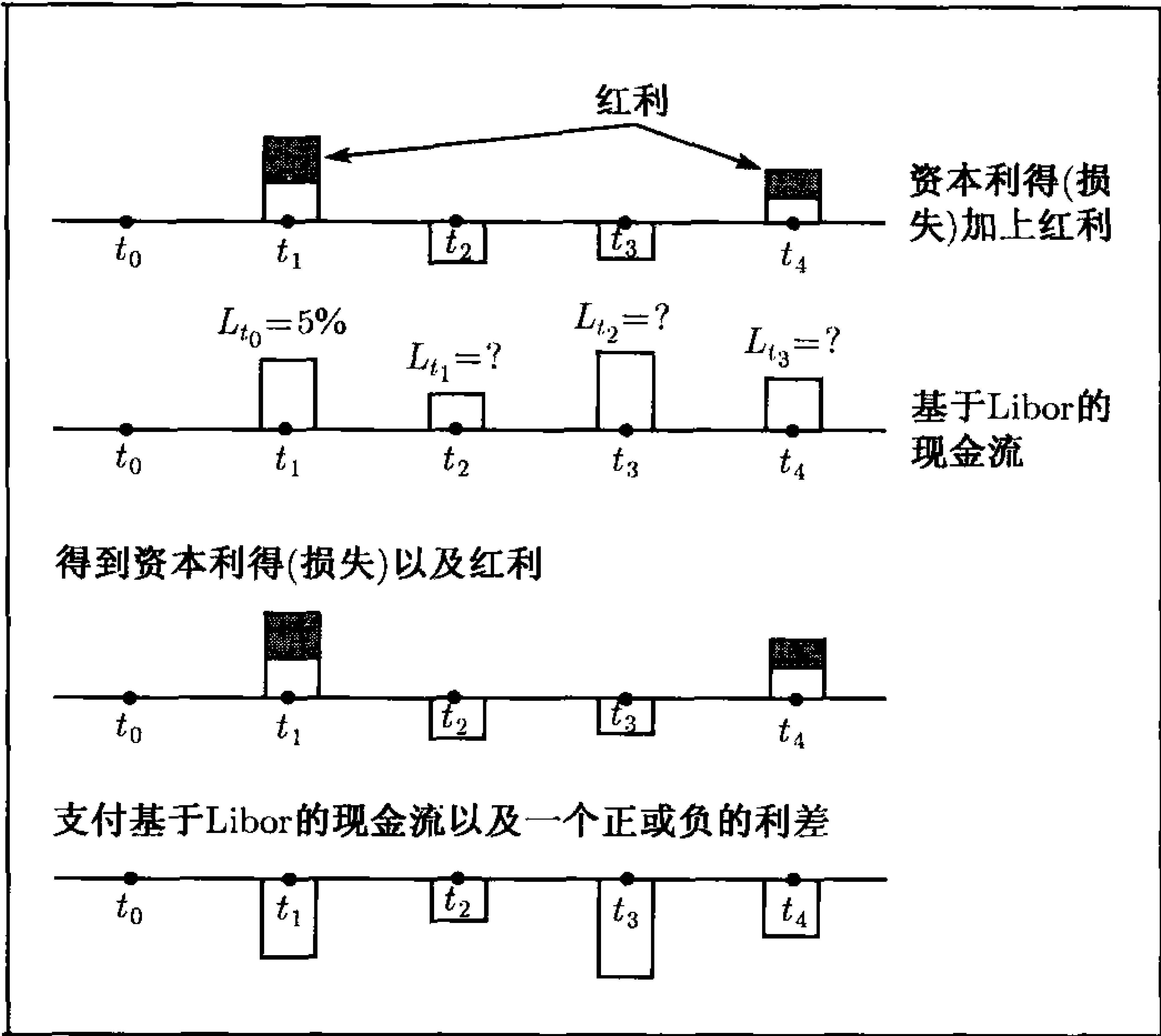



图 5-3

在时间 $t_1$, 假设我们有以下数据

$$I_{t_0} = 800, \tag{5}$$

$$I_{t_1} = 850, \quad L_{t_0} = 5\%, \quad 利差 = 0.20. \tag{6}$$

则 $t_1$ 时与权益有关的现金流为

$$1m\left(\frac{I_{t_1} - I_{t_0}}{I_{t_0}}\right) = 1\ 000\ 000(0.062\ 5) = 62\ 500. \tag{7}$$

与 Libor 有关的现金流为

$$1m\,(L_{t_0} - s_{t_0})\,\frac{90}{360} = 1\ 000\ 000(0.05 - 0.002)\frac{1}{4} = 12\ 000. \tag{8}$$

剩下的未知现金流将随着时间的移动逐个变为已知, 每当支付红利时, 股价就要发生变动. 利差将从利率中减去.

有些权益互换是在两种股票指数的现金流间进行. 下例就是此类互换.

**例**

在一个权益互换中, 互换持有者支付标准普尔 500 的回报率, 以交换另一种指数, 比如说日经的回报. 这种互换持有人获得的好处是: 签订互换时不需要任何先期支付.

当然, 这项交易同样可以由卖出标准普尔 500 的期货, 买入另一种指数期货来实现. 但是权益互换简化了对指数的跟踪.

在本章的后面, 我们将讨论权益互换合约的几个应用.

2. 商品互换

商品互换的整体结构与权益互换类似, 并且跟权益互换一样, 商品互换的种类主要也有两种. 互换双方可以：(1) 交换基于某种商品指数的固定支付和浮动支付; (2) 交换基于一种指数的支付和基于某个货币市场利率的支付.

考虑一个炼油厂, 它买入原油, 卖出精炼产品. 炼油厂可能会发现将原油的价格锁定在一个固定水平对他们来说很有好处, 因为这样, 他们可以更好地安排未来的生产活动. 通过一个互换, 炼油厂就希望得到浮动的石油价格, 而对每桶原油支付固定价格.

这样的商品互换中可以是任何的商品, 包括钢铁、贵金属和能源等.

**例**

日本的石油公司贸易商行一般都是原油少, 石油产品多. 他们就会介入短期的互换市场来弥补这种不足, 并通过浮动–固定价格互换来进行投机. 由于其重油冶炼能力过剩, 日本的重油产品多而轻油产品少. 这种情况已经产生了新加坡轻油产品对日本重油产品的互换市场.

还有一个称为 "纸张平衡" 的市场, 它的主要基地在新加坡, 但正在东京发展. 这是一种石油工具, 通常是用现金交割, 而不是实际的石油交割.(IFR, 第 946 期)

由于商品互换的思想和权益互换相似, 所以我们将商品互换的进一步讨论推延到本章的练习里.

3. 信用互换

这是非常重要的一类互换并且其重要性与日俱增. 信用互换有很多变体形式, 他们将在以后其他的章节单独讨论. 这里我们将简单地阐述其主要思想. 无违约风险互换(CDS) 是互换合约中一类主要的工具, 这是本章重点考虑的对象.

如果互换所交换的现金流有不同的特征, 则可以认为这两个现金流具有两种不同的信用.

如图 5-4 所示, 这是一个由 Libor加上一个信用利差所产生的 4 年期的浮动利率现金流, 名义本金是 1 百万美元, 它产生了一列随机的现金流. 但是与前面的例子相比, 这里有一个很重要的区别. 因为公司可能会违约, 所以不能保证利息和名义本金会按时收回. 图 5-4a 简化了违约的情况, 假设只有本金在时间 $t_4$ 可能会发生违约, 并且当违约发生时, 所有的名义本金和利息都没有了.[①] 图 5-4b 显示了一

① 这意味着没有回收价值.

个基于 6 个月 Libor[①]的无违约风险的市场现金流.

将这个例子中的两列现金流垂直相加, 我们就得到了一个信用违约互换(credit default swap) 如图 5-4 所示.

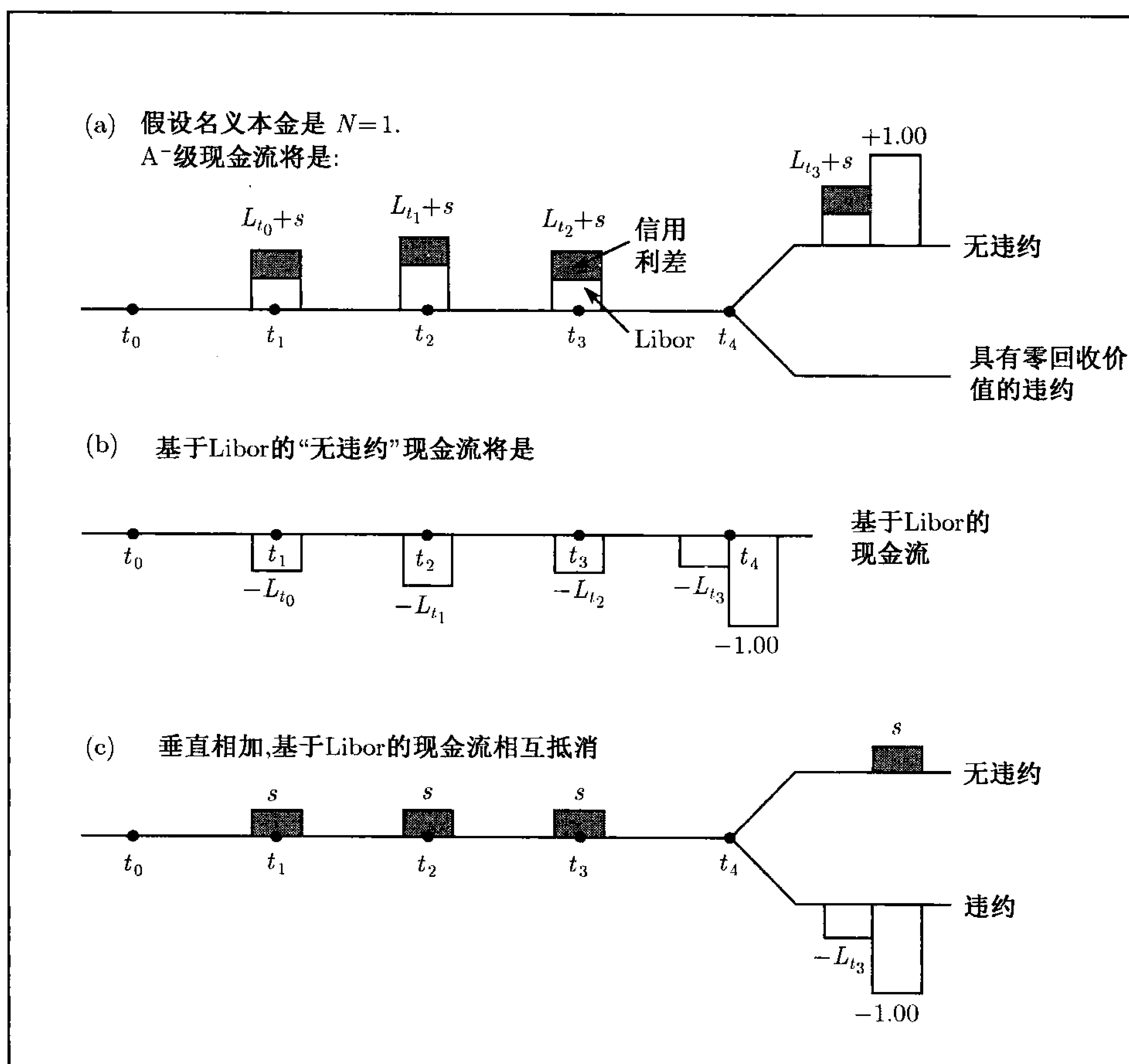



图 5-4

### 5.3.2 利率互换

利率互换市场是最大的互换市场. 利率互换是交换两个不同利率产生的现金流, 最常见的情况是关于相同的货币的固定利率与 Libor 浮动利率的互换. 利率互换已经成为了世界金融市场中最基本的一类工具. 下面文摘以普通利率互换(a plain vanilla IRS) 对此作了说明.

① 当然, 也可以使用其他基于信用的现金流, 正如图 5-3a 那样, 但这时是一个由 BB 级主体发行的债券.

**例**

互换曲线工作为美国公司债券基准工具日益缩减的国库券市场的最好替代品而被广泛地青睐. ……这使得人们猜测互换曲线将成为公司债券和资产支持证券的一个主要基准.

……公司债券的投资者认为在估计债券价值时, 更多地关注信用利差肯定会带来不少好处. 其中之一是抵押贷款证券市场已经在很大程度上使用 Libor 为基准的定价方法, 并且有望看到公司债券和抵押债券的可比性.

……互换的交易商同样指出, 尽管机构债务市场正在被 Fannie Mae 和 Freddie Mac 用来替代国库券市场作为基准市场, 机构利差仍然有效地随着互换利差移动.

……银行家和投资者认为, 未来对公司债券头寸进行对冲必定会最充分地利用已有金融工具, 所以即使互换和机构债券有着某些局限性, 且信用成本逐渐增多, 它们仍将广泛地被用来进行对冲. (IFR, 第 6321 期)

上面的文摘表明了互换市场在世界金融市场中所占的重要位置, 由利率互换得到的 "利率曲线" 被很多人认为是利率期限结构的基准, 而这意味着大多数资产将逐渐以各种方式利用利率互换来进行定价. 而且, 文摘还恰当地提到了几个主要的市场, 特别是: (1) 抵押支持证券 (MBS) 市场; (2) "机构" 市场, 也就是由 Fannie Mae 或 Freddie Mac 等发行的证券市场; (3) 公司债券市场, 虽然这些市场都比较复杂, 但互换在它们中仍扮演主要角色. 现在我们首先对利率互换给出一个正式的定义, 然后再来考察一个例子.

一个开始于时刻 $t_0$ 的**标准利率互换**(IRS) 是一个承诺: 在明确规定的交割日 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 交换名义本金为 $N$ 的利息, 互换的买方将支付给互换卖方数量为 $s_{t_0}N\delta$ 的固定利息, 同时接受浮动利率利息 $L_{t_i}N\delta$, Libor 利率值 $L_{t_i}$ 是在设定日期 $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}\}$ 决定. 互换的到期日为 $m$ 年,[①] $s_{t_0}$ 为互换利率.

**例**

一个利率互换的名义本金是 1 百万美元, 如图 5-5a 所示, 交换的现金流为: 一个两年期限、半年一付的 7%固定利率, 交换 6 个月期 Libor 利率产生的现金流. 第一个现金流包括了 4 次支付, 每次支付的数额为 35 000 美元, 它们在时间 $t_0$ 时就已经确定, 并且此后每 6 个月支付一次.

第二列现金流如图 5-5b 所示, 它的价值由每个设定日所观察到的 6 个月 Libor 值所决定. 在这段时间内, 我们将观察到 4 个不同的 Libor 利率. $L_{t_0}$ 在初始时间 $t_0$ 时已知, 其他的 Libor 利率值 $L_{t_1}, L_{t_2}$ 和 $L_{t_3}$ 随着时间的推移而陆续知道, 他们在初始时间 $t_0$ 时都是未知的.

在图 5-5 中, 浮动现金流取决于在 $t_i$ 时观察到的 $L_{t_i}$, 这个值却在后来的 $t_{i+1}$

① $m = n\delta$, $\delta$ 是日期间隔.

时刻支付, 具有这个特征的互换称为*后付互换*.

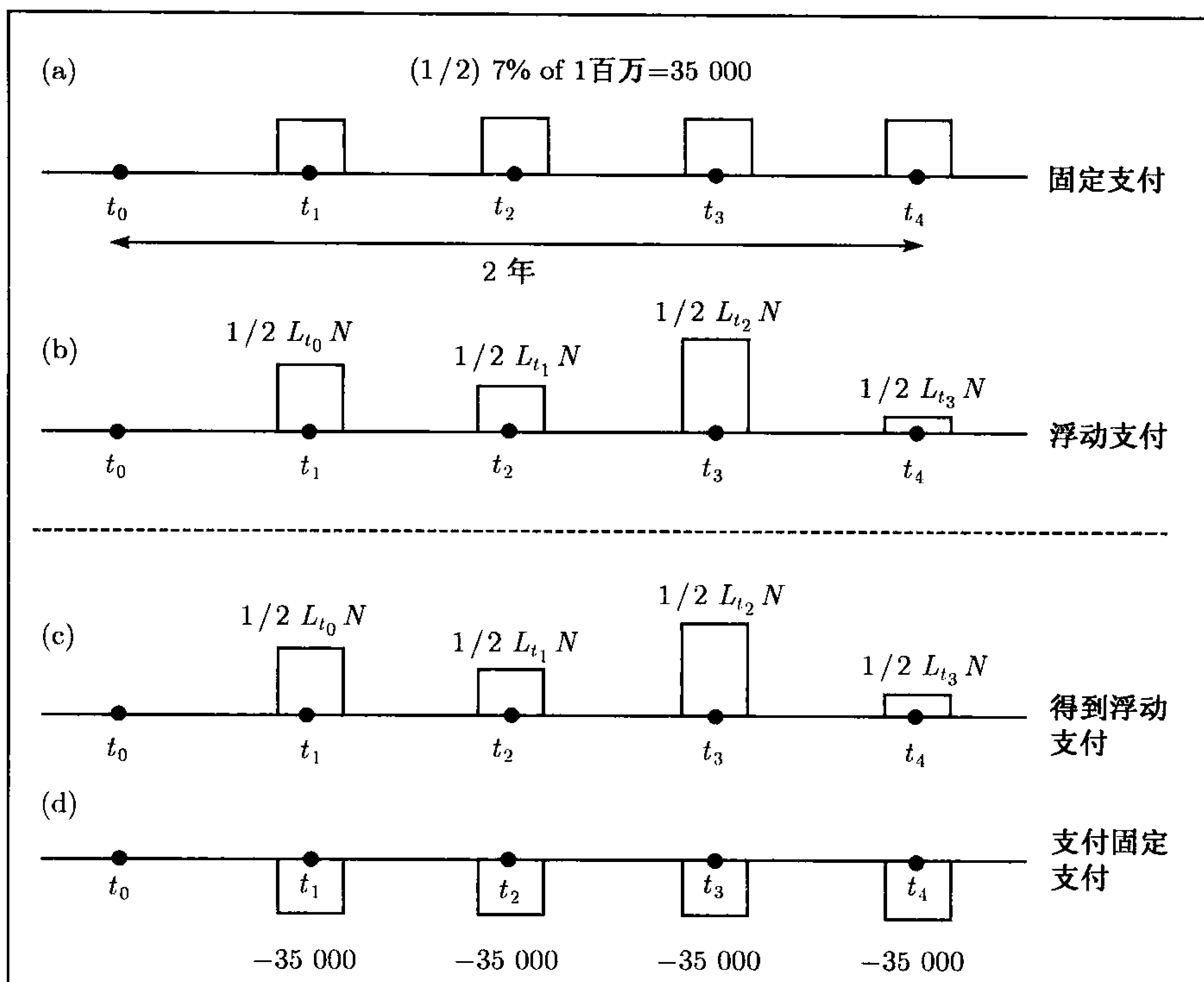



图 5-5

显然, 这是两列具有不同市场风险因素的现金流. 市场将分别对他们进行定价. 一旦这些工作完成以后, 市场参与者就可以对它们进行交易了. 我们所说的固定支付者就会支付如图 5-5a 所示的现金流, 并接受如图 5-5b 所示的现金流, 通常这个固定收益支付者又叫做利率互换的*买方*.

市场参与的另一方和互换的买方正好相反——接受基于在 $t_0$ 时确定的固定利率的现金流, 同时支付给互换买方随时间移动逐渐已知并且由 $L_{t_i}$ 所决定的浮动现金流. 这一方就是*固定收入方*, 市场通常也称之为互换的*卖方*.① 我们总可以通过在一列现金流上加上适当的利差来使得双方都能接受交换现金流.② 这个利差就是互换利差, 市场通常将这个利差加入到固定利率中, 通过调整这个利差, 可以使双方坐到一起来交换两列现金流. 这时, 双方所同意的固定利率就是*互换利率*, 我

① 类似于 FRA 术语, 支付固定利率的人一般是想锁定某个利率, 因而减小浮动利率产生的风险. 这些客户需要"保护". 因此通常说这些人买入互换.

② 毕竟苹果和橙子很少一对一地交易.

们有

$$\text{互换利率} = \text{基准利率} + \text{互换利差}. \tag{9}$$

基准利率通常是选择具有相同的到期日的同种货币主权债券.

就互换的买方来说, 最终的现金流动如图 5-2 所示, 这里只是交割净差额.

实际生活中的例子有助于加深我们的理解. 下面考虑一个私人公司, 它为了增加其浮动利率债务所占的比例, 可以发行称为商业票据 (CP) 的短期票据, 并且不断地在到期日滚动该债务; 同时公司也可以采用下面的做法: 先发行一个 5 年的固定利率的债券, 然后通过互换将支付的固定利率换成浮动利率.

**例**

一个公司考虑发行商业票据或者中期固定利率债券 (MTN), 然后可以通过一个互换将其转化为浮动利率债务. 这将使这家公司的浮动利率债务所占份额由 30% 增加到 50%~55%.

如果不进入 MTN 市场, 该公司可以选择使用 7 亿美元的商业票据便利.

这个例子说明了互换在公司财务主管的日常金融决策中所发挥的一种作用. 互换的存在使得在 CP 市场中观察到的利率更紧密地与 MTN 市场利率联系在一起.

1. 货币互换

货币互换和利率互换相似, 但也有几点区别. 首先, 所交换的现金流是不同的货币, 这意味着将需要两个不同的收益率曲线来为货币互换定价. 第二, 货币互换大部分都是用浮动利率交换浮动利率. 第三个区别就是初始时刻互换的名义本金在到期日重新交换回来. 而在利率互换中不存在这类问题, 因为名义本金都是同样的币种, 但是我们仍然可以用构造利率互换的方法构造货币互换.

一般而言, 一个货币互换有以下几个成分: 存在两种货币, 比如说美元 (\$) 和欧元 (€); 互换开始于时间 $t_0$, 并且涉及 (1) 名义本金 $N^{\$}$ 和名义本金 $N^{€}$ 的交换 (2) 分别与 $N^{\$}$ 和 $N^{€}$ 有关的浮动利息互换, 它们在交割日 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 进行交割. 其中一方将支付浮动利息 $L_{t_i}^{\$} N^{\$} \delta$, 并接收对方支付给自己的浮动利息 $L_{t_i}^{€} N^{€} \delta$, 这里的两个Libor 利率 $L_{t_i}^{\$}$ 和 $L_{t_i}^{€}$ 将在时间点 $\{t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}\}$ 决定, 互换的期限为 $m$ 年.

可以在其中一列现金流上加一个微小的利差 $S_{t_0}$, 使得双方都愿意交换上述现金流. 市场会给出这个利差的买入/卖出报价.

**例**

图 5-6 表示一个货币互换, 其美元名义本金为 1 百万, 当时的美元/欧元汇率为 0.95, 双方同意的利差为 6 个基点, 初始的 3 个月 Libor 为

$$L_{t_i}^{\$} = 3\%, \tag{10}$$

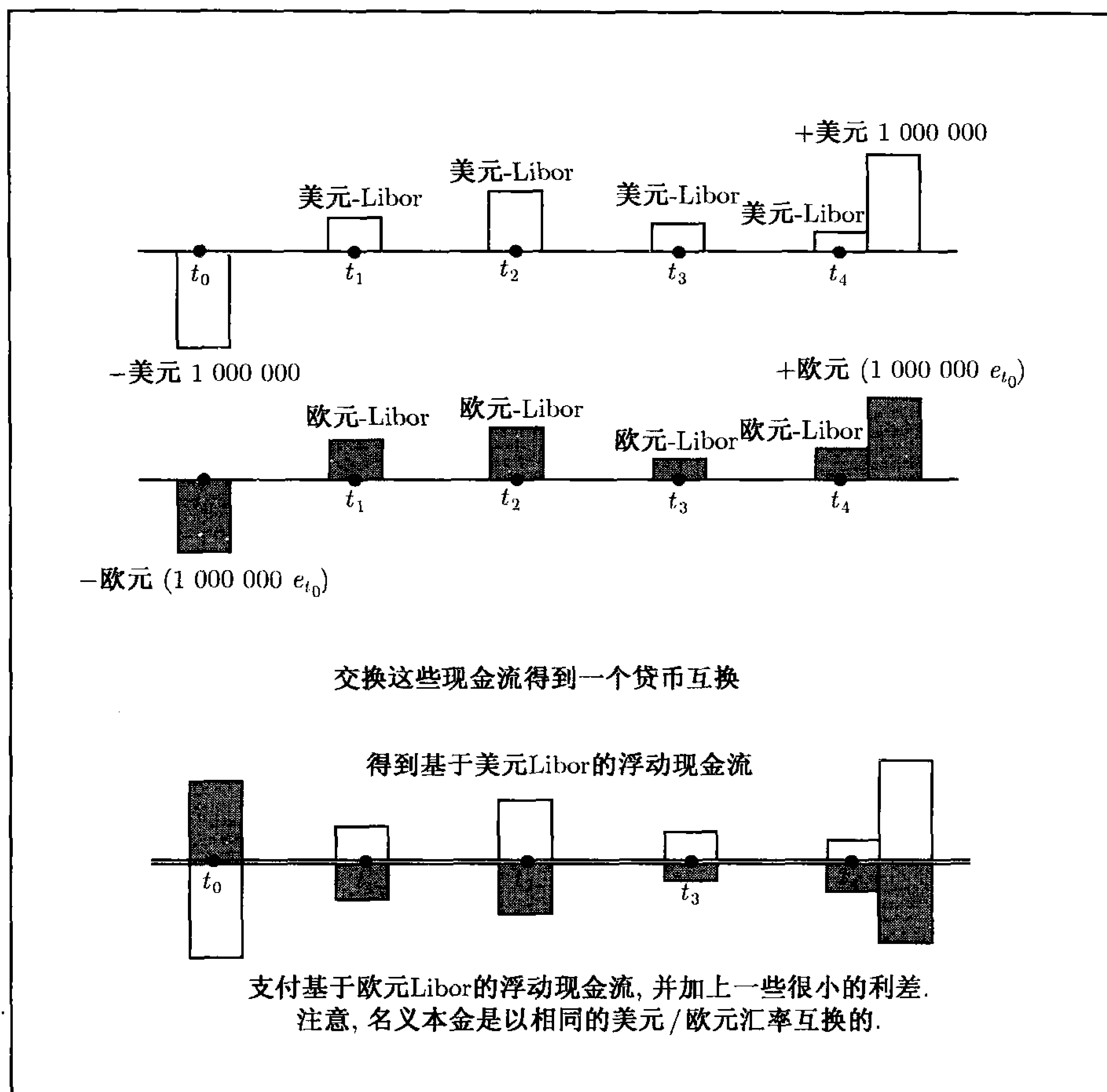



图 5-6

$$L_{t_i}^{€} = 3.5\%. \tag{11}$$

这意味着在第一个交割日

$$(1\ 000\ 000)(0.03 + 0.000\ 6)\frac{1}{4} = 7\ 650 \text{ 美元} \tag{12}$$

将会用来交换

$$0.95(1\ 000\ 000)(0.035)\frac{1}{4} = € \ 8\ 312.5. \tag{13}$$

所有其他的利息支付是未知的，注意欧元名义本金和美元名义本金的换算关系为

$$e_{t_0} N^{\$} = M^{€}, \tag{14}$$

其中 $e_{t_0}$ 是 $t_0$ 时的即期汇率.

**注意:** 我们已将互换利差加到美元 Libor 上.

货币互换的定价原则和利率互换定价一样. 一个货币互换有完整定义的现金流, 因此我们可以计算出每列现金流的无套利价值. 然后交换这两列现金流, 其中一列加上了适当的利差.

通过调整这个利差, 互换的交易商可以使互换的双方都愿意交换各自的现金流.

2. 基差互换

基差互换和货币互换相似, 只是在基差互换中只有一种货币. 基差互换就是相同的货币在两个不同的浮动利率之间进行现金流交换, 两个浮动利率中一个是 Libor, 另一个是非 Libor 的浮动利率.

下面这段文摘给出了基差互换的思想. 房利美是一个美国政府机构, 以美元 Libor 从国际货币市场借来资金, 然后将其转贷抵押银行. 房利美这样做面临一个基差风险, 即在它最终支付的美元 Libor 浮动利率和最终收入的是美元贴现利率之间有着一个细小的差别. 为了对冲这个风险, 房利美需要将其中一个浮动利率转化为另一个浮动利率. 这就是下面这段文摘的主题.

**例**

美林 (Merrill Lynch) 一直使用房利美的基准债券来定价和对冲它上万亿美元的贴现或基差互换业务. 利率衍生物部门的一位主管说: "自从基准债券发行的那一天起, 我们就将它作为我们贴现或基差互换的定价工具, 我们将继续使用它们给互换定价和对冲风险."

他同时说到, 对冲业务主要集中于 5 年期和 10 年期的债券, 这些期限是典型的贴现/Libor基差互换期限. 贴现/Libor互换被一些如房利美这样的美国金融机构用来对冲他们的基差风险. 这些机构以美国贴现利率发放贷款, 以 Libor利率进行融资, 结果使他们面临了 Libor/贴现率利差风险. 在基差互换中, 这些机构收入的是 Libor, 支付的是贴现利率.

美国大多数衍生品供应者在几年前就提供了贴现/Libor的基差互换, 目前他们运营的账面值高达数万亿美元. (IFR 第 1229 期)

这段资料说明了两件事. 房利美为了使收入和支出都基于同样的风险, 就需要互换浮动利率, 而与此同时, 由于房利美用基差互换来对冲风险, 并且现有的房利美债券数量巨大, 所以一些市场参与者可能会认为, 这些机构债券是用来为他们的基差互换进行定价的很好的工具.

3. 什么是资产互换

原则上, 资产互换这个词适合于任何种类的互换. 毕竟迄今所考虑的现金流都

是由某种资产、指数或参考利率生成的. 而且, 与股票指数或参考利率 (如 Libor) 相关的互换容易被视为浮动利率票据 (FRN)、公司债券组合或股票组合, 交换这些现金流就等于交换这些标的资产.

然而, 资产互换这个词通常有更精确的含义. 考虑一个每年付息 $c_{t_0}$ 的可违约债券, 半年付息一次. 对此我们可以想象有这样一个互换, 其中息票利息与 6 个月的 Libor$L_{t_i}$ 加上一个利差 $s_{t_0}$ 进行交换. 债券的利息固定, 并且在 $t_0$ 就已经知道. 但是, 尽管利差 $s_{t_0}$ 在 $t_0$ 时也已知, 浮动利息仍然是随机的, 这样一种结构工具就叫做资产互换. 如果不考虑违约的情况, 读者可以很容易地得到该工具所隐含的现金流, 其现金流图也可以用图 5-1 来表示, 其中一列现金流代表债券息票, 另一列就是 Libor 加上利差.

资产互换为投资者提供了另外一种选择. 一个投资者总可以买一个债券并收入息票利息 $c_{t_0}$. 但是通过一个资产互换, 投资者可以将息票利息交换出去, 换成只收入浮动的 Libor 加上利差 $s_{t_0}$, 这样一来, 就消除了债券的*固定利率*风险而仅剩下*发行者*风险. 实际上, 如果投资者想要面对固定利率风险, 那么国库券或者固定收入利率互换可能是更好的选择. 假设在这种结构中使用 Libor, 计算时 $s_{t_0}$ 就作为相应的固定互换利率的利差.

4. *更复杂的互换*

到目前为止的互换具有流动性, 并且交易比较活跃. 我们还可以想象其他的互换, 其中某些流动, 某些不流动. 比如说分期偿还互换、金银互换、MBS 互换、永恒年金 (微分) 互换等. 我们就不详细展开讨论了, 一些互换将作为例子或练习在后面的章节出现.

不变到期互换 (CMS) 是很有意思的一个例子, 有关它的讨论放在第 15 章进行; CMS 互换有一个有趣的凸性维数, 需要考虑一条收益率曲线上各种远期利率的波动率和协方差系数; 一个相关的互换种类是不变期限国库券 (CMT) 互换.

### 5.3.3 互换惯例

利率互换市场有自己的惯例. 在某些经济体中, 市场以*互换利差*报价. 美元利率互换就是如此. 美元利率互换以相对于国库券的利差报价; 在澳大利亚, 互换市场同样以利差报价, 但利差是相对于债券期货的.

在其他的一些经济实体中, 市场是以*互换率*报价, 欧元利率互换就是这样.

接下来的问题是, 怎样给出互换的报价. 一般采用双向利率报价的形式, 但有时候所报的互换率以年为基础, 有时候又以半年为基础. 此外, 日期计算方法也是随着市场的不同而不同, 在美元互换中, 日期计算是一般的 ACT/360, 欧元互换日期计算则是 30/360.

根据市场惯例, 固定利息的支付者, 也叫做*支付方*(payer), 是互换的*买方*, 它买

进了一个互换; 而固定利息收入者, 也叫做收入方(receiver), 是合约的卖方, 它卖出了一个互换.

## 5.4 利率互换金融工程

我们现在来研究互换的金融工程, 主要考虑的是普通利率互换, 其他互换的工程方法也类似, 我们留给读者自己去思考. 为了简单起见, 我们处理的例子中只有 3 个交割日. 图 5-7 显示了一个固定支付方的, 三期利率互换, 初始时间为 $t_0$. 一方将在时间 $t_1, t_2, t_3$ 以相同的货币向另一方**支付固定利率**, 并从对方得到浮动利率. $t_1, t_2, t_3$ 是交割日, 而 $t_0, t_1, t_2$ 是**重设日**, 在重设日, 将决定下一时刻的相关 Libor 利率.

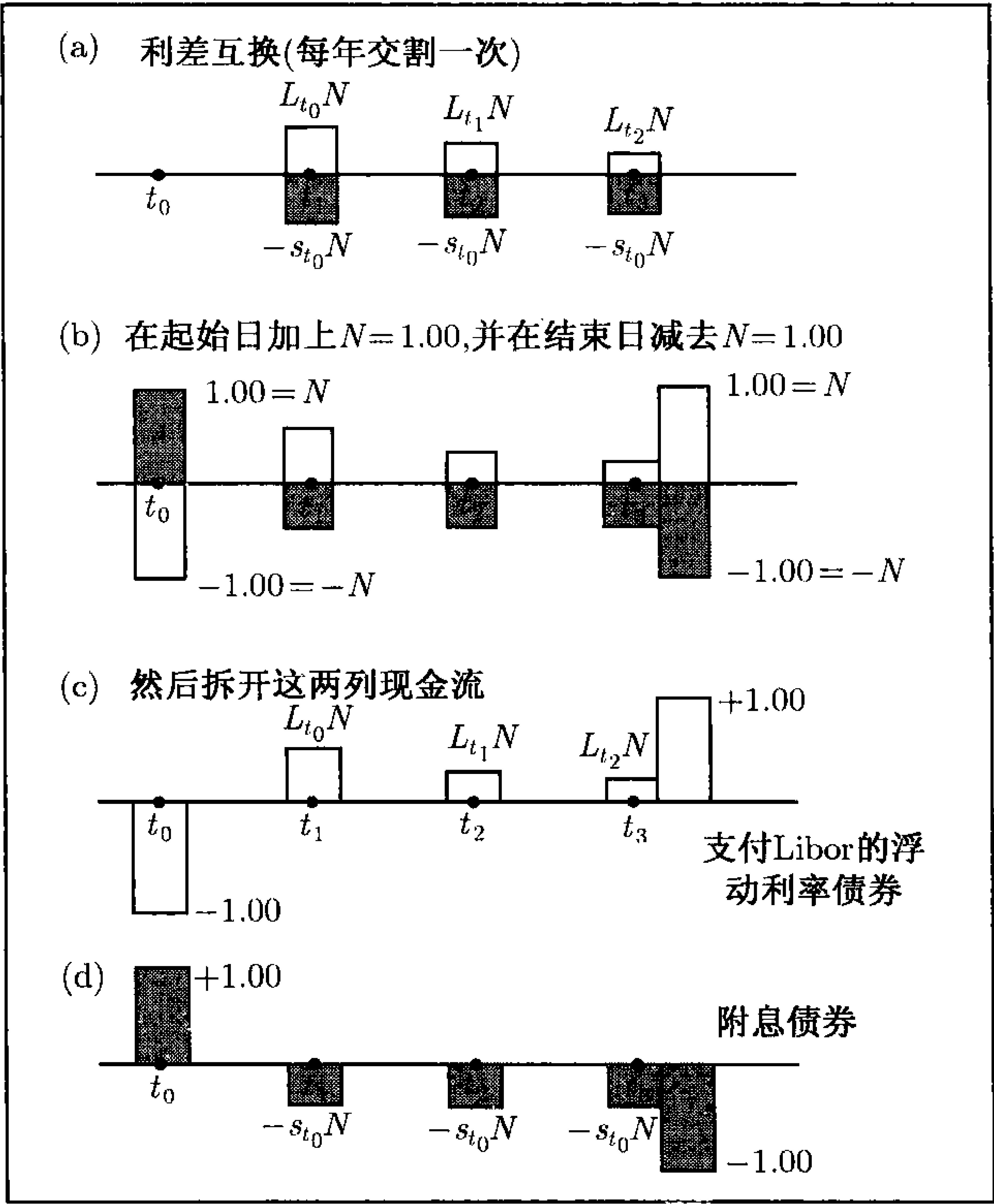



图 5-7

我们选定一个名义本金 $N$ 作为单位, 并设 $\delta = 1$, 假设浮动利率是 12 个月 Libor[①]:

① 这是一种简化, 实际中互换利率为 3 个月或 6 个月的 Libor.

$$N = 1\$. \tag{15}$$

在做出这些简单规定以后，我们有固定利率为 $s_{t_0}$, Libor 相关的支付分别为 $L_{t_0}, L_{t_1}$, $L_{t_2}$, 互换的利差为 $s_{t_0}$ 与具有相同到期日的国库券利率之差，用 $y_{t_0}$ 表示[①], 这样的话，我们得到

$$\text{互换利差} = s_{t_0} - y_{t_0}. \tag{16}$$

我们来研究这个利率互换，更精确地说是讨论怎样去复制这个互换，我们会发现解决这个问题的方法更有意思.

一个互换至少可以以两种方法进行反向构造.

(1) 我们首先可以将互换的现金流做横向分解，其中一列代表浮动支付流，另一列代表固定现金流，这样的话，每条现金流可以看成是某种债券的利息支付.

(2) 此外，我们也可以做纵向分解，分割这 $n$ 次现金交换，这样的话，每次现金交换都可以类似地看成一个后付 FRA, 且其在各个结算日的固定利率为常数.

下面我们将详细研究这两种做法.

### 5.4.1 水平分解

首先我们将简化在这一部分出现的一些记号和参数. 为了使注意力集中在金融工程方面，我们不考虑讨论中的某些变量. 比如，我们假设互换每年交换一次，使得日期计算参数 $\delta = 1$; 下一步，我们考虑一个远期互换，这个互换在 $t_0$ 时签订，但是起始于 $t_1$, $t_0 < t_1$. 在我们的讨论中将时不时地省略远期两个字，将远期互换简称为互换[②].

传统的分解利率互换方法是水平分解. 原始的互换现金流如图 5-7a 所示. 在我们开始之前，这里有个小技巧，在开始和结束时每条现金流都加上然后减去名义本金 $N$. 因为考虑的是相同的货币和数额，初始名义本金上的加减不影响我们考虑的问题，这时的互换如图 5-7b 所示.

接下来我们将水平分解图 5-7b 中的现金流“分开”, 这样可以得到如图 5-7c 和图 5-7d 所示的两条独立的现金流. 注意，每条现金流已经是一个有意义的金融合约了.

实际上，很快就可以看出图 5-7c 表示买入一个支付 Libor 的浮动利率票据. 在时间 $t_1$, 支付初始名义本金 $N$, 确定 $L_{t_1}$; 在 $t_2$, 得到首次利息支付. 这个过程将持续到时间 $t_4$, 届时利息和本金一同支付给票据持有者.

图 5-7d 可以视为卖出一个附息债券，债券的利率为 $s_{t_0}$. 我们卖出债券得到面值 $N$, 在每个付息日支付出固定利息，直到 $t_4$ 最后一次支付利息连同本金.

这样的话，上述的分解暗示着以下合成:

---

① 它也可以是任一种市场接受为基准的利率.

② 记住，此时没有信用风险. 时间是离散的，最后没有询价差.

$$利率互换 = \{买入Libor附息的FRN,\quad 卖出附息债券\} \tag{17}$$

在这里债券需要和 FRN 具有相同的信用风险. 用这种表示法, 很自然地就得到了下面等式:

| 买入互换 | = | 卖出附息债券 $s_{t_0}$ | + | 买入Libor附息的 FRN | (18) |
|---|---|---|---|---|---|

通过这种联系, 我们可以根据前面介绍过的方法合成出其他一些有意思的金融产品.

1. 合成附息债券

假设一个等级为 AAA 的实体, 忽略它的违约风险, 发行了一个 3 年的每 12 个月支付 Libor-10bp 的 FRN, 一个客户可能想买该实体发行的一个附息债券, 但是并没有这样发行附息债券, 我们可以帮助这个客户合成这样的债券. 为此, 我们改变一下合约公式, 使等式右边有一个长期附息债券:

| 买入附息债券 $s_{t_0}-10\text{bp}$ | = | 卖出利率为 $s_{t_0}$ 的一个互换 | + | 买入Libor附息的 FRN−10bp | (19) |
|---|---|---|---|---|---|

该做法的形象化示意见图 5-8. 合成的结果是, 创造出一个同样的实体发行的附息债券, 支付的利息是 $s_{t_0}-10\text{bp}$, 在利息中包括的 10bp 是为了弥补一个 AAA 等级的实体的信用风险.

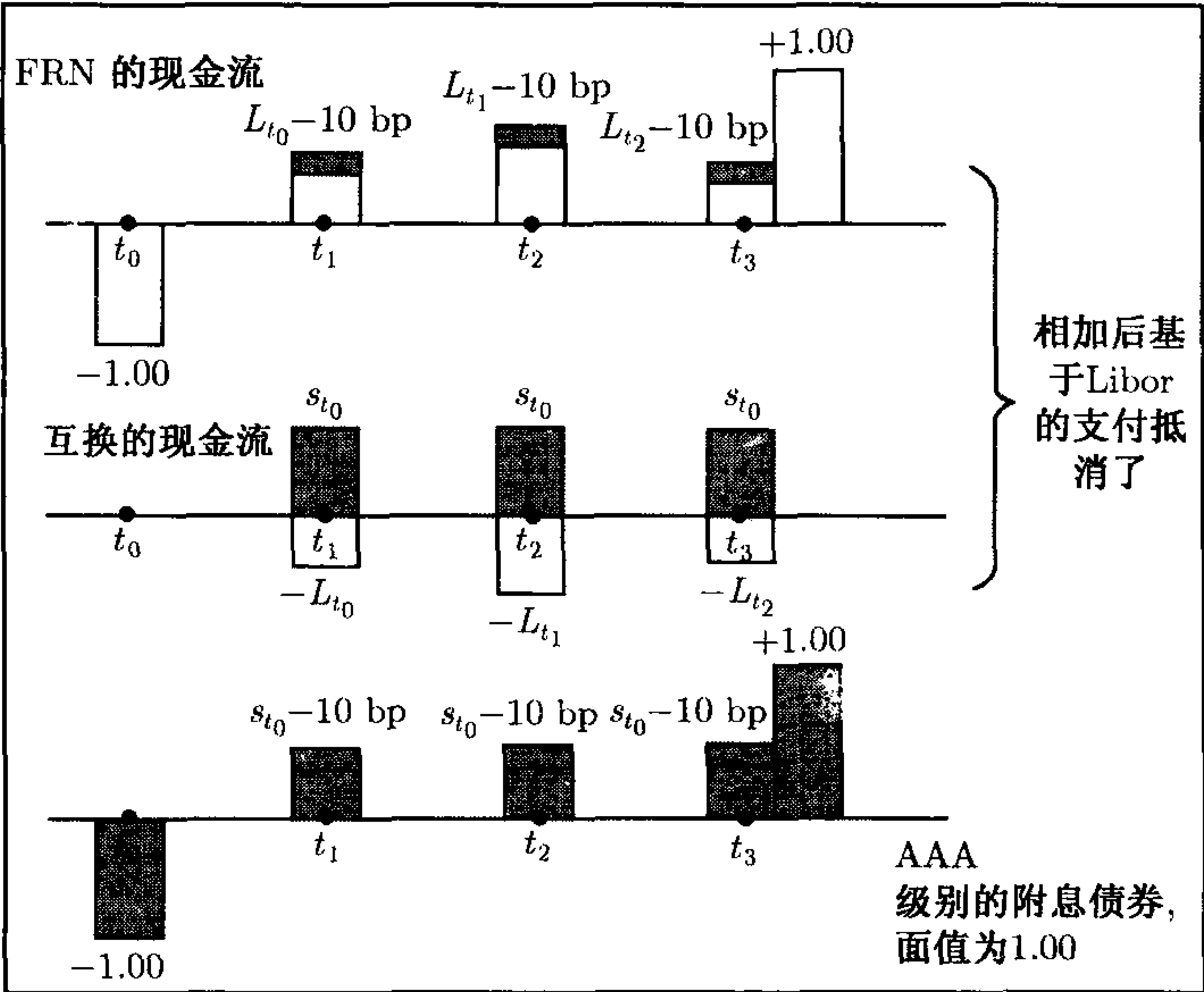



图 5-8

2. 定价

等式 (18) 使我们可以用观察到的固定和浮动附息债券价格来为从债务市场中提取的互换定价, 利用合适的贴现因子我们可以写出由固定和浮动利率债券产生的现金流的现值. 本节的例子是一个 3 年的即期互换, 使得用固定支付交换 12 个月 Libor. 这样简化了讨论, 我们可以很自然地将由此产生的公式扩展到 $n$ 年互换.

假设 3 年中每年支付 $s_{t_0}N$ 数量的利息, 三次支付浮动利息 $NL_{t_{i-1}}$, 其中 $L_{t_{i-1}}$ 在 $t_{i-1}$ 决定, 但在 $t_i$ 时支付.

3. 固定现金流的现值计算

为了得到固定现金流的现值, 我们用相关的浮动利率来贴现, 注意, 如果我们知道了浮动利率 $\{L_{t_0}, L_{t_1}, L_{t_2}\}$, 就有

$$\text{固定支付的 PV} = \frac{s_{t_0}N}{(1+L_{t_0})} + \frac{s_{t_0}N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})} + \frac{s_{t_0}N+N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}. \tag{20}$$

在不失一般性的情况下, 我们在 $t_3$ 时, 现金流上加上 $N$, 但是在 $t=0$, $L_{t_1}, L_{t_2}$ 是未知的. 然而, 对于每个 $L_{t_i}, i=1,2$, 市场愿意支付已知的远期 (FRA) 利率 $F(t_0,t_1)$. 这样的话, 可以将 FRA 利率 "作为" 未知 Libor 利率在 $t_0$ 时的值, 我们有

$$\text{在}t_0\text{时固定支付的 PV}$$
$$= \frac{s_{t_0}N}{(1+F(t_0,t_0))} + \frac{s_{t_0}N}{(1+F(t_0,t_0))(1+F(t_0,t_1))} + \tag{21}$$
$$\frac{s_{t_0}N+N}{(1+F(t_0,t_0))(1+F(t_0,t_1))(1+F(t_0,t_2))}. \tag{22}$$

等式的右边全是已知的, 在给定 $s_{t_0}$ 的情况下, 我们可以精确算出现金流的现值.

4. 浮动现金流的现值计算

对于浮动现金流我们有[①]

$$\text{在}t_0\text{时浮动支付的 PV}$$
$$= \frac{L_{t_0}N}{(1+L_{t_0})} + \frac{L_{t_1}N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})} + \frac{L_{t_2}N+N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}. \tag{23}$$

在这里, 为了给出一个数值结果, 我们将不使用远期利率, 这个现值可以写成简单的形式, 一旦我们得到了下面的变换:

$$\frac{L_{t_2}N+N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})} = \frac{(1+L_{t_2})N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})} \tag{24}$$

① 请读者注意, 为了方便书写我们将日调整因子选为 1, 否则公式中所有 Libor 利率和远期利率都必须乘以 $\delta$.

$$= \frac{N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}. \tag{25}$$

这时, 将 (25) 和 (23) 中右边的第二项相加, 并化简得

$$\frac{L_{t_1}N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})} + \frac{N}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})} = \frac{N}{(1+L_{t_0})}. \tag{26}$$

最后, (25) 和 (23) 右边的第一项相加, 出乎预料地得到

$$\text{在}t_0\text{时浮动支付的 PV} = N. \tag{27}$$

根据这个结果我们知道一个 FRN 的现值在每个交割日都等于名义本金 $N$, 类似的方法可以得到浮动支付在重设日的现值[①], 我们令

$$\text{在}t_0\text{时固定支付的 PV} = \text{在}t_0\text{时浮动支付的 PV} \tag{28}$$

这样我们得到了关于未知数 $s_{t_0}$ 的方程

$$\begin{aligned} &\frac{s_{t_0}N}{(1+F(t_0,t_0))} + \frac{s_{t_0}N}{(1+F(t_0,t_0))(1+F(t_0,t_1))} + \\ &\frac{s_{t_0}N+N}{(1+F(t_0,t_0))(1+F(t_0,t_1))(1+F(t_0,t_2))} = N. \end{aligned} \tag{29}$$

消去 $N$ 并整理一下, 就可以得到由 $F(t_0,t_0), F(t_0,t_1), F(t_1,t_2)$ 表示的 $s_{t_0}$ 值. 这将离开 FRA 市场对互换进行估价.

5. **重要说明**

注意在上面的推导中存在一个很方便但也很微妙的操作, 那就是用流动的 FRA 市场中已知的 $F(t_0,t_i)$ 来替代未知的 $L_{t_i}$, 然而这些公式中 $L_{t_i}$ 是非线性的, 即使在某些测度 $P^*$ 下, 远期利率是 Libor 的无偏估计,

$$F(t_0,t_i) = E_{t_0}^{P*}[L_{t_i}], \tag{30}$$

我们仍然不能确定这个替换的正确性, 例如, 用 $E_{t_0}^{P*}[.]$ 来表示在时间 $t_0$ 时的条件期望, 根据 Jensen 不等式, 条件期望号不能移到里面去:

$$E_{t_0}^{P*}\left[\frac{1}{1+L_{t_i}\delta}\right] > \frac{1}{1+E_{t_0}^{P*}[L_{t_i}]\delta}. \tag{31}$$

---

① 当然, 此结果在两个重置日期之间并不成立. 原因是分子和分母项一般不同. 支付是按 $(1+L_{t_i})$ 进行的, 但现值将用自上个重置日期以来所观察到的 Libor:

$$(1+L_{t_0+u^\delta})(1+L_{t_1}),$$

其中 $u$ 是自上个重置日期以来所经过的时间, $L_{t_0+u}$ 是在 $t_0+u$ 时刻观察到的利率. 现金流的值将会大或小一些, 这取决于 $L_{t_0+u}$ 的值.

所以, 即使在 (31) 下, 怎么用 $F(t_0,t_i)$ 来替代 $L_{t_i}$ 仍然不是那么明显, 这个问题将在引入风险中性测度后讨论. 我们说, 上述替代需要很多条件, 往往是非常微妙的. 在这里我们允许这样的替代, 因为远期利率就是在 $t_0$ 时市场支付的 Libor 利率.

### 5.4.2 纵向分解

现在介绍互换分解的第二种方法, 我们已经知道什么是 FRA 合同, 考虑一个 FRA, $\delta=1$, 并且这个 FRA 是后付的. 这样, 在某些时间 $t_i+\delta$, FRA 的双方将交换现金流:

$$(L_{t_i}-F(t_0,t_i))\delta N, \tag{32}$$

其中 $N$ 是名义本金, $\delta=1$, $F(t_0,t_i)$ 是在 $t_0$ 决定的 FRA 利率. 我们知道 FRA 就是固定支付 $F(t_0,t_i)N\delta$ 和浮动支付 $L_{t_i}N\delta$ 的交换.

那么, 是否可以将一个互换分解为 $n$ 个 FRA 呢, 其中每个 FRA 的利率为 $F(t_0,t_i), i=1,2,\cdots,n$, $n=3$ 的情形如图 5-9 所示. 互换的现金流被分解为每个支付日上的交换, 图 5-9b, 图 5-9c, 图 5-9d 代表被分割的三条独立的现金流, 每条现金流上固定支付交换未知的 Libor.

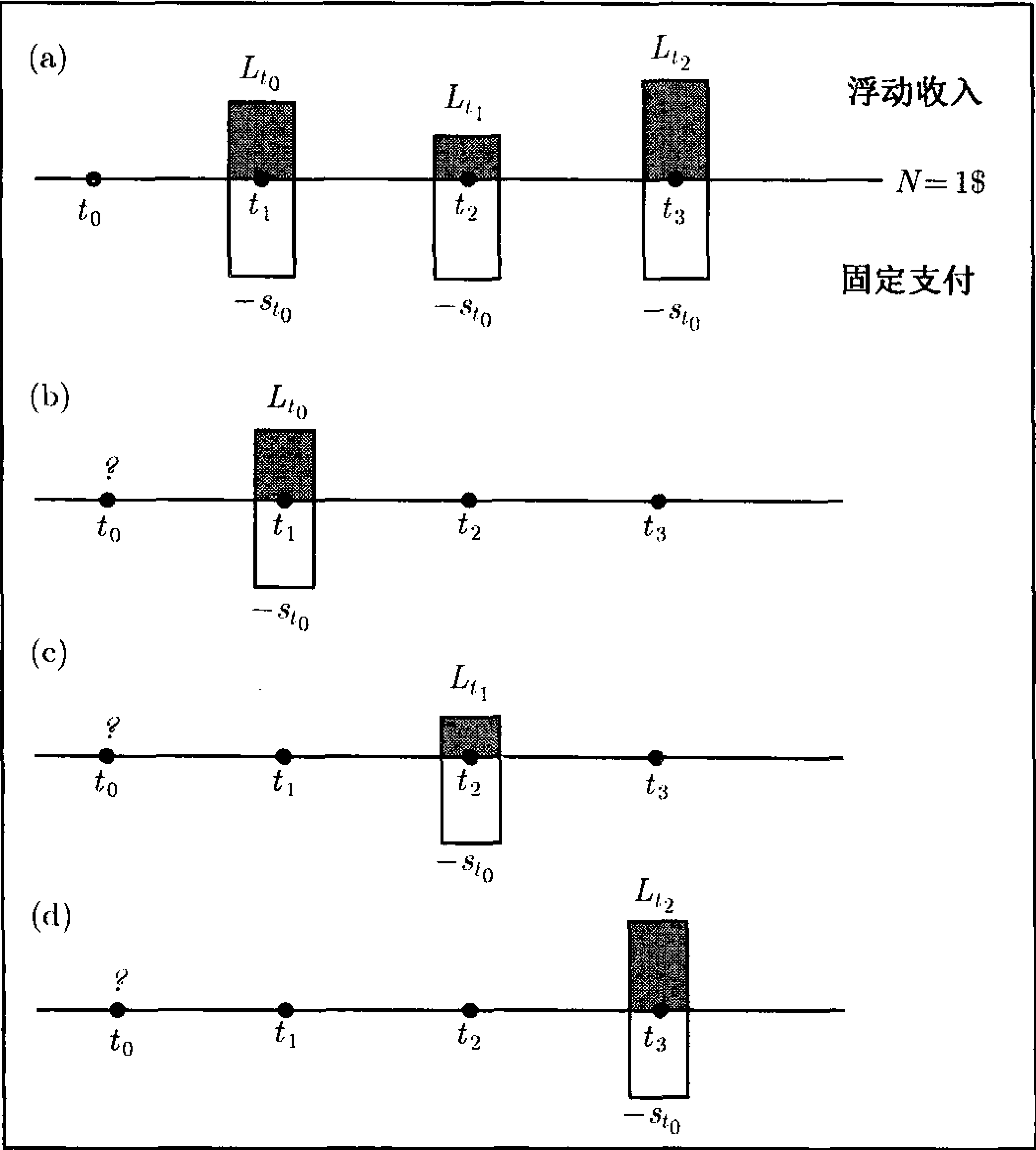



图 5-9

图 5-9b, 图 5-9c, 图 5-9d 所示的现金交换是可交易的合约吗? 特别地, 他们是合理的 FRA 合约吗? 以至于这个互换可以看成这三个 FRA 的组合, 乍一看, 这些现金流确实像 FRA, 但是当我们仔细研究时, 就会发现这些现金流并不是合理的 FRA.

为了便于理解, 考虑图 5-9b 中 $t_2$ 时刻的交割以及图 5-10 所示的一个交割时刻相同的 FRA 现金流. 图 5-10 向我们展示了有关这两条现金流的一个重要问题. 先观察这个在初始时刻 $t_0$, 交割日为 $t_2$ 的 FRA, 并将其与相应的互换交割比较, 两者看起来确实相似, 都是一个固定利率交换在 $t_1$ 观察到的 Libor 浮动利率 $L_{t_1}$, 但是, 这里存在着重要的区别.

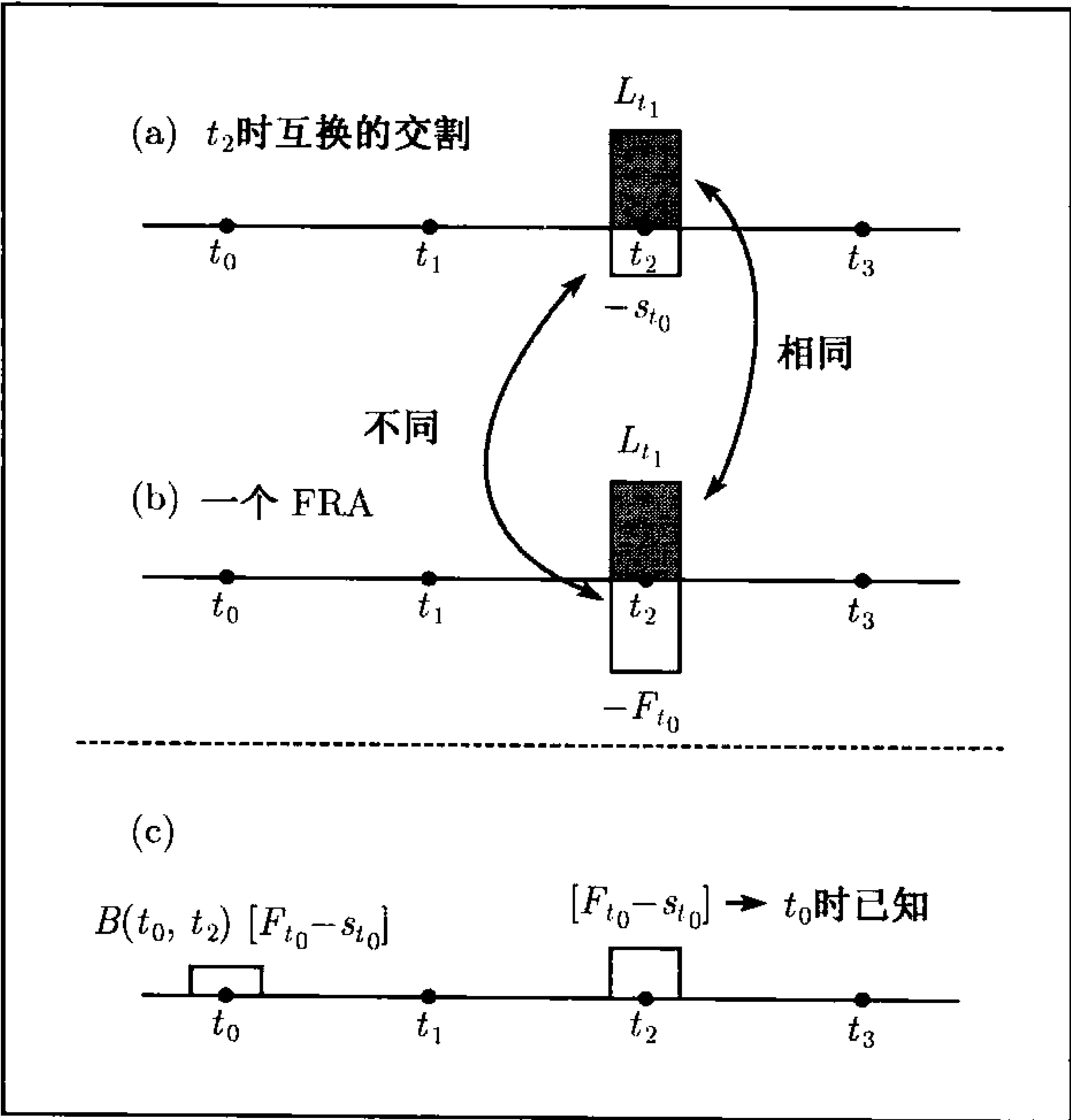



图 5-10

首先, FRA 利率 $F(t_0,t_i)$ 是由供需关系或者通过货币市场的定价而决定的, 因此, 一般来说:

$$F(t_0,t_i) \neq s_{t_0}. \tag{33}$$

这意味着如果我们买入如图 5-10a 所示的现金流, 卖出图 5-10b 所示的现金流, 基于 Libor 的现金流就会被抵消, 而固定现金流不会被抵消. 所以, 这个组合在 $t_2$ 会有一个正的或是负的净现值, 如图 5-10c 所示. 又因为这个现金流是确定的, 故它的现值不可能为 0, 但是由于 FRA 不需要任何的初始支付, 所以它的现值为 0. 所

有这些说明了图 5-10c 所示的现金流有一个已知的现值:

$$B(t_0,t_2)[F(t_0,t_1)-s_{t_0}]\delta N, \tag{34}$$

其中 $B(t_0,t_2)$ 是到期日为 $t_2$ 的无违约风险零息债券在 $t_0$ 时的价值, 名义本金为 1 美元, $F(t_0,t_i)$ 和 $s_{t_0}$ 的大小关系决定了这个现值的正负.

因此, 这样的垂直分解互换并不能得到可交易的金融合约, 实际上图 5-10c 所示的在 $t_2$ 时刻的交换少了在时间 $t_0$ 的现金交换 $[F(t_0,t_1)-s_{t_0}]B(t_0,t_2)\delta N$, 只有加上这个, 才能使其变为一个可交易的合约, $s_{t_0}$ 是关于 $L_{t_0},L_{t_1},L_{t_2}$平均而言的合理风险价格. 所以, 单独考虑 $t_2$ 时刻的现金交换, 它的现值不为 0.

**定价**

我们已经看到不可能将一个互换分解为单独的 FRA 合约, 因为分解以后的每次现金交换具有不为 0 的现值. 而众所周知的是, 新发行的 FRA 合约的价值是为 0 的. 但是, 上面的分解仍然可以用于互换的定价, 因为它告诉了我们 FRA 和互换之间的一个重要联系.

实际上, 我们已经知道了互换在 $t_2$ 时刻的现金交换的现值为$[F(t_0,t_1)-s_{t_0}]B(t_0,t_2)N\delta$, 通常而言, 它不为 0. 然而, 互换的所有现金交换加起来的现值是为 0 的, 这样我们就可以得到下面的重要价格关系

$$\begin{aligned}&B(t_0,t_1)[F(t_0,t_0)-s_{t_0}]\delta N+B(t_0,t_2)[F(t_0,t_1)-s_{t_0}]\delta N+\\&B(t_0,t_3)[F(t_0,t_2)-s_{t_0}]\delta N=0.\end{aligned} \tag{35}$$

整理公式, 就得到关于 FRA 利率的互换利率公式

$$s_{t_0}=\frac{B(t_0,t_1)F(t_0,t_0)+B(t_0,t_2)F(t_0,t_1)+B(t_0,t_3)T(t_0,t_2)}{B(t_0,t_1)+B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)}. \tag{36}$$

这意味着我们也可以通过FRA市场定价互换, 在一般的公式中, $n$ 是互换的到期日,

$$s_{t_0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}B(t_0,t_i)F(t_0,t_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}B(t_0,t_i)} \tag{37}$$

这个公式将在本书中经常使用, 它是互换利率和 FRA 利率之间的一个重要的套利关系.

## 5.5 互换的用途简介

我们可以很容易总结互换在金融工程运用中的基本思想, 一个互换涉及两条现金流的互换. 但是这些现金流是由一些资产、债务或者是其他一些承诺而生成的, 这意味着互换是这些可交易现金资产的标准的、流动性的、有效的替代. 也就是说,

在不交易资产或债务的情况下, 我们可以通过简单的交易由这些资产或者债务所产生的现金流, 而达到交易资产或债务的效果. 因为互换一般而言在初始时间的价值为 0, 并且具有很强的流动性, 所以这将是节省费用的做法. 那么, 互换的用途有哪些呢? 我们先看看股票互换, 就像在第 3 章中的 FX 互换一样, 这些互换具有很方便的资产负债表, 并且有相关的监管法规和税收政策.

### 5.5.1 股票互换的运用

股票互换展示了互换工具的广泛用途.

1. 基金管理

基金管理很大一部分是基金经理人试图跟踪某种股票指数, 其中一种方法就是买标的股票来复制这个指数, 并不停地随着市场的移动, 或资金的进入和退出来调整份额. 这将是一个很复杂的操作, 当然, 可以用标准普尔 500 来实现, 但是期货需要滚动, 并且它们需要进行盯市. 使用股票互换是一个很有效的替代方式.

基金经理人可以签订一个标准普尔 500 的互换, 基金在互换中做买方, 每年度向对方支付 Libor 相关的利率加利差, 而得到的是在 $n$ 年内获得标准普尔 500 的收益[①].

下面这个例子与本章前面的例子类似, 投资者寻找节省费用的方法使他们的组合多样化.

**例**

*在一个股票互换中, 互换的持有方支付标准普尔 500 的收益, 换来富时指数 100 的收益. 它的好处是投资者不需要支付初始费用.*

*同样的头寸不能用卖出标准普尔 500 股票以及买入富时指数股票来复制.*

例子中的第二段强调了股票互换的方便之处, 因为它规定收入直接与指数挂钩, 所以没有跟踪股票指数过程中所产生的误差. 另一方面, 复制股票指数也注定会产生一些复制误差.

2. 税收优势

股票互换不仅 “便宜” 且可以很有效地建立股票指数头寸, 而且股票互换有一些税收和所有权上的宽松政策. 例如, 投资者想卖出一个已经增值很多的股票, 直接把它卖出去将会产生资本所得税, 相反, 投资者可以继续持有股票, 但是和别人签订一个互换, 在这个互换中他将由这支股票所产生的资本得失连同分红都支付给对方, 而投资者从对方那里获得某个 Libor 相关的利率及一个利差. 这实际上等同于卖出股票, 并将所得的资金存入银行间贷款.

① 标准普尔 500 指数的回报由资本利得 (损失) 以及红利构成.

3. 监管

最后, 股票互换可以执行一些由于监管法规而不能执行的策略. 在下面的这个例子中, 通过股票互换, 使得投资于一个正在形成的市场变得可行了.

**例**

自从引入 Kospi200 期货, 国外的证券商和投资者投资于此项期货的数额都受到了限制, 他们只能在确保了国外开放利率份额的前提下, 才能交易 Kospi200 期货, 而任何的利率份额都会在期货到期以后丢失, 头寸不能进行再投资. 这些国外的投资者只能持有 3 个月开放利率日均值的 15%, 而 "韩国投资者身份" 的个体投资者只有 3%. 认识到这个瓶颈, 一些像现代证券这样的韩国证券商就已经通过提供没有被这些规定限制的国外投资者股票互换作出了反应.

互换的结构很简单. 在外国投资者和韩国证券公司的特别目的载体或是离岸附属机构之间签订一个互换约定. 在这个约定下, 这些外国投资者和复制了这个期货合约的离岸实体执行这个互换, 因为互换交易是两个非居民方, 并且在海外签订的, 所以国外投资界限将不适用了.

韩国证券商在期货市场中对冲这些互换, 显然, 作为一个居住性实体, 对外国投资的限制将不起作用. 一旦这样的互换建立以后, 国外的投资者就可以直接联系首尔的韩国证券商, 执行任何数量的交易并使他们对主要的互换协约进行了订制. (IFR, 1996 年 1 月 27 日).

这段材料说明了在 (1) 所有权, (2) 贸易, (3) 头寸再投资上的限制可以通过一个股票互换来规避, 并且我们得到了这个股票互换的结构, 从中我们还可以看出一个互换的实施有很多具体的细节要考虑.

4. 建立复合头寸

下面这个例子是互换怎样构造出复合位置的一个很好的范例.

**例**

股票衍生品银行家已经制定出一种股票–互换交易来避开韩国和马来西亚等关于卖空的限制. 这种技术并不是很新, 它是随着可转化债券 (CB) 的发行而重新出现的, 在上述两个国家尤为普遍.

对于 CB 的风险对冲者来说, 他们需要卖空标的股票, 但是由于当地市场监管的限制, 他们被禁止这么做, 这时他们从银行家那里购买股票互换.

对于一个 CB 交易商而言更通常的做法是在与一个股票持有者的互换中做卖方. 这就使得 CB 交易商进行股票交易更加灵活, 当一个互换到期 (通常 1 年以后) 时, 股票归还给持有者, 利用现金来对互换结算 (IFR, 2001 年 12 月 5 日).

在这个例子中, 一个 CB 交易商需要卖空一定数量连续变化的证券,[①] 一个简

① 正如前面几章所看到的, 这对隐式期权的对冲是必要的.

便的做法就是：CB 交易商写一个互换，在互换中他将股票收益支付给互换的投资者，这样得到投资者的股票来对冲风险.

### 5.5.2 利率互换和其他互换的使用

利率互换比股票互换发挥着更为基本的作用，实际上，所有的互换都可以被用在资产负债表管理中. 资产负债表包含了一些现金流，使用互换，我们可以改变这些现金流的特征. 并且互换可以用于对冲风险，他们在初始时间的价值为零，所以不需要任何的融资. 一个市场参与者可以很容易地通过快速安排一些互换来对冲他们面临的股票或商品风险.

最后，互换同样是交易工具，实际上，我们可以通过各类互换以最方便的方法构建利差交易. 下面给出了一些可能的利差交易：

- 以名义本金 $N$ 支付 $n$ 期的固定利率 $s_{t_0}$，得到浮动利率 Libor;
- 以相同货币类型支付浮动利率 $L_{t_i}$，得到浮动利率 $r_{t_i}$;
- 以不同的货币支付和获得浮动利率，这将是一个货币互换.

就像这些利率表明的那样，互换基本上可以将所有的利率工具转化为某种形式的"利差产品". 这将减少信用风险，使得互换在初始时价值为零，如果设计合理的话，还可以很容易地为互换双方估值.

### 5.5.3 利率互换的两种用途

现在我们考虑两个有关利率互换运用的例子.

1. 改变投资组合的久期

久期是一个固定收入投资组合的"平均"到期日. 然而，出乎意料的是，在一般情况下，由于政府债务的存在，最大的固定收入债务就是由政府管理的. 依据市场情况的不同，政府可能会想调整他们债务的平均到期日，这时互换就可以发挥它的作用了. 下面这个例子就说明了这种情况.

**例**

法国和德国正在准备加入意大利的行列，使用利率互换来管理他们的债务. 互换可以用来调整债务久期和减少利率花费，但是政府交易的 OTC 衍生物可能会扭曲利差并且可能诱导银行进行主权头寸的前台操作. 美国和英国说他们还没有计划去使用互换管理各自的国内债务.

据一位法国债务管理机构的官员说，在接下来的几年里，法国可能会使用多达 150bn 欧元的互换，尽管实际的数字可能会少很多. "这个数字正好是我们通过互换来极大地缩短债务久期所需要的数额"，这位官员说. 法国现在有 644.8bn 欧元的债务，平均到期日是 6 年零 73 天.

这位官员还说, 具体的实际操作决定将于 9 月份出台, 如果突然在市场中投入 150bn 欧元, 这将造成巨大的混乱.

使用互换工具, 公司同样可以类似地调整他们的债务久期.

2. 技术上的运用

互换还有技术上的运用, 下面这个例子说明了它们怎样被用来设计新的债券期货合约, 其中支付绑定的不是债券而是互换.

**例**

LIFFE 将于 10 月 18 日发行它的基于互换的 Libor 融资债券, 两个合约的设计都避免了这几周 Deutsche Terminboerse Bund 期货所带来的挤压.

LIFFE 的新合约与传统的债券期货不同, 新合约不是以债券为参考, 而是将互换作为参考, 并且这个 Libor 融资债券与国际互换和衍生物协会的基准互换利率联系在一起. 过期以后, 合约将参考这个互换利率进行现金结算.

由于是现金结算, Liffe 和约避免了短期挤压的可能性——最便宜交割债券的价格随着交割日的临近而上涨. 并且, 由于是将互换曲线而不是一个一揽子债券作为参考, 这个合约排除任何凸性风险和久期风险. Libor 金融债券复制了一个可比较的互换头寸的凸性, 因此降低了现金债券或债券期货套期保值的基本风险.

正为获得基准地位而努力的 DTB Bund 因为近期的挤压而收到批评. 上个星期, 最便宜的交割 Bund 与 Bund 期货之间的基点差已经降到了 −3.5.

产生这种紧缩的原因是在新兴市场危机过后人们蜂拥追逐高品质的债券. 公开对 Bund 期货表示有兴趣的已经超过了 600 000 份合约或者说 DM15bn. 相对而言, 可以用来交割德国政府债券的总揽子大约是 DM74bn, 期中最便宜交割占了 DM30bn.

DTB 的官员总是满足于他们从来就不会缺少可交割的 Bund. 他们断言, 实际进行的交割只占过去敞口的大约 4%. (IFR, 第 1327 期)

事实上, LIFFE 和 CME 最近引入了几种新的关于互换的现金交割期货合约, 其中互换用作标的工具. 如果没有流动性好的互换市场, 互换期货合约就没有这种参考点, 从而不得不使用一揽子债券作为参照物.

## 5.6 互换机制的新问题

本章介绍的互换工程忽略了一些小的技术上的问题, 这些都是在实际应用中需要考虑到的. 这其中的大部分并不是什么大问题, 它们是由债券市场、货币市场和互换市场的一些不同惯例而产生的. 本节将研究关于利率互换的一些技术上的问题, 对于其他的互换市场, 比如说商品互换, 还需要进一步地讨论技术性细节, 下面给出的是一些基本的技术.

(1) 互换的实际运用涉及新债券的发行, 而新证券的发行意味着费用、佣金以及其他的一些花费, 这些都必须在发行之前的融资过程中考虑到, 这样的话, 就产生了*总体花费*这样一个概念, 它与发行者支付的利率不同.

我们将详细说明如何计算总体花费, 以及在互换新发行中如何处理它.

(2) 利率互换同时涉及固定利率和浮动利率. 相应的 Libor 利率通常被视为浮动利率, 与此不同的是, 互换利率或者说是相应的互换利差被看作固定利率, 这样, 在实际中, 另一个问题产生了.

货币市场利率、债券市场利率以及互换利率的报价惯例通常是不同的. 这就需要将定义在一个市场的利率转化为另一市场的利率.

特别地, 货币市场利率如 Libor 是以 ACT/360 的基础报价的, 而一些债券的报价惯例是以每年或每半年的 30/360 为基础的. 在互换工程中, 这些现金流在规定的时间交换, 所以我们需要做一些适当的调整.

(3) 本章忽略了信用风险, 这极大地简化了问题, 因为互换利率和具有类似到期日的公司利率都相等了. 在金融市场中, 他们通常是不相等的. 不同的发行者具有不同的信用评级, 并且他们发行的债券有着不同的信用利差, 这些利差与互换利差是不同的. 这就使得附息债券的现金流和利率互换的现金流的匹配变得相当复杂. 我们需要看一些关于这个问题的实际例子.

(4) 最后, 新的发行是怎样被互换为固定或浮动利率的机制以及怎样导致*次级*Libor 融资的机制本身就是一个非常有趣的问题.

我们的讨论将围绕下面介绍的一次真实的新发行来进行, 首先介绍市场对该债券的反应, 然后叙述此次新发行的细节.

**例**

*韩国新韩银行的穆迪和标准普尔评级是 Baal 和 BBB, 上周初它为其 2 亿美元的三年期债券进行定价. 这批债券的息票率为 4%, 并允诺高于美国两年期国库券 168.8bp 的利差. 这等价于比 Libor 高 63bp. 如表 5-1 所示.*

*虽然当时借款人曾试图压低这批债券的价格, 其利率最终还是比韩国发展银行的利率曲线高出近 6bp. 虽然借款人的目标没有达到, 但他们仍设法保证了债券息票率水平不低于亚洲地区性危机发生以来的最低水平, 而这要归因于一轮新的资金流向安全性较好的资产后, 美国国库券收益率不断下滑的结果.* (IFR 第 1444 期)

考虑将这个新发行的债券换为浮动息票支付的美元融资的基本步骤[①], 债券发行者必须进入一个 3 年期的利率互换. 问题是怎样得到这个互换, 以及互换相关的参数如何确定呢? 假设债券发行时, 市场关于互换利差的报价如表 5-2 所示.

① 实际过程可与我们这里简化后的讨论稍为不同.

**表 5-1 新发行债券的详细信息**

| | |
|---|---|
| 新韩银行 | |
| 数额 | 200 百万美元 |
| 到期日 | 3 年 (2009 年 1 月到期) |
| 息票率 | 4% |
| 二级市场初始价 | 99.659 |
| 二级市场初始价的利差 | 两年期美国国库券加上 168.8bp |
| 发行日 | 7 月 23 日 |
| 支付日 | 7 月 29 日 |
| 费用 | 20bp |
| 上市 | 伦敦 |
| 监管法律 | 伦敦 |
| 限制抵押 | 是 |
| 交叉违约 | 是 |
| 卖出限制 | 美国, 英国, 韩国 |
| 联合主承销 | 荷兰银行, 巴黎银行, 瑞银华宝 |

来源: IFR 第 1444 期.

**表 5-2 美元互换指数对比 12 个月的 Libor, 半年, 30/360F**

| 到期日 | 竞价利差 | 要价利差 | 互换利率的询价差 |
|---|---|---|---|
| 2 年 | 42 | 46 | 2.706−2.750 |
| 3 年 | 65 | 69 | 3.341−3.384 |
| 4 年 | 70 | 74 | 3.796−3.838 |
| 5 年 | 65 | 69 | 4.147−4.187 |
| 7 年 | 75 | 79 | 4.653−4.694 |
| 10 年 | 61 | 65 | 5.115−5.159 |
| 12 年 | 82 | 86 | 5.325−5.369 |
| 15 年 | 104 | 108 | 5.545−5.589 |
| 20 年 | 126 | 130 | 5.765−5.809 |
| 30 年 | 50 | 54 | 5.834−5.885 |

首先, 我们考虑怎么得到债券发行的总成本.[①]

### 5.6.1 总成本

这次新发行的债券的息票率是 4%, 但是从发行者的角度而言, 此次融资的真正成本并不止这些, 至少还有三个因素需要考虑到: (1) 卖出价并不是 100, 而是 99.659, 这意味着对于每份债券, 发行者实际得到的少于面值; (2) 发行必然有费用的支出. (3) 在表 5-1 中的信息没有提到发行者要承担法律费用和文件费用, 我们假设这些费用是 75 000 美元.

为了计算固定的总成本 (30/360 基础), 首先必须计算发行的收入, 收入是发行

① 流动性互换是关于 3 个月或 6 个月 Libor 的. 这里使用 12 个月互换是为了使记号简单些.

者在卖出债券后的净现金所得. 在我们这个例子中, 使用表 5-1 的表示方法, 有

$$\text{收入} = \text{数额} \times \left(\frac{\text{价格}}{100} - \text{费用}\right) - \text{开支}. \tag{38}$$

将相关数字代入得

$$\text{收入} = 200\ 000\ 000(0.996\ 59 - 0.002\ 0) - 75\ 000 \tag{39}$$

$$= 198\ 843\ 000. \tag{40}$$

下面, 我们知道这个债券分 3 次, 每次支付 8 百万的息票, 3 年后归还本金, 与这次发行相关的现金流可以用图 5-11 表示, 然而, 这个现金流的内部收益率是多少? 可以通过下面的公式计算求得.

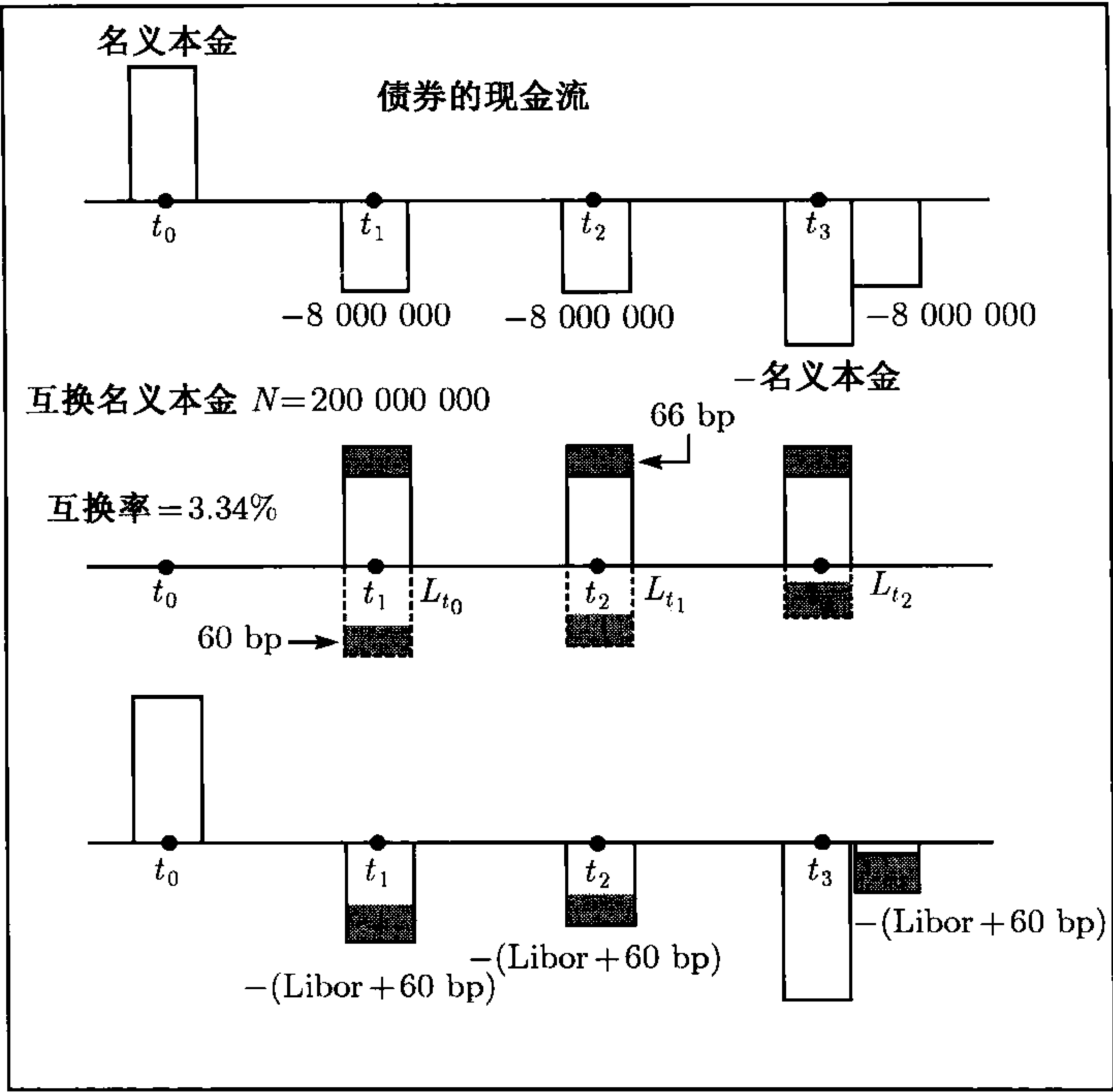



图　5-11

$$198\ 843\ 000 = \frac{8\ 000\ 000}{(1+y)} + \frac{8\ 000\ 000}{(1+y)^2} + \frac{8\ 000\ 000 + 200\ 000\ 000}{(1+y)^3}. \tag{41}$$

等式中的 $y$ 为内部收益率, 它可以被看成是这次发行的真正花费, 他是在 30/360 日期计算方法下的固定总成本. 由 (41) 式, 我们得到

$$y = 0.042\ 09. \tag{42}$$

接下来就是要将发行的息票率变为浮动的, 并得到浮动总成本. 假设我们有同样的名义本金 2 亿美元, 考虑一个 3 年期的利率互换, 由表 5-2, 3 年期的互换固定利率为 3.341%, 这是 30/360 的半年利率.

所以我们需要将半年的互换利率转化为 30/360 的年利率, 设为 $r$. 根据下面式子

$$(1+r)=\left(1+0.033\ 41\ \frac{1}{2}\right)^2, \tag{43}$$

得到

$$r=3.369\%. \tag{44}$$

等于 2 亿美元的名义本金, 三次固定收入是

$$200\ 000\ 000(0.033\ 69)=6.738\ 000, \tag{45}$$

现金流如图 5-11b 所示.

显然, 互换中的固定收入不等于债券的票息, 这是因为发行者的高利率来自于高信用风险, 为了使两者相等, 我们需要增加固定收入

$$8\ 000\ 000-6\ 738\ 000=1\ 262\ 000. \tag{46}$$

这可以通过同时增加相同数量的浮动利率以及得到的固定利率来实现, 如果发行者在 Libor 上加上66bp 的利差, 由于这 66bp 的利差是根据 30/360 计算的, 不同于 Libor 的 act/360. 所以, 我们还需要进一步的调整①, 最后的数字将是浮动的总成本, 大约在 60bp 左右.

### 5.6.2 另一个例子

假设有一个 A 等级的英国实体, 它想要 3 年期 100m sterling(GBP) 贷款, 固定利率和浮动利率都可以并且倾向于在欧洲市场发行. 根据市场的研究表明, 如果这个实体执行这个计划, 它可以得到的是固定利率 6.5%②, 但是银行推荐了下面的方法.

有迹象表明, 在固定利率的 USD 范围内发行浮动利率的欧洲债券更加合理, 并且从 USD-GBP 货币互换中可以得到很好的获利机会. 互换市场给这个实体的报价是 Libor+95bp 交换 USD 利率. 这时可以以更低的成本将收入换为 sterling. 应该怎样操作, 又有哪些风险呢?

---

① 我们的计算获得的数和在市场反应中提到的 63bp 有些差别, 原因是我们为了简单起见, 使用了一个关于 12 个月 Libor 的互换.

② 使用的天计数方式是 30/360.

我们先看看一些有关新发行的数据. 新发行债券的参数如表 5-3 所示①.

如果发行者想要将发行收入换成浮动利率的 GBP 融资, 发行者面对的是如表 5-4 所示的市场条件.

我们首先找出初始现金流以及被互换的现金流. 这时, 计算出总成本, 也就是将收入换成 GBP 后的真实成本.

第一步是得到发行者在 $t_0$ 时得到的总现金数, 然后决定他在 $t_1, t_2$ 的支出. 这时, 我们需要再次计算此次发行的收入.

**表 5-3 新发行债券**

| | |
|---|---|
| 数额 | 100 百万美元 |
| 到期日 | 2 年 |
| 息票 | 6%p.a. |
| 发行价 | $100\frac{3}{4}$ |
| 期权 | 没有 |
| 上市 | 卢森堡 |
| 佣金 | $1\frac{1}{4}$ |
| 费用 | 75 000 美元 |
| 监管法律 | 英语 |
| 限制抵押 | 是 |
| 同等权利 | 是 |
| 交叉违约 | 是 |

**表 5-4 互换市场的报价**

| | |
|---|---|
| 英镑–美元的即期汇率 | 1.670 1/1.670 8 |
| 两年期的美元利率互换 | 5.46/51 |
| 美元–英镑货币互换 | +4/−1 |

- 发行的价格是 100.75, 佣金是 1.25%, 这意味着, 不计算花费时, 发行者的收入是

$$\frac{(100.75-1.25)}{100}100\ 000\ 000 = 99\ 500\ 000. \tag{47}$$

我们看到这次发行是溢价发行, 一旦扣除了佣金, 收入将低于 1 亿. 所以, 扣除花费后, 总收入为

$$\text{收入} = 99\ 500\ 000 - 75\ 000 = 99\ 425\ 000. \tag{48}$$

给定收入, 我们可以计算这次发行全部费用的固定利率. 发行者将支付两次 6% 的息票, 在到期日, 偿还 1 亿, 而在 $t_0$ 时, 发行者总共只得到 99 425 000. 这些现金流如图 5-12 所示. 注意不同于理论上的例子, 支付的本金不等于得到的本金, 这主要是由于佣金和费用的缘故.

- 从这个现金流我们可以通过解下面的方程算出内部收益率 $y_{t_0}$,

$$99\ 425\ 000 = \frac{60\ 000}{(1+y_{t_0})} + \frac{60\ 000}{(1+y_{t_0})^2} + \frac{100\ 000\ 000}{(1+y_{t_0})^2}. \tag{49}$$

解为

$$y_{t_0} = 6.315\ 0\%. \tag{50}$$

① 某些定义: **限制抵押**意味着投资者在往后的时间不会因为发行人有关改善别的债券风险的决策而陷入更加不利的地位. **同等权利**的意思是投资于这些债券的投资者都不会处于某种有利的地位. **交叉违约**意味着虽然还没到期但若发行人关于其他债券违约了, 则该债券将被认为违约.

因此, USD 融资的真正固定费用大于 6%.

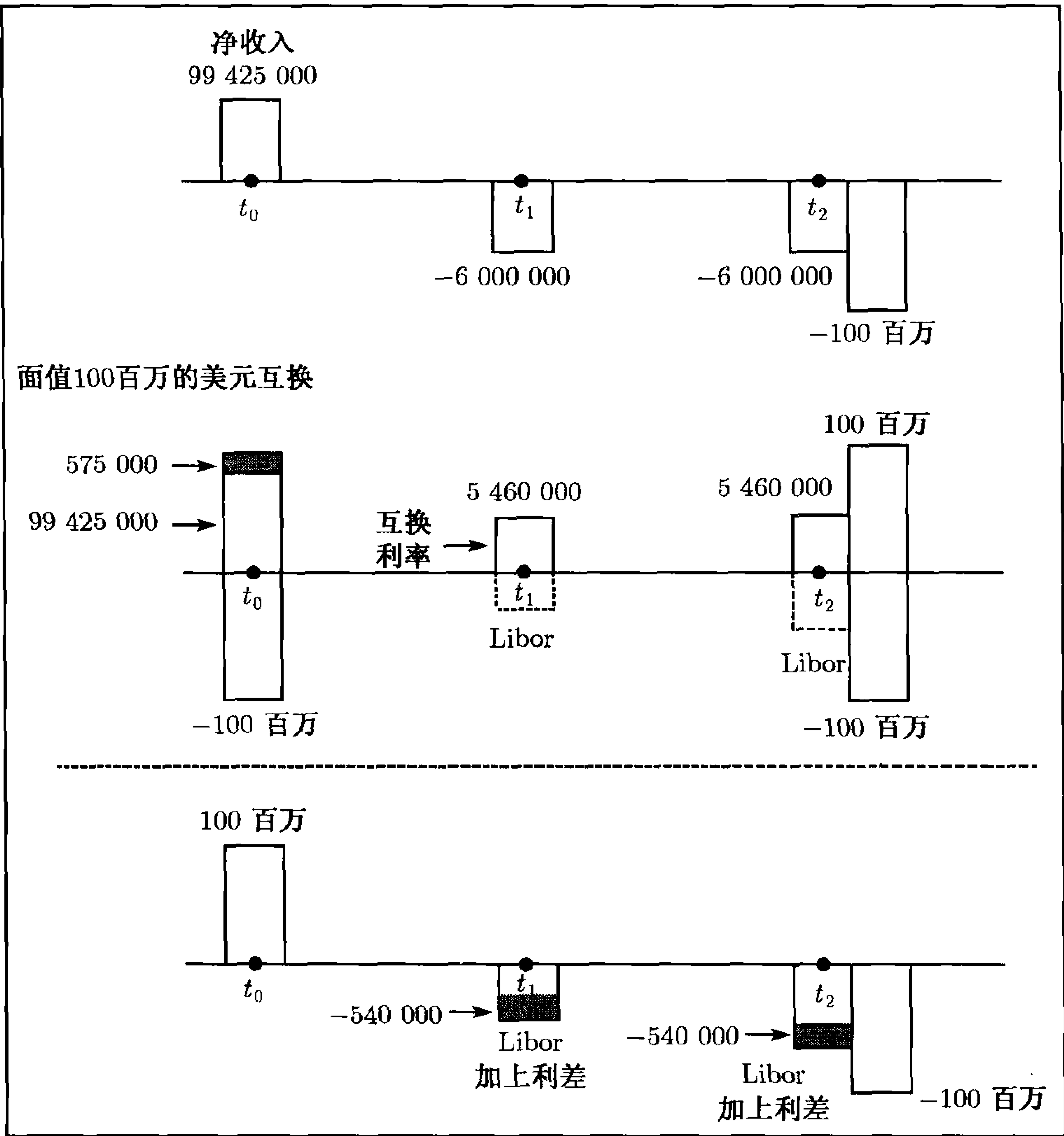



图 5-12

发行者将首先把这个转化为浮动利率 USD 融资, 为了达到这个目的, 发行者将卖出一份互换. 也就是说, 发行者将得到固定利率 5.46%, 而支付浮动的 Libor. 这大体上等价于支付 USDLibor + 54bp. 最后, 发行者通过支付浮动 GBP, 得到浮动 USD 利率, 而将浮动 USD 利率转化为浮动 GBP 利率.

## 5.7 一些惯例

如果你持有一个附息债券, 支付日恰好是非工作日, 则此次息票将在接下来最近的一个工作日支付, 但是数额不会改变. 在互换中, 这个惯例将有些不同了. 支付

同样被推迟到下一个工作日.[①] 但是支付的数额将根据实际的天数进行调整. 这意味着支付日期和数量不可能完全一致以防互换被用来固定收入组合的套期保值.

**报价**

假设我看到了利率互换或其他流动性互换的报价, 这意味着我们就可以进行交易了吗? 不一定, 观察到的互换利率可能只有一个银行的少数最好客户可以享有而其他客户可能不得不支付更多. 在实际操作中, 流动性工具上的买卖利差非常严格, 并且少数大机构统治了市场.

## 5.8　货币互换和 FX 互换

我们将货币互换和第 3 章中的 FX 互换进行比较. 一个货币互换有以下一些特征:

(1) 在初始 $t_0$ 时, 两个价值相同但不同货币种类的名义本金进行交换;

(2) 在交割日, 利息也是以不同的货币形式根据达成一致的利率进行交换;

(3) 在最后一个交割日, 本金在此以同样的汇率进行再交换.

下面是一个简单的例子. 100 000 000 欧元与 100 000 000$e_{t_0}$ 进行互换, 其中 $e_{t_0}$ 是 "当时"EUR/USD 汇率, 然后, 6 个月 Libor 利息被交换两次. 在最后一个交割日, 即使在 $t_2$ 时实际的汇率 $e_{t_2}$ 可能确实不同于 $e_{t_0}$, 名义本金仍然是以汇率 $e_{t_0}$ 再次被交换. 如图 5-13.

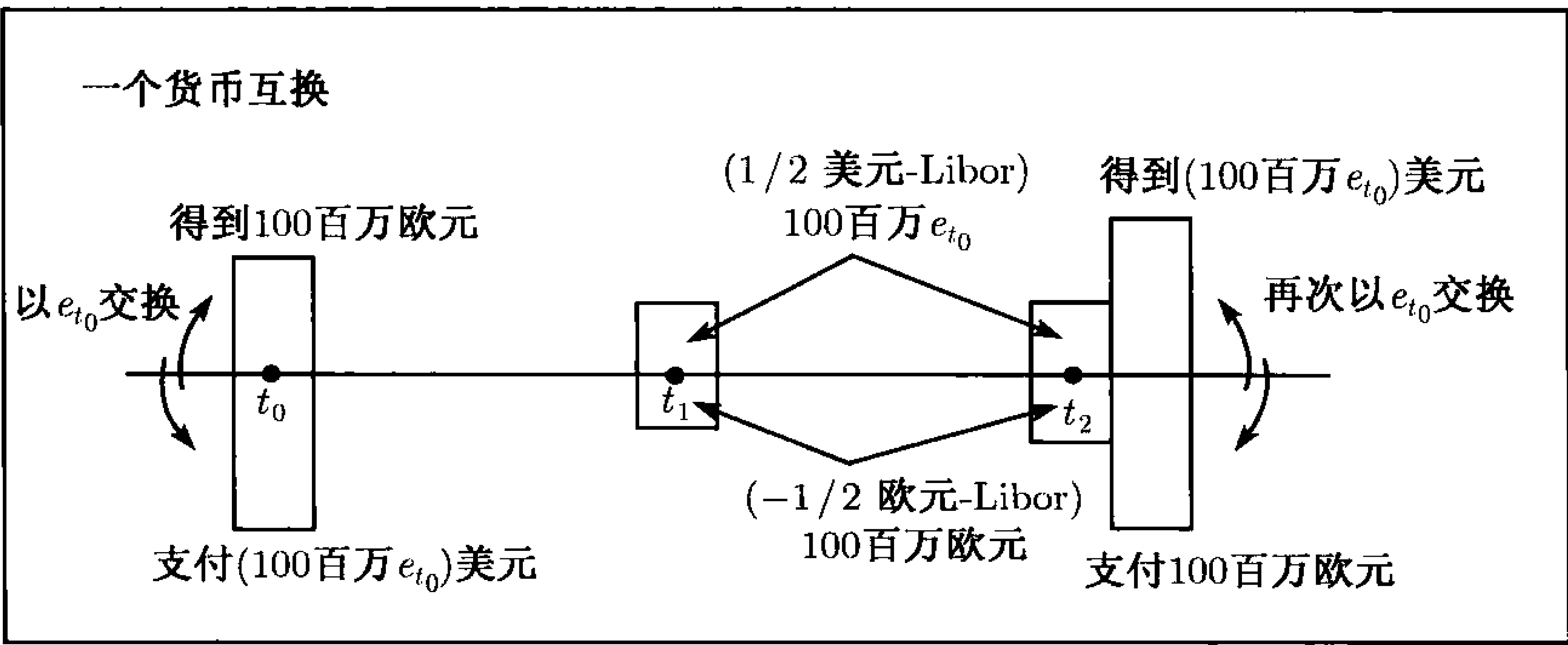



图 5-13

图 5-14 所示是一个具有相同期限的 FX 互换. 在这里我们没有期中的利息支

① 如果这里的下一天是属于下一个日历月, 那么支付就在前一个工作日进行.

付, 只是最后名义本金以不同的汇率被再次交换, 这个汇率为

$$f_{t_0} = e_{t_0} \frac{1 + L_{t_0}^{USA}\delta}{1 + L_{t_0}^{EUR}\delta}. \tag{51}$$

为什么会有这个不同呢? 为什么货币互换名义本金被再次交易的汇率与初始时相同, 而 FX 互换却不同呢?

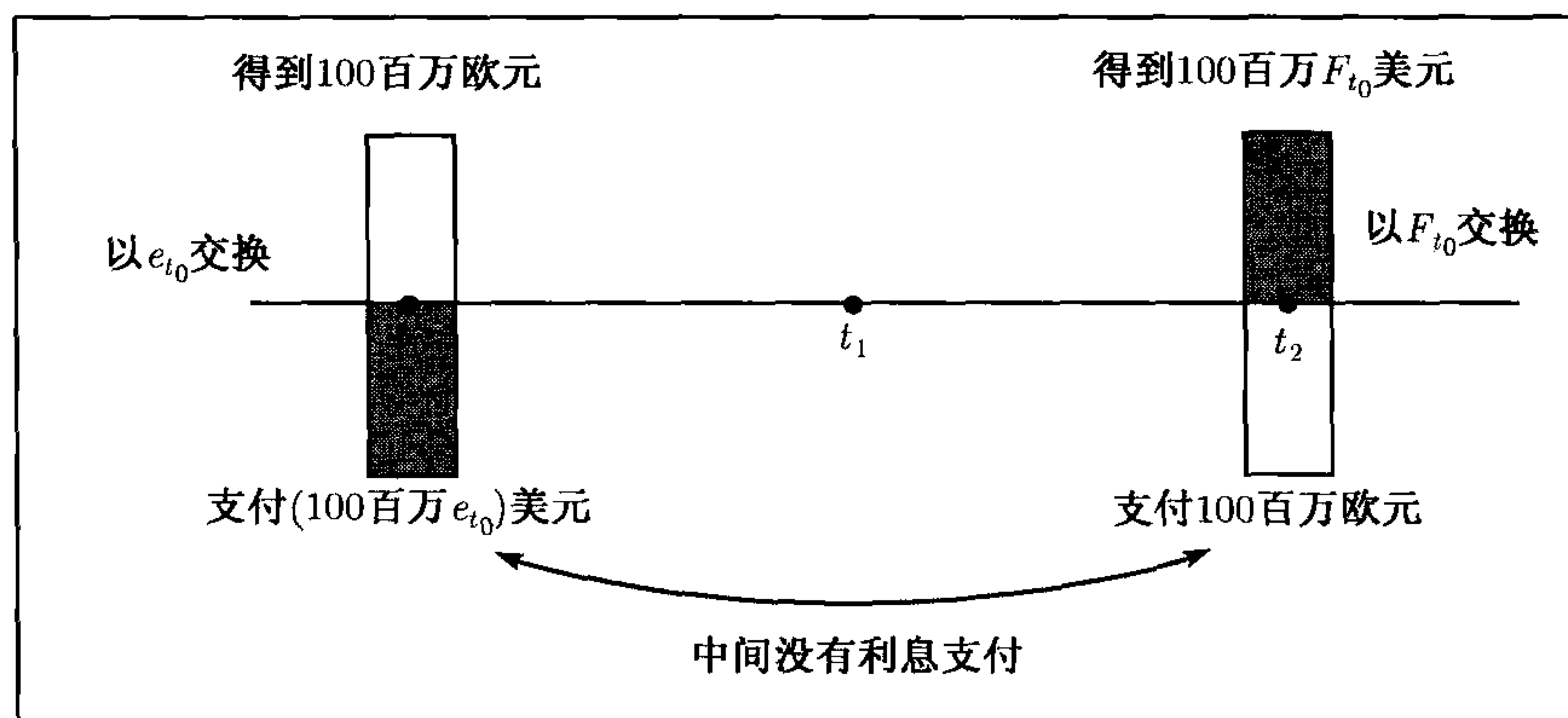



图 5-14

我们从下面这个角度来分析一下. 双方将交换为期一年的不同货币, 在年末他们将交换回各自原来的货币. 在这一年中, 两种货币的汇率通常是不同的. 在货币互换中, 这个差别以期中利息支付的形式被弥补了, 所以最后互换的双方都收回各自初始的数量. 期中利息支付会针对任何利率差额进行补偿的.

但是在 FX 互换中, 没有期中利息支付. 因此这个补偿被放到了最后名义本金的再次交换中, 所以两次交换的汇率是不同的.

**另一个区别**

从金融工程的角度来看, 货币互换是两个没有信用风险、不同货币的 FRN 交换; FX 互换是不同货币的零息债券的交换.

因为 $t_1$ 时的 Libor 利率在 $t_0$ 时是未知的, 所以货币互换比相同期限的 FX 互换承受了略微不同的风险.

## 5.9 术 语

我们在这里补充介绍一些术语和金融工具.

*平价互换*是我们前面介绍的利率互换的正式名称. 本质上, 它就是一个期初交换和期末交换名义本金为 100 的互换结构. 在初始时刻没有其他的现金支付.

*累积互换*的结构是, 一方支付标准的浮动参考利率, 如 Libor, 得到 Libor 和一个利差, 但是支付给对方的利息只有在 Libor 利率停留在先前设定的上限和下限之间是才累计.

*商品联系的利率互换*是一个混合互换, 它是 Libor 和一个与某种商品价格联系起来的固定利率的互换. 原油的买方可能希望将费用跟债务联系起来, 这个买方可以选择接受 Libor 而支付一个与原油联系的利率, 这样的话, 随着原油价格的上升, 原油买方支付的固定利率下降.

*缝隙利差互换*是原油冶炼厂使用的一种互换, 他们支付浮动的冶炼产品价格, 得到浮动的原油价格和一个固定的利差, 也就是缝隙利差. 以这种方式, 冶炼厂可以确保原油价格和他们的产品价格这么一个很窄的利差.

在*可扩展互换*中, 一方有权利增加原来的期限.

*强势 Libor 互换*所交换的是 Libor 利率的平方或三次方 (更高次) 减去一个固定数量/利率, 交换一个浮动利率.

**两个有用的概念**

债券市场中有些术语经常被用在互换市场中, 我们简单的复习下面这些术语. 一个*基点的现值*或者 PV01 表示一个在时刻 $t_i$ 周期性支付 0.000 1 的年金的现值, 年金的现值用适当的 Libor 利率或者是相应的远期利率计算:

$$PV01 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(0.01)\delta}{\prod_{j=1}^{i}(1+L_{t_j})\delta} \tag{52}$$

为了得到一个基点的灵敏度, 由上面公式得出的值还要除以 100.

DV01 是收益率 $y_{t_0}$ *改变一个基点所产生的美元价值*, 其表达式为

$$DV01 = m(\text{债券价格})(0.01) \tag{53}$$

其中 $m$ 是修正久期, 它定义为一个债券收益率的价格导数除以债券价格. PV01 和 DV01 这个概念在与互换相关的工具和其他固定收益产品的定价中经常使用[①].

## 5.10　结　论

为什么当你可以通过交换相应的收益并以达到同样效果的情况下仍然买卖证券呢? 实际上, 在有些情况下买卖证券是不可行的. 第一, 这些操作会产生现金流;

① 在前面的公式中, 债券价格总是指它的"肮脏"价格. 该价格等于真正的市场价值, 它等于"净价"与累计利息之和.

第二, 证券可能是非流动性, 买卖起来不是很容易; 第三, 一旦一个证券卖了以后, 我们想重新买回来就需要搜索费用, 我们能找到吗? 价格怎样呢? 佣金是多少呢? 互换相应的收益会减少很多费用.

由于他们免除了现金买卖交易, 将这两个活动合并成一个, 就消除了可能的信用风险, 所以, 互换已经成为了金融工程中一个主要的工具.

## 参考文献

互换是很寻常的产品, 有很多研究它们的推荐书目. 本章只是提供了一个非技术性的介绍, 因此这里将列出相同层次的参考书籍: McDougall(1999) 是一本很好的介绍互换产品的著作, McDougall(1999) 和 Das(1994) 详细讨论了互换并研究了很多实例, Cloyle(2000) 给出了货币互换的基本介绍.

## 习　题

1. 假设你有一个 4 年期的附息债券, 息票率为 8%, 债券是半年付息一次, 面值为 100.

(a) 你能构造出这个债券的等价合成品吗? 请详细说明并给出它的现金流.

(b) 在下面的期限结构下, 给出这个债券价格.

$$B_1 = 0.90/0.91, \quad B_2 = 0.87/0.88, \quad B_3 = 0.82/0.83, \quad B_4 = 0.80/0.81.$$

(c) $1 \times 2$FRA 利率是多少?

2. 仔细阅读下面这段材料.

*由于回购计划意大利的资产互换数额大幅度攀升*

*由于意大利财政部宣布 "不排除回购计划", 这使得交易商们纷纷签订互换. 上周, 基础互换利差市场的数额翻了一番. 交易商说, 如果考虑到在每年这个时候很多投资者都在度假这一事实的话, 那么此次数额的增加可以说是空前的.*

*交易商和投资者进行交易目的在于当财政部实施回购计划时, 交易商们能够从由此引起的债券数量减少, 并最终导致债券价值的上升中获利. 一个交易商说到, 在一个典型的交易中, 一个拥有 30 年期的意大利政府债券的投资者缔结一个互换合约. 在这个互换中, 投资者支付 6%的息票, 得到 6 个月 Euribor 加上 10.5bp. "因为交易商开始缔结这样的头寸, 上星期一超过 Euribor 的利差已经下降到 8bp." 他补充到. 这个交易商认为, 如果股票市场的条件得以改善, 那么在下个月内, 这个利差可能会下降到 6.5bp. 这项交易的典型面值是 5 000 万欧元 (4 365 万美元), 到期日是 30 年. (IFR 第 1217 期)*

(a) 假设存在一条意大利的互换曲线以及一条由意大利政府债券 (主权债券) 得到的收益曲线, 假设后者是向上倾斜的. 试讨论如果意大利政府回购债券时, 这两条曲线会发生怎样的相对变化?

(b) 哪些债券被回购这一点是否很重要?

(c) 画出一个 5 年期的意大利政府附息债券 (支付息票率 6%) 的现金流以及一个固定支付利率互换的现金流.

(d) 10.15bp 利差存在的原因是什么?

(e) 当政府回购债券时, 这个利差会怎样变化? 利用现金流图给出你的结论.

3. 假设你是一个互换做市商, 在你的账簿上有如下的交易:

多头

- 2 年期接受方普通利率互换, 利率 6.75%p.a. 30/360. USD $N = 5$ 百万.
- 3 年期接受方普通利率互换, 利率 7.00%p.a. 30/360. USD $N = 10$ 百万.

空头

- 5 年期接受方普通利率互换, 利率 7.55%p.a. 30/360. USD $N = 10$ 百万.

| 期限 | 买价/卖价 |
|---|---|
| 2 | 6.75–6.80 |
| 3 | 6.88–6.92 |
| 4 | 7.02–7.08 |
| 5 | 7.45–7.50 |
| 6 | 8.00–8.05 |

(a) 给出每个互换的现金流.

(b) 就现金流而言, 你的净头寸是什么? 用图表示出来.

(c) 利用互换曲线, 计算每个互换的现值.

(d) 就现值而言, 你的净头寸是什么?

(e) 怎样对冲一个 4 年期互换? 应该建立什么头寸以及名义本金是多少?

(f) 你从哪里得到这个对冲头寸?

(g) 你还能给出另外一个对冲头寸吗?

4. 假设在时间 $t = 0$, 我们有 4 个零息债券的价格 $(B_1, B_2, B_3, B_4)$, 到期时间分别为 $t = 1, 2, 3, 4$. 它们组成了利率的期限结构.

我们同样期限的远期利率 $(f_0, f_1, f_2, f_3)$, 其中每个 $f_i$ 表示在时间 $t = 0$ 签订的贷款利率, 这项贷款开始于时间 $t = i$, 结束于时间 $t = i + 1$. 换句话说, 如果一个人在时间 $i$ 借了 $N$ 英镑, 他将于时间 $t = i + 1$ 偿还 $N(1 + f_i)$ 英镑.

即期利率用 $r_t$ 表示, 根据定义, 我们有

$$r = f_0 \tag{54}$$

$\{B_i\}$ 和所有的远期贷款都是无违约风险的, 所以这里不存在信用风险. 假设给出了下面的即期报价:

$$B_1 = 0.92/0.94, \quad B_2 = 0.85/0.88, \quad B_3 = 0.82/0.85. \tag{55}$$

并且

$$f_0 = 8.10/8.12, \quad f_1 = 9.01/9.03, \quad f_2 = 10.12/10.16, \quad f_3 = 18.04/18.10 \tag{56}$$

(a) 给定远期利率的数据, 求零息债券 $B_1, B_2$ 的无套利价格.

(b) 在这些条件下 3 期的互换利率是多少?

5. 回到问题 4, 假设还给出了美元和欧元的 FRA 数据. 并且, 假设你现在寻找套利机会, 这些附加的数据有用吗? 简单讨论一下.

6. 国外投资者在澳大利亚购买澳大利亚元工具时, 必须支付所获得利息的置留税. 这个置留税可以利用互换和债券从一个税收套利组合中赚得. 首先, 让我们思考与这个问题相关的一段材料.

在澳大利亚的置留税制度下, 在国内和国际市场中, 与非居民发行商相比, 居民发行商受到了歧视. 这种情况必须得到改变.

在国内市场中，由居民发行商发行的债券要缴 10%的置留税. 从非居民发行商在澳大利亚国内发行的债券通常不用缴置留税，因为这些收入是从海外获得的，这些债券就是所谓的袋鼠债券. 这使得国际发行商大范围地离开他们自己的市场而涌进澳大利亚市场.

在国际竞技的舞台上，惩罚性的税收规则大大地减少了外国投资者对联邦政府债券和半政府债券的兴趣. 相反，极大地促进了 AAA 级别发行机构 (比如说，房利美) 全球澳大利亚美元证券的发行，这些机构为投资者提供了一个很具吸引力的可免除税收的选择.

这项税收政策的影响更容易在二级市场中表现出来. 昆士兰财务公司和新南威尔士财务公司在国际市场中发行的可交换债券 (exchangeable issues) 正通过国内相应的债券进行交易，这些可交换债券是免置留税的.

如果澳大利亚想要发展成为一个国际金融中心的话，对国内借款人的束缚必须解除，使之享有进入国际资本市场的途径. 这意味着，必要的成本以及税收的不确定性必须达到最小化. 更重要的是，为了澳大利亚国内债券市场的持续发展，国内的利息收入和国外的利息收入之间的不公平的税收政策必须得以纠正. (IFR, 第 1206 期)

考虑与此有关的一系列问题. 首先，假设一个由地方政府发行的 4 年期附息债券，支付年利息. 我们令其息票率为 $c\%$.

接下来，考虑一个澳大利亚元的欧洲债券，这个债券同时由一个西班牙公司发行，欧洲债券的息票率为 $d\%$，这个西班牙公司将在西班牙国内使用它们来融资.

最后，假设澳大利亚元利率互换和 FRA 不必缴纳任何税收.

(a) 一个外国投资者必须为这个欧洲债券支付置留税吗？为什么？

(b) 假设澳大利亚美元利率互换的互换利率是 $d + 10\text{bp}$. 设计一个 4 年期的利率互换，使之从税收套利中获利. 给出相关的现金流.

(c) 如果互换的名义本金为 $N$，那么这项税收套利的收益是多少？

(d) 你能否利用一系列的 FRA 从相同的税收套利中获利？

(e) 哪一个套利组合你更喜欢，互换还是 FRA？原因是什么？

(f) 在这些条件下，你认为这个西班牙公司在哪里发行这些债券更有利，澳大利亚国内市场还是欧洲市场？

7. 考虑一个 2 年期的货币互换，互换是在美元和欧元之间进行的，只涉及浮动利率. 欧元的基准被选为 6 个月欧元 Libor，美元基准是 6 个月 BBA Libor. 你还具有以下的信息：

名义本金 =10 000 000 美元

汇率欧元/美元 =0.84

(a) 给出这个货币互换的现金流，量化每列现金流的大小.

(b) 证明这个货币互换等价于两个浮动利率货款.

(c) 假设一个公司想从货币市场中借来 10 000 000 美元.

关于可得利率这个公司能够得到的 6 个月货款信息为

欧元 Libor=5.7%， 美元 Libor=6.7%.

欧元–美元货币互换利差：1 年 −75, 2 年 −90.

那么这个公司是否应该直接借美元？如果它先借欧元，然后将欧元换为美元的话，这家公司是否会从其中受益？

# 第 6 章　金融工程中的回购市场交易策略

## 6.1　引　　言

本章是非技术性的, 主要介绍一种容易使人混淆的操作. 简要地回顾回购市场及回购的一些应用, 以便于更好地理解金融市场中许多标准化的操作.

很多金融工程策略要用到回购市场. 回购市场既是互换市场的一种补充, 同时也是它的替代物. 在一个互换交易中, 市场参与者同步“买”、“卖”由两种不同证券产生的现金流. 譬如把股票的收益与 Libor 浮动利率进行交换. 这相当于卖掉股票, 得到现金, 然后买一个浮动利率票据 (FRN). 这一系列的操作都结合在一个股票互换中, 并且不必实际买卖所涉及的资产或交换原始本金. 不用交换现金、灵活的到期日和流动性好, 这些优点使互换成为金融工程中的一种基本工具, 也是最重要的场外交易衍生产品之一. 运用互换, 一系列复杂的操作可以有效快速并且几乎无风险地完成.

回购交易有着与互换交易类似的高效性. 但二者有两个主要的不同. 在互换中, 现金的使用达到了最小化, 且金融工具的所有权不发生变化. 而在回购交易中, 现金和资产所有权都要易手. 假设一个市场参与者确实需要现金或者证券, 但又不想永久地放弃或拥有这个证券. 在这种情况下, 互换就不能实现这个目的, 而回购则可以.

作为一种金融工具, 回购可以使我们在不需要卖出或放弃相关资产最终所有权的情况下获得资金. 或者, 我们可能需要某种资产, 但却不想永久地拥有它, 那么在这样的情况下, 就需要运用一种工具使我们在不需要真正买入的情况下获得该资产的所有权. 在上述两种情形中, 我们或者暂时需要一笔资金, 或者暂时需要一项资产的所有权, 回购市场为实现这种操作提供了很好的工具. 通过回购交易, 我们可以“买”, 但又不是真正意义上的买, 可以“卖”, 却又不是真正意义上的卖. 从某种意义上讲, 这跟互换有些类似, 但大多数回购交易包括了现金和证券的交换, 这是它跟互换工具的一个主要不同之处.

在每种情况下, 回购操作的目的都不是“长期”的. 或者更准确地说, 它的目的在于更平稳地进行日常操作, 建立方向头寸或者更有效地对冲某个头寸.

## 6.2 回　　购

我们从回购的标准定义开始讨论. 回购就是一个*重新买回协议*. 在这个协议中, *回购交易商*卖给对方一个证券时, 并同时同意在预先确定的时间以预先确定的价格买回这个证券. 因此, 卖出和重新买回证券都写在同一张交易单上. 在一个回购交易中, 回购交易商是先交割证券并从客户那里获得现金, 然后再重新买回此证券. 如果操作是反向的, 也就是说交易商是先买进证券, 并同时同意在一个确定的时间以一个确定的价格把它卖出去, 那么我们称之为*逆向回购*. 或者简单地称为*逆向*(reverse).

乍看上去, 回购好像是一个相当简单的交易, 不会对金融工程方法产生什么贡献. 其实不然, 事实上在金融工程实际应用方面, 回购和互换一样普遍.

考虑下面的例子. 假设有一个投资者想用短期融资购买一个证券. 如果他向一家银行贷款获得这笔资金, 然后从另一个交易商那里买进证券, 那么该贷款是*无担保的*. 这意味着他需要支付较高的利息成本. 现在如果他通过先购买然后再回购证券来使用回购, 那么他就可以较低的贷款成本获得所需资金, 因为如此一来贷款就有了“抵押”了. 结果, 交易成本和贷款利息都会有所降低. 除此之外, 回购操作还有一个优点就是所有的交易都通过同一张交易单来实现. 较低的风险、较高的灵活性以及其他一些应用上的便利使回购成为非常普遍的流动工具.

运用回购可以改变交易顺序. 在一个典型的直接购买 (outright purchase) 操作中, 市场上专业人士的操作顺序是

$$\text{获得资金} \rightarrow \text{支付证券购买款} \rightarrow \text{接受证券}, \tag{1}$$

而当运用回购来购买债券时, 交易序列变为

$$\text{购买证券} \rightarrow \text{立即回购它} \rightarrow \text{获得资金} \rightarrow \text{支付债券购买款}. \tag{2}$$

在这种情形下, 回购市场使得市场参与者能以较低的融资成本获得买入证券所需的资金. 债券是用来作抵押的. 如果它是一种无风险证券, 所借资金将适用于相对低的*回购利率*.

类似地, 回购也会使卖空证券变得相对容易. 应用回购市场的参与者可以按以下的步骤来实现卖空:

$$\text{交割现金且借入债券} \rightarrow \text{偿还债券且收回现金加上利息}. \tag{3}$$

这样市场参与者就会通过借入债券赚取*回购利率*. 这相当于他持有一个短期债券头寸, 只不过债券不是买的而是“租”的.

### 6.2.1　一个惯例

如果不多加注意的话, 下面的内容可能令人感到很迷惑. 回购市场上的术语都是从*回购交易商*的角度设置的. 同样, 我们用“借”和“贷”这样的词时, 易手的项目指的*不是*现金, 而是债券或股票一类的*证券*. 特别地, “借出者”和“借入者”由证券而不是现金的借贷来确定. 虽然在实际交易中现金也要易手.

按照上面的说法, 在一个首先交割证券获得现金的回购交易中, 回购交易商就是“借出者”——他借出证券, 得到了现金. 回购交易商就通过这种方式筹集到了他想要的资金. 另一方面, 如果同样的操作是由客户发起, 而他的对手是一个回购交易商, 这个交易就是*逆向回购*. 跟回购交易正好相反, 交易商借入证券并交割现金, 而顾客自然就交割证券并接受现金.

### 6.2.2　特别抵押和一般抵押

回购交易通常可以分为两类. 有时, 特定的证券会受到市场特别的关注. 例如, 某些债券成为最便宜交割证券. 承诺在债券期货市场上交割债券的“卖空方”只关注某种特别的债券而对其他类似的债券不感兴趣, 这种特别的债券需求量就会很大, 从而这种债券成为债券市场的特别债券. 详细指定特别证券的回购交易称为*特别回购*. 只要市场上某种证券相对缺乏, 这种证券就始终是特别的.

另外, 如果在一个回购交易中, 借出证券的一方可以借出任何具有相似风险等级的证券, 那么这种类型的证券就被称为*一般抵押*. 例如, 在一项回购交易中, 一方借出美国政府债券以获得现金, 而另一方不关心自己将要获得的债券具体是美国政府债券的哪一种, 那么这项抵押可以是任何美国国库券.

*特别*证券的价格比同等一般证券的价格高. 这意味着, 如果一个顾客想借到这种特别证券, 他就只能以较低的利率借出现金. 毕竟, 这个顾客确实很需要这种特别的证券, 因此他必须为之付出一定的“代价”. 这个代价就是同意接受一个较低的回购利率.

一般抵押的利率称为*回购利率*. 特别抵押证券要求低得多的回购利率. 因此特别证券的最初所有者可以把获得的现金通过一个一般回购重新借出, 获得较高利率, 并从利率差中获得“特别”收益.

**例**

*假设回购利率是 4.5%~4.6%. 你有一个价值为 100 美元的债券, 这个债券在第二天恰好成为特别证券. 那么你可以把它借出一周以获得 100 美元的现金, 而只需支付 2.5% 的利率. 这样做的好处是你可以立即拿这 100 美元回购一般抵押证券而获得 4.5% 的年利率. 这样你就会因为碰巧持有了特别债券而获得高收益.*

运用债券市场数据进行调查研究时, 考虑到特别证券回购交易是很重要的. 如果“特别回购”和一般抵押的交易不加区分, 数据将会展现出一些奇怪的变化, 很

可能有误导性. 认识到这一点是很重要的, 因为大约有 20%的回购交易中包含特别证券交易.

*债券为什么会成为特别的债券*

至少有两个原因使得一些债券成为特别债券. 一个原因是一些债券在债券期货交易中 (见本章末的案例分析) 成为*最便宜交割*(CTD) 债券. 第二个原因是*在期*(on-the-run) 债券流动性更好, 因此交易商在对冲风险和建立头寸时对它的需求量很大. 这一类的"基准"债券通常会成为特别债券. 这好像有些荒谬, 因为如此一来, 相对于其他债券, 流动性越好的债券越贵.[①]

我们看一个例子. 考虑固定收益市场上所谓的"*蝶式交易*"(butterfly trade). 我们有时把包含收益率曲线中*凸起部分*的不平行的变化称为"*蝶式变化*". 这样的变化可能对财务报表和固定收益投资组合产生严重的影响. 交易者可以用 2-5-10 年的在期债券生成对冲策略, 自保或进行投机来应对收益率曲线的这种变化, 我们把这些交易称为"蝶式交易". 那么在这些交易策略中用到的在期债券就可能成为"基准债券", 从而成为特别债券.

### 6.2.3 总结

总结以上讨论, 回购交易有以下优点.

(1) 借出现金时, 回购向借出者提供*双重担保*, 即回购交易商的 (较高) 信用等级和抵押债券.

(2) "特别"回购是交易商提高收益的独特且方便的途径.

(3) 运用回购市场, 交易商可以通过卖空证券来高效地筹集资金. 这就提高了市场效率, 改善了市场交易.

(4) 回购降低了交易和融资成本, 并提高了时间的利用率, 市场参与者在构造金融策略和金融产品时显然也会从中受益.

我们现在考虑各种不同类型的回购或回购交易.

## 6.3 回购的类型

"回购"是一种卖出并同时重新买回同一金融工具的交易. 但在实践中, 这项操作可以通过不同的方式来实现, 因此也就出现了略微不同的回购种类.

### 6.3.1 标准回购

*标准回购*也称为美式回购, 就是我们前面刚刚讨论过的操作. 例如, 一个回购

① 一个在期 (on-the-run) 债券是最新发行的某一特殊到期日、特殊风险等级的债券. 例如, 一个在期 10 年期国库券就是在国库券拍卖时卖出的最近的 10 年期债券, 其他 10 年期债券都是过期 (off-the-run) 型的.

交易商持有一个证券, 以 100 美元的价格将这个证券卖出, 同时承诺在一个月后还以 100 美元的价格重新买回, 且向此证券的买方返还他借入的资金并支付回购利息.

**例**

持有一个固定收益资产组合的投资者需要筹集一笔资金, 他只需要使用这笔资金一个星期. 那么他通过借出其资产组合中的某个债券来获得所需资金. 假设交易日是星期一上午, 交易的有关参数如下:

估价日期 (value date): 交易日 +2 天

起始收入 (start proceeds): 5 千万欧元

抵押: 6-3/4% 4/2003 债券 (票面价值为 4.740 7 千万)

期限: 7 天

回购利率: 4.05%

最后收入 (end proceeds): 起始收入 +(起始收入 × 回购利率 × 期限)

由此可知最后收入为

5 千万欧元 +(5 千万欧元 ×0.040 5×7/360)=50 039 375 欧元

回购利息: 39 375

因此, 通过借出票面价值为 47 407 000 的债券 (DBRs), 该投资者借到了 5 千万欧元. 交易过程如图 6-1 所示.

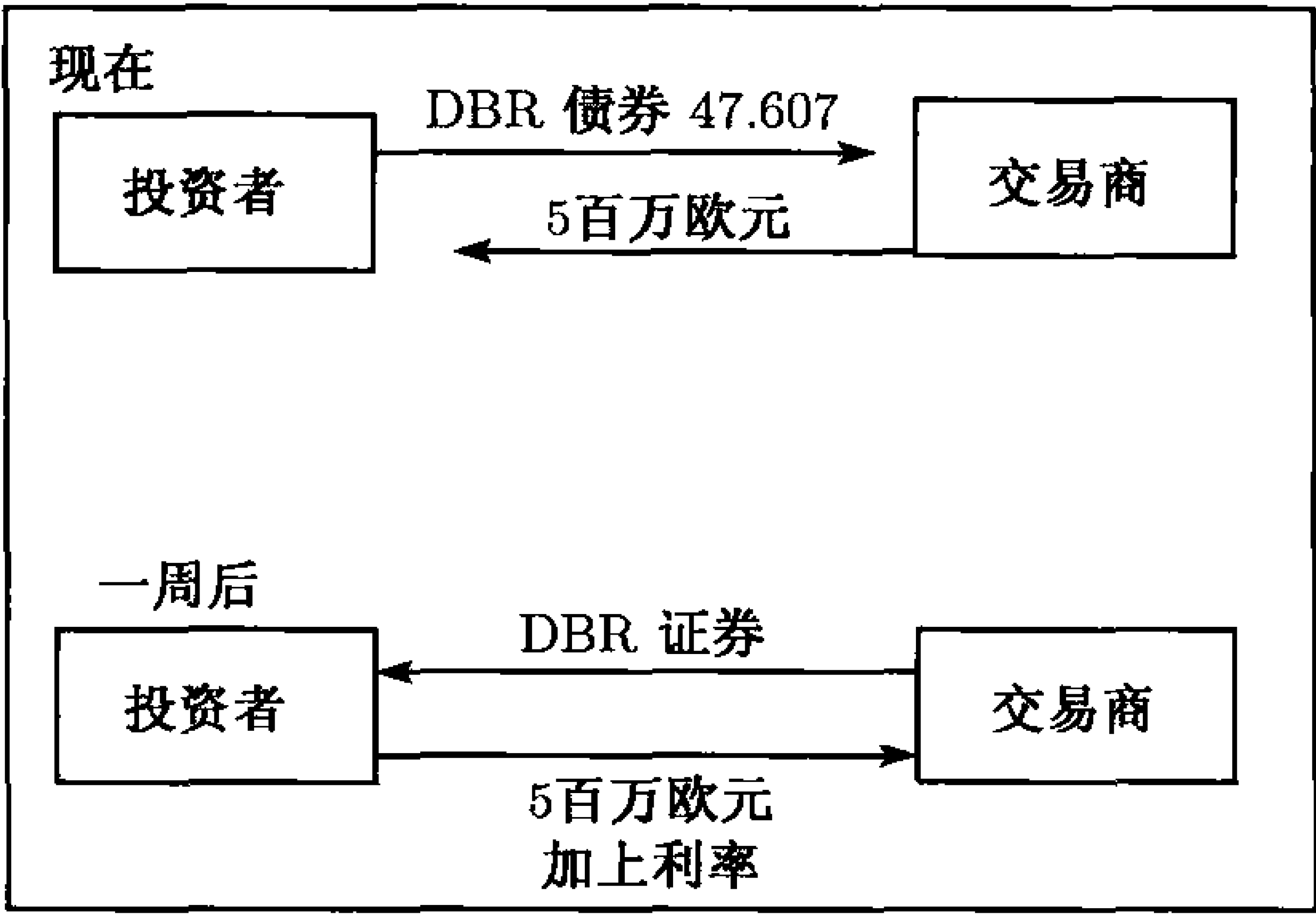



图 6-1

票面价值和 5 千万欧元的差异在于累积债券利息的存在. 累积债券利息要加到面值上, 也就是说用债券的全价 (dirty price) 来进行计算.

在考虑更多的实例之前, 我们需要讨论一下其他类型的回购.

### 6.3.2 卖和买回

第二种类型的回购称为卖和买回(sell and buy-back), 这种回购的最终结果跟标

准回购没有什么差别, 不同的是法律基础, 这意味着信用风险也可能不同. 事实上, 卖和买回型回购有两种不同的方式. 一种是没有证明文件的. 这种情况下, 交易双方在同一时间 $t_0$ 分别起草两份单独的合约. 一份合约包括即期卖出一个证券, 而另一份则包括这个债券在将来某一时间的远期购回. 其他的内容都是相同的. 两个价格应该像在标准回购中那样把相同的利息成分合并起来. 另一种卖和买回回购是有文件证明的, 交易双方只签订一个合约, 但操作还是分别进行的.

**例**

这个例子中的参数和前面标准回购例子中的参数一样, 我们发现, 虽然两种方式赚得的利息相同, 但操作过程不一样.

票面价值: 4.760 7 千万欧元, 6−3/4% 4/2003 债券

起始价格 (start price): 101.97 欧元

加上累积利息: 3.056 25 欧元

总价 (total price): 105.027 25 欧元

起始收入 (start proceeds): 50 000 322.91 欧元

最终价格 (end price): 101.922 459 欧元

加上累积利息: 3.187 5 欧元

总价 (total price): 105.109 959 欧元

最终收入 (end proceeds): 50 039 698.16 欧元

所赚回购利息为: 50 000 322.91×0.040 5×7/360=39 375 欧元

在这种情况下, 投资者的利息成本是买价和卖价的差. 赚到的利息跟标准回购中相等, 但对利率的刻画方式不同. 交易过程如图 6-2 所示.

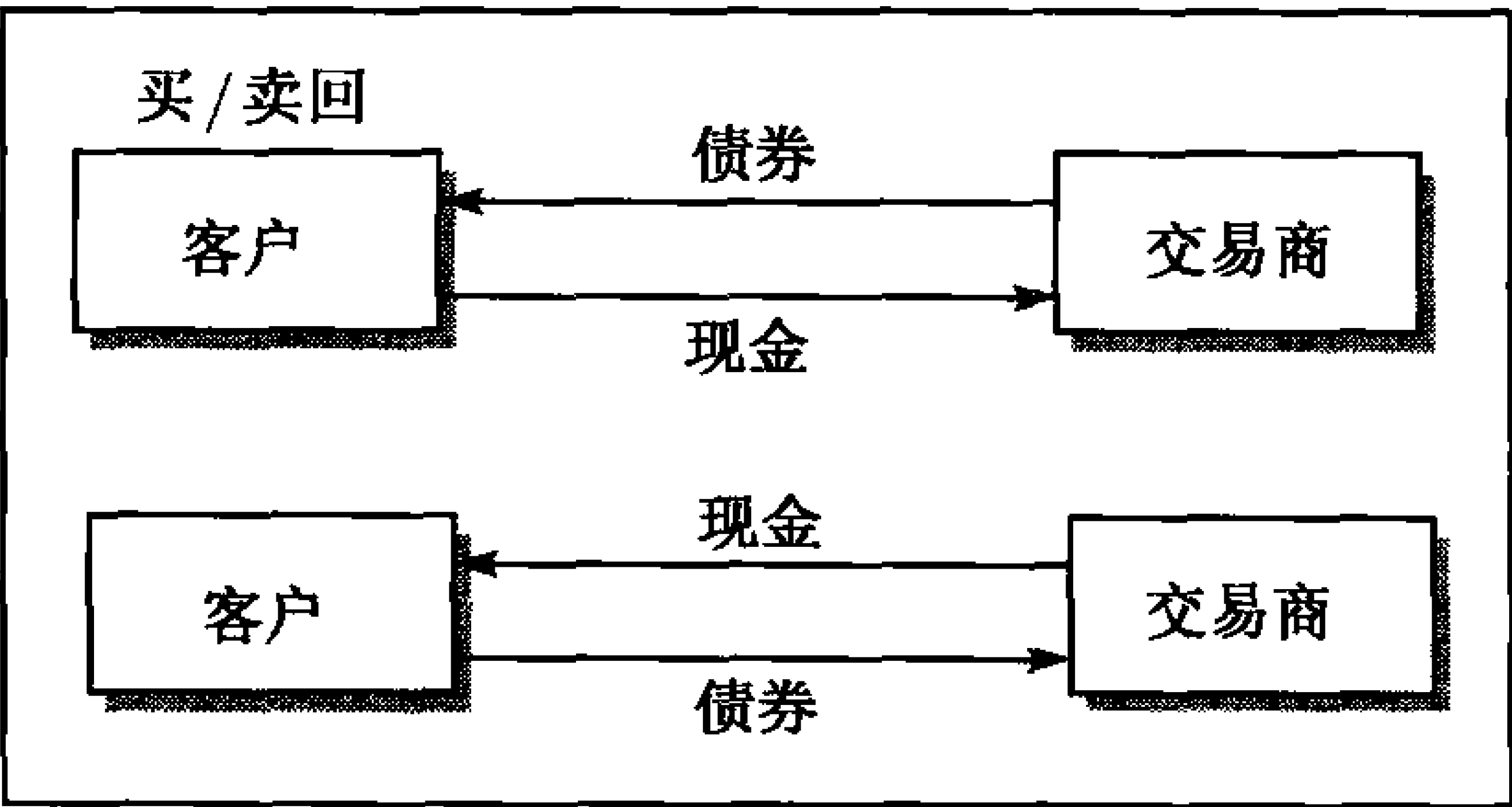



图 6-2

两类回购交易的主要不同不在于交易机制或所赚利息, 而在于合法经营和风险管理方面. 首先, 卖和买回回购不需要盯市, 从而账面比较简单. 第二, 在没有文件证明的卖和买回回购中, 没有文件意味着较低的法律费用和管理成本. 然而, 相关的信用风险可能会较高一些. 特别地, 违约时卖和买回回购没有要求补偿的权利.

### 6.3.3　证券借出

作为一种交易, 证券借出比回购出现时间要早, 在某种程度上也不如回购那么有实用价值. 然而, 两种操作的机制是类似的. 主要不同的是, 参与交易的一方可能并不真的需要回购产生的现金. 但他还是想获得利润. 因此, 他仅仅是为了一笔酬金而借出证券, 收到的现金可以向另一个机构抵押寄存.

像欧洲银行票据交换所和票据交换中心这样的结算机构 (clearing firm) 就进行证券借出交易. 假设一个债券交易商是票据交换中心的一员. 他卖出一个他没有的债券, 但在市场上找不到这样的债券, 从而不能保证准时交割, 这将导致*交割失败*. 这时票据交换中心就自动地借给这个交易商这样的债券, 这个债券是向其他成员 (随机) 借来的.

注意, 这里的证券不仅可以借出换回现金也可以换来其他证券. 原因很简单: 证券借出者并不需要现金而只要一个抵押品, 这个抵押品甚至可以是信誉证书或其他任何可以接受的物品.

证券借出和回购的一个不同之处在于它们的报价. 证券借出以酬金代替回购利率进行报价.

**例**

*票面价值*: 1 *千万英镑*, 8.5% 12/07/05, *借出两个星期*

*抵押*: 1.062 *千万英镑*, 8% 10/07/06

*酬金*: 50bp

*总酬金*: 50bp×(14/360)×1 *千万英镑*

显然, 抵押的市场价值至少应该等于所借出证券的价值, 交易的其他条款将根据借方的信誉来磋商. 交易过程见图 6-3.

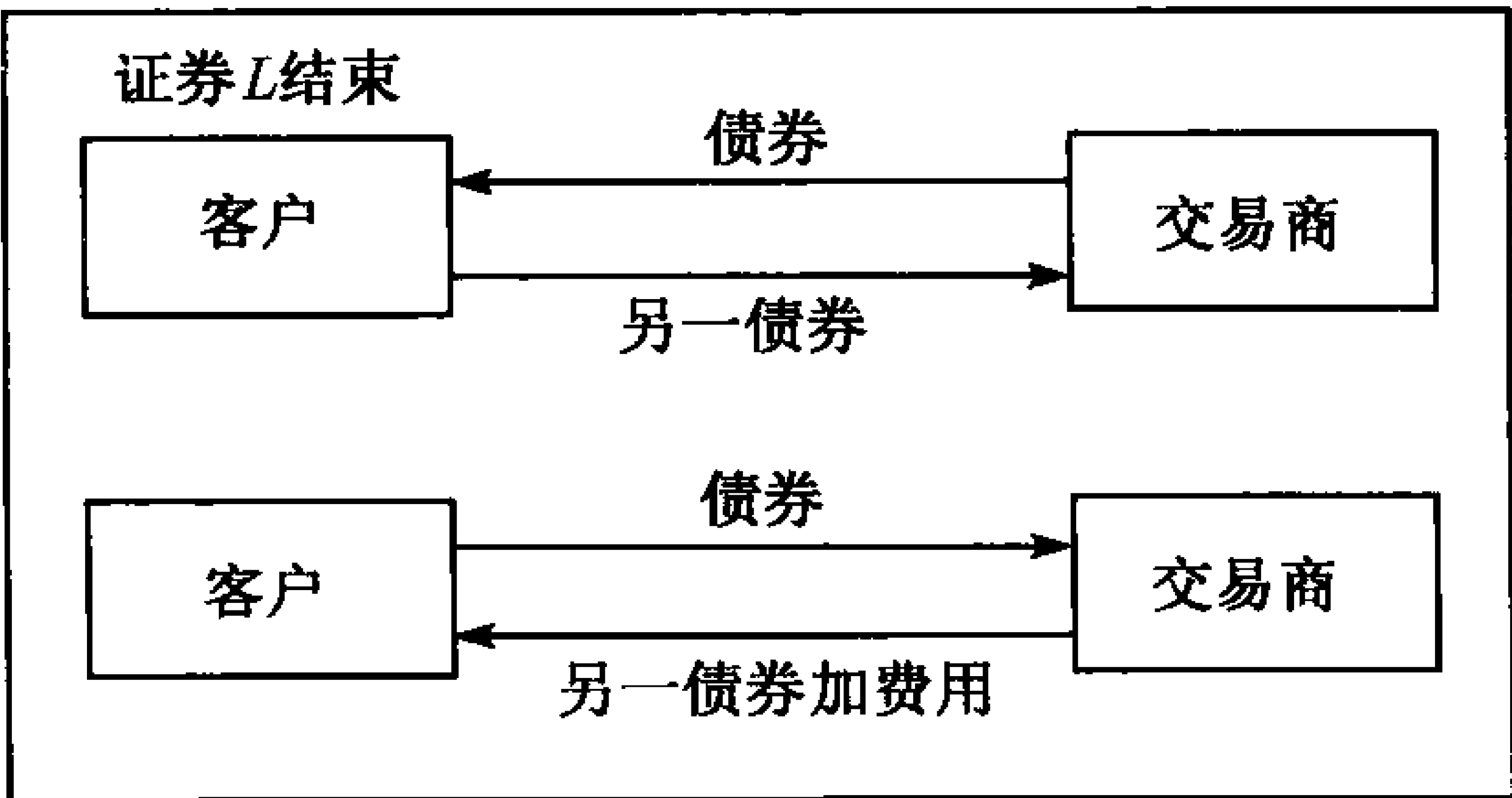



图　6-3

### 6.3.4　保管和回购类型

在一个回购交易中, 持有抵押品可以采用不同的方式. 根据证券的不同保管形

式, 回购可以分为以下几类. 典型的一种是*交割回购*(delivery-repo). 这种情况下, 证券交割给了对方 (即借方), 可以是实物交割或者是转账. 第二种称为*保留保管权回购*(hold-in-custody repo). 在这种回购交易中, 因为无法转账或时间及其他一些限制不值得转账, 而由卖方 (即借出者) 在回购期间代表买方持有证券.

第三种证券保管方式的回购是*三方回购*(a triparty repo). 在这种回购中由第三方代表买方 (借方) 来持有抵押证券. 通常回购交易的双方与这个保管人之间有一个账户, 那么三方回购就仅仅包括证券的转账. 这样可以支付较少的酬金或佣金而降低交易成本. 在这种情形下, 保管人要处理回购交易中的一些技术细节问题, 如 (1) 保证交割和支付, (2) 保证对抵押证券的盯市.

综上所述, 对于一个运转良好的回购市场来说, 好的保管和结算基础是最基本的先决条件.

*怎样才算是一个账面匹配的回购交易商?*

回购交易商的工作就是卖出回购合约. 他们随时公布一般抵押和特别抵押的买方和卖方回购利率. 在路透社或彭勃社公布的典型的回购交易表中, 某些证券明确标注为特别证券, 并要求特别的价格 (亦即特别回购利率). 回购交易商总是随时准备借入和借出证券, 不管是特别的还是一般的. 这样他们的账面是“匹配”的. 但是, 这并不意味着回购交易商不会在回购账簿中持有单向头寸. 除了买卖价差外, 建立市场敞口也是交易商利润的另一个来源, 如果他们觉得这样做是合适的话.

### 6.3.5 回购交易的有关问题

我们简单地总结一下关于回购交易一些更深入的方面.

(1) 一个回购就是证券和现金的临时交换. 意识到借入证券的一方拥有所借证券的临时所有权很重要. 他可以卖出标的证券. 因此, 回购可以用来进行卖空交易.

(2) 因为一般来说通过回购借来的证券可以卖出, 所以回购交易中后来偿还的证券可以不必跟原来的证券相同. 只要是“等价的”就可以. 除非回购交易中有其他不同的规定.

(3) 在一个回购交易中, 证券的借出者短期转让对该证券的所有权. 但是他仍然保留这个证券的市场风险和收益. 因此, 回购期间证券的票息收益还是由这个证券的最初所有者 (借出者) 获得.

借出者保留借出证券的风险的第二个原因是对该债券的盯市. 例如, 回购期间市场可能暴跌, 此时证券就会贬值. 证券的借方就有权要求额外的抵押. 反之, 如果证券升值, 他就必须返还部分抵押.

(4) 回购期间证券的票息或红利支付给了证券的最初持有者, 这称为*人造分红*(manufactured dividend). 分红可以发生在回购交易结束时或是交易期间的某个

时间.[①]

(5) 回购市场有一种实际做法, 它的作用类似于期货市场的初始保证金, 称为**剪除**(haircut). 借入债券的一方可能会要求附加的抵押才会交割现金. 例如, 如果一个证券现在的市场价值是 100, 借方可能只肯对这个抵押支付 98. 注意, 如果一个客户在回购市场上借入现金时要面临 2%的剪除, 而回购交易商则可以在没有剪除的情况下回购相同的证券, 那么显然交易商就能够从中获益.

(6) 在美国和英国, 回购文件是标准化的. 一个知名的标准回购合约是 PSA/ISMA 全球回购协议.

(7) 如果证券借出者愿意, 在标准的回购合约中可以用其他证券替代原来的抵押证券.

(8) 正如前面提到的, 回购的合法所有权给了借方 (典型回购中), 所以一旦违约, 证券就自动属于借方 (买方), 而不需要确定其所有权.

最后注意, 典型回购中的结算是交割对支付 (DVP). 对于国际证券, 交易双方一般要通过欧洲银行票据交换所和票据交换中心进行结算.

回购交易的结算有三种方式. 第一种是**现金结算**(cash settlement) , 即在交易日就可收到现金. 第二种是**常规结算**(regurity settlement), 在交易日过后的第一个工作日收到现金. 第三种是**跳跃结算**(skip settlement), 此时货款是在交易日后的两个工作日内收到.

## 6.4　股票回购

债券可以进行回购, 对股票也可以进行同样的操作. 这确实是非常有用的, 股票回购越来越普遍. 但从金融工程的角度来看, 股票回购存在着一些潜在的技术困难.

(1) 股票支付红利并且授权发行. 此外股票交易中存在并购. 如何在一个股票回购交易中把这些因素都考虑在内呢? 票息很容易处理, 因为它是同种类支付的. 但是并购和授权发行意味着标的股票更复杂的变化.

(2) 要找到一个 1 亿美元的单一债券进行回购是相对容易的, 但是要回购价值 1 亿美元的股票就要构造一个投资组合, 这使投资变得复杂化, 而且不容易将它设计成一个流动性好的合约.

(3) 由于种种限制, 市场上不存在标准的股票回购合约, 从而也妨碍了股票回购的流动性. 在英国, 这种交易是附加到标准回购协议上进行的.

(4) 最后, 注意到股票有较高的波动性, 这意味着需要更加频繁的盯市.

---

① 人造分红跟票息的支付日相同. 但在卖出和买回回购中就不一样了, 票息在交易的第二时段 (second leg) 支付.

还应该指出, 有些投资机构支持旧式的股票互换和股票贷款, 并把它们归类为股票回购.

## 6.5 回购市场交易策略

前面讲了回购的机制和术语, 本节将讨论如何运用回购工具来产生金融工程策略.

### 6.5.1 债券头寸融资

回购最典型的应用就是为一个固定收益策略融资. 例如, 一个交易商认为现在是买入某个债券的有利时机, 但是和其他证券专业人士一样, 该交易商手头没有资金. 此时可以运用回购市场, 买入债券同时把它回购出去, 这样可以得到支付这个债券所需要的资金. 这个交易商就赚到了债券收益, 成本是回购利率.

同样的程序可以用来为其他固定收益策略融资, 从而在市场的任何有利机会中获益. 下面是这样的例子.

**例**

*最近, 外汇基金 (foreign fund) 经理在新加坡美元市场上进行债券对互换利差交易, 希望从期限回购利率和互换利差之间差额的预期扩大趋势中获益. 一个交易商这样说: "这是有记载的最古老的交易之一." 并且这种交易最近才在当地市场开展……*

*在一个典型的交易中, 投资者购买收益率为 3.58%的 10 年期固定收益新加坡政府债券, 然后通过回购市场为这些债券筹集资金并支付 2.05%的年利率……同时该投资者还缔结 (enter) 了一个 10 年期的利率互换合约, 在此合约中, 他支付 3.715%的固定利率并接收浮动利率, 当前浮动利率是 2.31%. 一方面由于固定债券收益是 3.58%, 而在互换合约中他要支付 3.715%, 两者的差为 13.5 个基点, 也就是说他要支付 13.5 个基点. 另一方面他在互换合约中收到的浮动利率现在是 2.31%, 而利用回购筹集资金要支付的利率为 2.05%, 因此从这两者的差额中, 这个交易商会有 26 个基点的收益. 回购利率和互换利率的绝对水平可能会变化, 但它们的差很可能会增大, 从而增加这项交易的利润.*

*提高回购流动性的一个最重要的因素是在最后几个月, 新加坡金融主管当局开始运用回购市场而不是运用传统的外汇市场来进行金融干涉 …… (摘自《衍生产品周刊》)*

我们运用前面介绍的金融工程工具来详细地分析这个例子. 为简单起见, 假定标的债券和互换都是 3 年到期, 且有关数据跟上面的例子一样.[1] 交易商的债券头

① 读者很容易把这里给出的现金流图扩展成 10 年期的.

寸如图 6-4a 所示, 在 $t_0$ 时支付 100 以获得票息和本金. 6-4b 表示的是互换头寸. 这个互换"对冲"了固定票息支付并把从债券收到的固定票息收入"转化"成了浮动利息收入. 在新加坡与 Libor 等价的浮动利率是 Sibor. 把 6-4a 和 6-4b 的现金流竖直相加, 可得到 6-4c 的现金流. 由此可见, 经过互换, 交易商收到 −13.5bp 的 Sibor. 我们还发现这个头寸的另一个特点: 交易商收到浮动利率, 但他必须支付开始时的 100, 这意味着他要从其他渠道获得这笔资金.

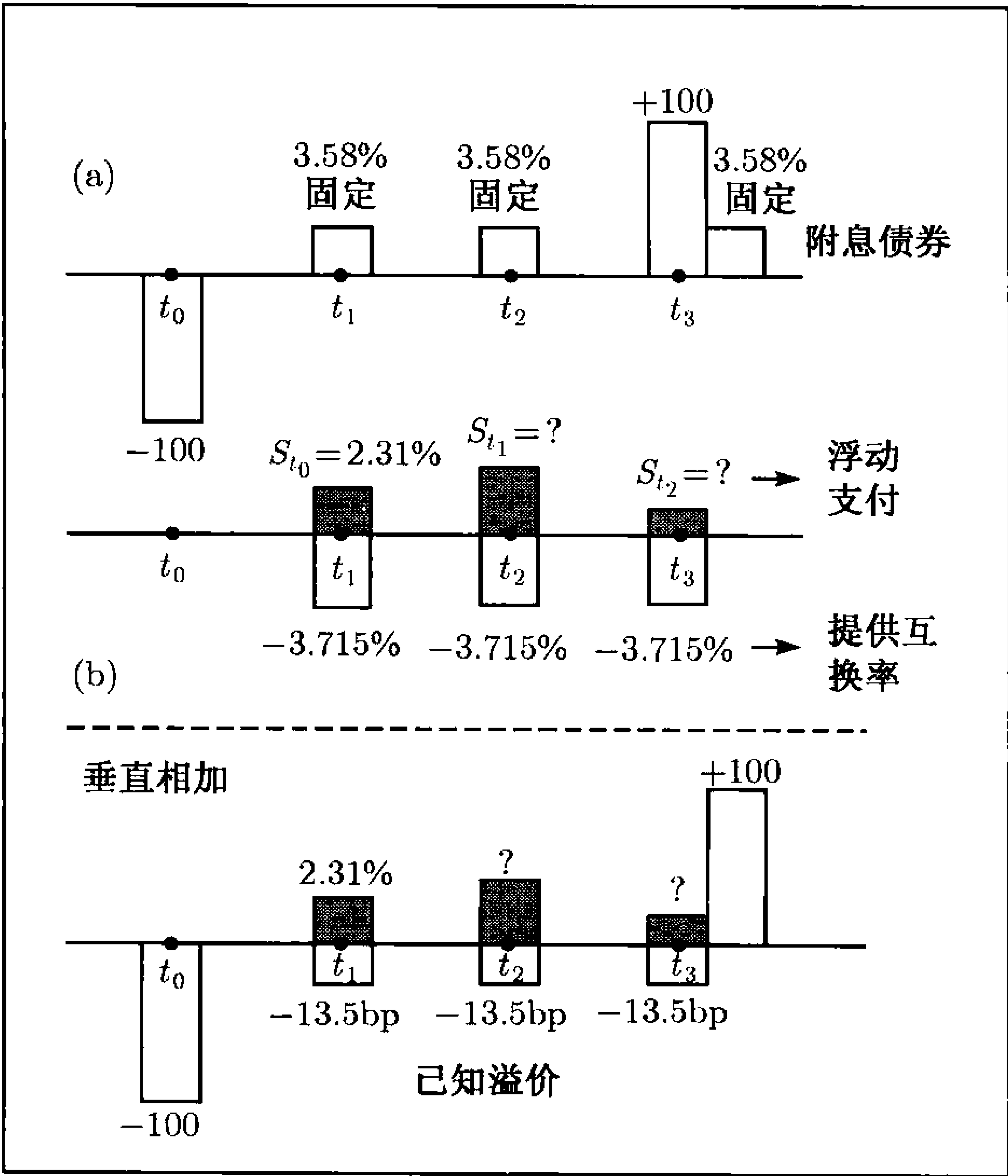



图 6-4

一种获得这笔资金的途径是从市场上借. 然而更好的办法是利用回购. 即把买入的债券借出作抵押, 交易商就可以获得他所需要的资金 100——假定没有剪除. 这时交易的现金流如图 6-5 所示. 我们考虑一个 1 年回购合约并假定在未来时期可以以未知的回购利率 $R_{t_1}$ 和 $R_{t_2}$ 继续回购. 根据前面的例子, 现行的回购利率是

$$R_{t_0} = 2.05\% \tag{4}$$

把图 6-5 的前两个头寸的现金流竖直相加, 我们得到市场参与者的最终敞口.

第一年这个市场参与者有 12.5bp 的净收益. 但更重要的是, 最终的头寸有如下特点. 图形表明这个市场参与者持有一个远期浮动利率债券. 这个债券支付浮动的 Sibor 利率 $S_{t_1}$ 和 $S_{t_2}$, 市场参与者期望

$$S_{t_1} > R_{t_1} + 13.5bp \tag{5}$$

$$S_{t_2} > R_{t_2} + 13.5bp \tag{6}$$

这就是说, 如果 Sibor 和远期回购利率的利差低于 13.5bp, 交易商就会遭受损失. 这就是整个头寸隐含的风险. 图 6-5 的最后一个现金流图说明了如何对冲这个敞口. 要对冲这个头寸, 我们需要卖空相同的债券远期.

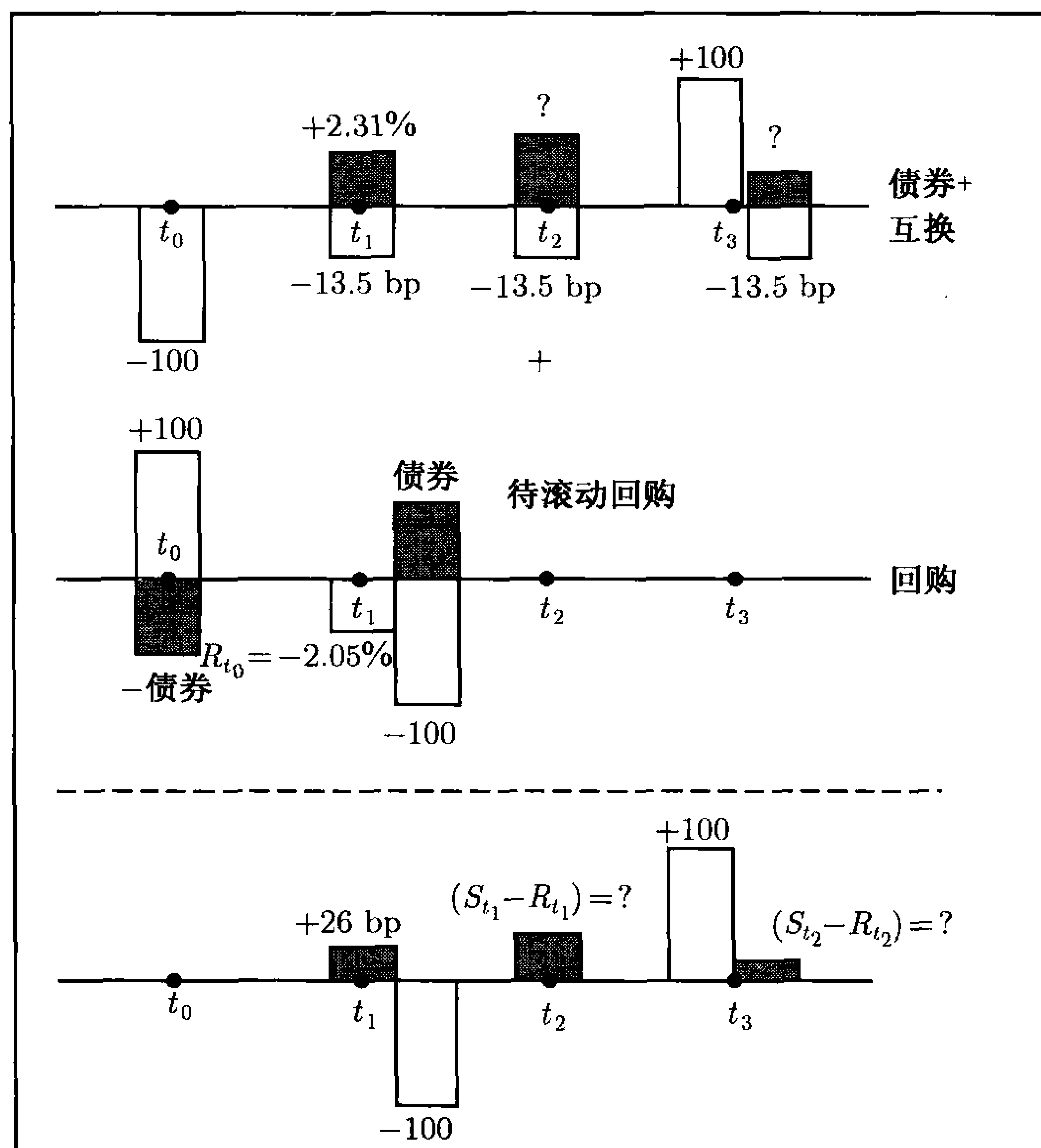



图 6-5

1. 风险和定价

前面研究的头寸在金融市场上是非常常见的. 市场参与者称之为**套利游戏**(arbitrage play) 或简称为 arb. 但由现金流图表我们知道这显然不是理论上的套利. 在前面的例子中, 没有初始投资, 然而立即就产生了一个正收益. 但这个市场参与者有一个不确定的头寸, 从而就有风险. 现在, 这个头寸有 12.5bp 的净收益, 而交易商面临的风险是: Sibor 浮动利率和回购利率未来的利差低于 13.5 个基点, 他就要遭受损失. 6 个月 Sibor 利率相对于 1 个月的回购利率来说期限较长, 因此我们可以设想收益率曲线的斜率是正的, 利差是正的, 但这也不是可以保证的.

其次，交易者还承担了不同的信用风险. 他因为有新加坡政府债券做抵押而在回购交易中支付 2.05% 的较低利率. 另一方面，为了收到的 2.31% 的浮动 Sibor 利率，他要向高信誉的私人机构贷款. 因此，问题仍然是：12.5bp 的净收益值不值得去承担这样的风险.

2. 一种套利方法

有一种方法可以给上例中 12.5bp 的收益定价. 事实上，由于市场参与者是收到浮动利率并支付回购利率，所以他最终的头寸相当于持有一个回购利率与浮动互换参考利率的*基差互换*.

假设回购和互换有相同的结算日 $t_i$. 那么持有这个头寸的市场参与者在每个结算日会收到

$$(L_{t_{i-1}} + 12.5bp - R_{t_{i-1}})\delta N. \tag{7}$$

显然，这与本金为 $N$，利差为 12.5bp 的基差互换的结算很类似. 如果这样的基差互换在新加坡市场上交易活跃的话，我们就可以把这个头寸的 12.5bp 的净收益与市场上观测到的基差互换利差进行比较而给它定价. 如果二者相等，那么就可以直接在基差互换市场持有相同的头寸. 如果基差互换的利差不等于 12.5bp，就可以通过买入便宜的头寸并同时卖出高价头寸来进行套利.

### 6.5.2 期货套利

回购在债券和中长期国债期货市场上起着特殊的作用. 考虑一个 $t_0$+30 天后到期的期货头寸. 30 天后以预先确定的期货价格 $P_{t_0}$ 买入一个到期日为 $T$ 的无风险零息债券. 因此结算时需要支付 $P_{t_0}$ 美元并获得这个一年期债券. 一般来说 $t_0$+30 时这个债券的市场价值 $B(t_0+30,T)$ 会与合约价格 $P_{t_0}$ 有所不同.

我们可以运用回购市场来对冲这个头寸. 由此引出*隐含回购利率*这个重要的概念.

怎样用回购来对冲一个空头债券期货头寸呢？我们的想法跟以前讨论现金和套利交易类似. 获得资金并在 $t_0$ 时买入一个 $T+30$ 天后到期的债券. 在 $t_0$+30 天时，债券的到期日就是 $T$ 天之后了，因此现金和套利交易的头寸和期货头寸是一样的. 市场参与者在 $t_0$ 时借入美元现金，买 $B(t_0, T+30)$ 的债券，然后持有这个债券直到 $t_0$+30 天后.

不同的是我们把借钱和和买债券两个步骤通过回购合二为一，即买入债券然后立即把它回购出去获得资金. 这样做的结果是产生了一个价格相同的期货头寸.

这就意味着相关参量应该满足以下方程：

$$P_{t_0} = B(t_0, T+30)\left(1 + R_{t_0}\frac{30}{360}\right). \tag{8}$$

换句话说，一旦将购买 $T+30$ 天到期的债券的套利成本包括进去，那么总的支付应该等于债券的期货价格 $P_{t_0}$.

给定了 $P_{t_0}$, $B(t_0, T+30)$, 市场参与者就能从上面的方程中把未知的 $R_{t_0}$ 解出来：

$$R_{t_0} = \left[\frac{P_{t_0}}{B(t_0, T+30)} - 1\right] \frac{360}{30}, \tag{9}$$

我们称这个 $R_{t_0}$ 为*隐含回购利率*.

隐含回购利率是一个理论上的纯套利概念，表示了固定收益交易商的套利成本.

### 6.5.3 对冲一个互换

回购也可以用来对冲互换头寸. 假设一个交易商与一个客户进行一笔 1 亿的 2 年期互换交易. 交易商将支付固定的国库券利率加 30bp, 这样买方互换利率就是 5.95%. 当然他会收到 Libor 浮动利率. 这个交易商会通过买入一个 2 年期的国库券来对冲这个互换头寸.

买入国库券后，交易商希望与另一个客户进行另一个 2 年期的互换交易. 在这个互换中他要*收到*固定利率. 假定卖方利率高于买方互换利率，交易商就会获得买卖价差. 假设卖方的互换利差是 33bp.

在上面的交易中，回购的应用体现在哪里呢？交易商用一个 2 年期国库券对冲互换，但是买债券的资金从哪里来？答案是回购市场. 交易商买了债券，然后立即把它以隔夜回购出去，回购利率是 5.61%, 交易商期望几天之内找到匹配的订单. 在此之前，他有如下的敞口：(1) 互换利差的变化；(2) 回购利率的变化.

### 6.5.4 税收策略

考虑这种情况：本国的债券持有者要支付留置税，而外国投资者则不需要这样，从而外国投资者将获得总票息.

为了应对这样的税收政策，本国的债券持有者可以恰好在票息支付日前把债券回购给外国交易商 (也就是免税的对手). 那么他就可以获得人造红利，即总票息.[①]

在有些经济体中这样的做法是合法的. 而在其他一些体系下，债券持有者要按假设债券没有回购出去时将获得的理论票息缴税. 我们把这种将债券回购出去以避免缴税的做法称为*洗票息*(coupon washing).

**例**

*二级交易和投资对泰国债券的需求增大，原因之一是出现了更多的本国共同基金，这些共同基金一直在发起固定收益基金. 然而由于留置税的缘故，外国投资者*

① 什么时候支付人造分红很重要，如果在到期日支付，则票息可以转到下一年 (tax year).

参与泰国债券市场是受限制的.

“还没有人能够找到一种有效的方法来洗票息以避免支付留置税.” 香港的一位投资银行家说. 典型的洗票息包括一个离岸投资者恰好在票息支付日前把债券卖给一个本国对手, 常驻债券发行国的离岸投资实体如果与这个债券发行国有税收条约的话也可以洗票息.

作为回报, 洗票息的实体向离岸投资者支付债券在卖出之前赚到的累计利息——减去一个很小的浮动额. 根据某些资料, 泰国债券的洗票息表面上看来很普遍, 但实际上变得更加困难了. (IFR, 第 1129 期)

有关回购重要应用的另一个例子来自印尼.

**例**

印尼金融部门的一项新指示暂时停止本国机构代表离岸投资者进行洗票息活动, 并规定税款从投资者因持有债券而赚到的应计利息中扣除……

这项新指示出台两个星期以前, 税款只是从票息支付日持有债券的机构扣除, 印尼债券的离岸持有者通过洗票息而避免缴纳留置税.

一般来说, 洗票息包括一个离岸机构恰好在票息支付日之前和之后向印尼的免税机构卖出和买回债券, 这样就没有债券持有者——本国的或离岸的——对所持有债券支付留置税了. 因为新指示规定扣出债券的应计利息, 所以许多本国机构不再为国际公司洗票息了. (IFR, 第 1168 期)

回购和税收之间的联系要比例中体现的更加紧密. 下面的例子讲述回购的另一个应用.

**例**

在日本买卖债券要征收交易税, 即转移税. 所以为了节省费用, 回购交易商借出和借入日本政府债券 (JGB) 并每天都对它们进行盯市.

交易商交易的不是债券而是名称登记表 (NRF). NRF 寄给中央银行请求变更债券所有权的“备忘录”, 并被转交给当地保管人 (local custodian). 债券仍然由原来的所有者持有, 他是 NRF 的发行者.

JGB 交易也有一个不许失败规则, 即交割失败要付出很高的成本, 因此可看成是禁忌的. (IFR, 第 942 期)

金融中的许多标准交易都和这些例子一样起源于税收策略.

## 6.6 用回购进行合成

下面用前面介绍的合约方程来分析回购策略并给出几个例子. 第一个例子讲的是回购在 cash-and-carry 套利中的应用, 然后利用得到的合约方程构造更多的合成工具.

### 6.6.1 一个合约方程

令 $F_t$ 表示一个在未来时间 $T$ 交割的国库券在 $t(t<T)$ 时的远期价格. 假设 $T$ 时交割的债券期限为 $U$ 年, 那么在 $t$ 时, 我们可以: (1) 买入一个 $(T-t)+U$ 年的国库券; (2) 把它回购出去以获得购买它需要的现金; (3) 持有这个回购头寸直到 $T$. 在 $T$ 时, 向交易商支付现金加回购利率并收回债券. 这个债券将在 $U$ 年后到期. 这些操作的结果跟一个债券远期的结果是一样的.

用一个合约方程来表示这些操作步骤, 这个方程提供了一个合成远期.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 远期购买一个 $T$ 时交割的 $U$ 年期债券 | = | 在 $t$ 时购买 $T+U-t$ 年期的债券 | + | 回购期限 $T-t$ 的债券 | (10) |

由此可知, 远期头寸可以通过合约方程右边的交易完全对冲. 这个合约方程在回购交易的几个有趣的应用中会用到. 我们讨论两个例子.

### 6.6.2 一个复合回购

把回购项整理到上面的合约方程左边, 得到

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 期限 $T-t$ 的债券回购 | = | 远期购买一个 $T$ 时交割的 $U$ 年期债券 | − | 在 $t$ 时购买 $T+U-t$ 年期的债券 | (11) |

因此可以很容易地通过标的资产的即期卖出和远期买入来构造一个合成回购.①

### 6.6.3 一个复合即期购买策略

假设由于某种原因我们不想直接购买标的资产. 这时就可以把上面的合约方程中即期买入项移到左边构造一个合成即期购买策略.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 在 $t$ 时直接购买 $T+U-t$ 年期的债券 | = − | 期限为 $T-t$ 的回购 | + | 在 $T$ 时远期购买一个 $U$ 年期债券 | (12) |

方程右边两个操作加起来等价于证券的即期购买.

### 6.6.4 互换和回购

剥离 (strip)、互换和回购市场策略之间有一些有趣的联系. 例如, 如果投资者买入剥离并持有到期, 这样全息债券就会较少. 因此这些债券很可能成为"特别"

① 合约前面的"−"号表示交易是反向的. 因此这里的即期买入前加"−"就变成了即期卖出.

债券. 那么交易商为了得到这种“特别”债券就只能接受较低的回购利率, 结果会导致平均回购利率水平降低.[①]

有些交易商认为, 由于较低的融资成本使得支付固定利率相对于收到固定利率来说更有吸引力, 因此平均互换利差可能会增加.

## 6.7　结　论

回购市场可能看上去有些晦涩难懂, 然而它对于一个金融系统的平稳运行非常关键. 如果没有回购, 许多金融策略将难以实施. 本章说明了可以用前面章节讨论的方法来分析回购.

## 参考文献

现在关于回购的参考资料比较少, 但是现有的都是很不错的. 像 Steiner(1997). 风险、欧洲货币和类似的出版物上都定期刊载有关回购专题的内容, 其中有很多关于最近回购市场策略方面的有趣例子. 本章的许多例子就出自这些刊物.

## 习　题

1. 一个交易商需要借入 3 千万欧元, 他用如下的证券做抵押.
- 抵押 4.3%证券, 2004 年 6 月 12 日
- 价格: 100.50
- 起始日: 9 月 10 日
- 期限: 7 天
- 回购利率: 2.7%
- 剪出: 0%

(a) 交易商需要多少抵押?
(b) 回购开始两天后, 抵押证券的价值上升到 101. 需要转移多少债券?
(c) 交易商将支付多少回购利息?

2. 一个交易商回购 1 千万美元的国库券,, 剪出是 5%, 交易的相关参数如下:
- 国库券收益率: 2%
- 国库券到期日: 90 天
- 回购利率: 2.5%
- 回购期限: 一周

(a) 交易商收到多少现金?

① 但据其他交易商说, 剥离和美国回购利率之间没什么联系, 这是因为大多数被剥离的债券都是过期债券, 而过期债券一般不会成为“特别”债券.

(b) 回购结束时交易商要支付多少利息？

3. 欧洲一公司的财务主管想借一笔美元，借期为 3 个月. 但他不想立刻贷款获得这笔美元资金，而是决定利用回购市场来达到目的. 公司持有 4 千万欧元的债券，这个财务主管进行了“交叉货币”(cross-currency) 回购. 交易的相关参数如下所示：

- 债券的净价：97.00
- 期限：9 月 1 日到 12 月 1 日
- 债券上一次付息日：8 月 12 日
- 债券票息：4%
- 欧元对美元的汇率：1.115 0
- 3 个月美元回购利率：3%
- 剪出：3%

(a) 债券的全价 (dirty price) 是多少？

(b) 回购交易用的是净价还是全价？

(c) 交易商在 9 月 1 日收到多少美元？

(d) 交易商在 12 月 1 日要支付多少回购利息？

# 案 例 分 析

## CTD 和回购套利

下面有两则阅读材料，仔细阅读并回答下面的问题. 阅读之前回顾一下三个基本概念：(1) 特别回购和一般抵押；(2) 最便宜交割 (CTD) 债券的概念；(3) 不许失败交割. 很好地理解这些概念才能明白下面的材料及材料中涉及的策略.

**A 部分. 基于第一篇阅读材料**

1. 什么是日历利差？用现金流图表说明 DB 的头寸.
2. 在回购市场上把它与 DB 头寸结合在一起.
3. DB 头寸的目的是什么？
4. '05 证券发行的数量有什么重要性？交易商是如何搞到这些债券来进行交割的？
5. 为什么交割失败的罚金是有关系的？
6. 一项资产互换 (例如 Libor 利率与文章中提到的有关债券的互换) 对卖空者有帮助吗？给出解释.
7. 持有一个谨慎选择的相关到期日的 FRA 能弥补卖空者的损失吗？仔细解释一下.
8. 解释 CTD 债券是如何确定的. 必要的话查一下有关期货交易所的 WEB 页以得到相关信息.

**B 部分. 基于第二篇阅读材料**

1. Eurex 对证券期货交易规则做了哪些改变？
2. 假设这些变革三月就生效，它们能够防止 DB 的套利头寸吗？
3. DB 仍然可以持有这样的头寸吗？如果可以，要怎么做呢？

**第一篇**

自从有报道称 DB 银行建立了一个可观的利率期货头寸后，人们确信它已将超过 1 亿欧元 (89.4 百万美元) 的收益收入囊中. DB 银行能够从用于结算多头期货头寸的最便宜交割债券的不流动性中受益，这立刻招致其同行对手的尖锐批评.

在交易中，银行加入一个日历利差合约，合约中它要买入德国中期政府债券的 Eurex- 注册的 BOBL 三月 '01 期货并卖出六月 '01 合约以补偿这个多头头寸，熟悉这项交易的交易商这么说. 一个交易商估计银行已经买入 145 000 的三月 '01 合约并卖出了相同数量的六月 '01 期货. 同时，银行还通过回购市场建立了数量可观的 CTD 债券多头头寸以结算三月期货，这样一个 10 年证券在 2005 年 10 月到期.

由于 '05 证券发行的数量是微小的 102 亿欧元，卖空三月期货的交易商需要聚拢 82%的公开发行并出售的债券以交割他们的期货合约. "能够交割这么大数量的债券几乎是不能想象的." 伦敦的一位衍生产品决策者说. "通常交易商能够搞到债券不会超过 CTD 债券发行的 25%." 他补充道.

同时银行还建立了期货头寸，通过回购市场借入大量的 CTD 债券. 好几个交易商断言银行不会按既定协议把债券偿还给回购交易商，使得回购交易商不得不卖空三月期货以交割更贵的债券或买回更贵的期货.

银行之所以能够这样做是因为回购市场上交割失败的罚金远比期货交割失败或实物交割失败的罚金轻得多. Eurex 规则下，期货交割失败的交易商必须每天支付债券面值的 40 个基点，一个星期后交易所就有权代表期货多头买入任何合格的债券，然后把账单给期货空头. 而回购市场上交割失败的等价罚金只有每天 1.33bp(IFR, 2001 年 3 月).

**第二篇：Eurex 改革 Bobl 期货**

Eurex 要对它 2 年、5 年和 10 年德国政府债券期货的九月合约施加头寸限制. "如果愿意，我们也可以在十二月合约中这么做." 交易所的一位发言人说.

此举旨在促进开放头寸向下一个交易周期的尽快转移，并且也是对其 Bobl 或 5 年的德国政府债券期货合约成功挤压的反应.

"新的交易规则限制市场参与者持有的多头头寸，包括所有权头寸以及顾客交易头寸，" Eurex 的发言人说. 头寸限制将会和 CTD 债券发行的数量联系起来，并在滚动期开始前 6 个交易所交易日公布 (IFR, 2001 年 6 月 9 日).

# 第 7 章　动态复制方法与合成

## 7.1 引　　言

前几章讨论了现金流的*静态*复制. 所讨论的合成结构也是静态的, 这意味着直至目标工具到期或终止, 复制的资产组合不需要任何*调整*. 随着时间的推移, 合成工具的公允价值与目标工具的价值也趋于相同.

但是, 在金融工程中静态复制有时不能实现, 而且复制资产组合可能需要持续的调整 (再平衡) 来保持与目标工具等价. 这种情况由许多不同的原因造成. 首先, 静态复制方法依赖于其他一些资产的存在, 对这些资产允许运用*合约方程*. 为了复制目标证券, 合约方程右端工具的数量必须有一个最低值. 如果各组成工具的市场不存在, 就不能直接利用合约方程, 从而合成工具也无法构造.

第二, 工具也许存在, 但其不具备*流动性*. 如果理论合成工具中的各组成工具不能够积极成交, 那么尽管它们与原始资产的风险因子有相同的敏感性因子, 合成工具也不能满意地复制原始资产. 例如, 如果组成资产是非流动的, 原始资产的价格就不能够通过将合成工具中各组成工具的价格相加来获得. 它们的价格也就不容易从市场获得. 复制只能利用具有流动性且与组成工具“相近”但*不等同*的资产来完成, 这样的复制资产组合就可能需要定期进行调整.

第三, 被复制的资产可能是高度*非线性*的. 用线性工具来复制非线性资产会涉及各种各样的近似. 至少, 复制资产组合需要定期的再平衡. 包含期权的资产就属于这类情况. 第 8 章和第 9 章将说明期权是凸性工具并且它们的复制需要动态对冲和不断的再平衡.

最后, 在资产定价中起到重要作用的参数可能发生变化, 并且这种情况也可能需要对复制资产组合进行再平衡.

在本章中我们可以看到, 除了需要定期再平衡外, 通过*动态*方法复制合成资产与用静态方法复制遵循的原理是相同的. 在此意义上, 可以把动态复制方法仅仅看作是此前讨论的静态复制方法的一般化. 事实上, 本来我们可以首先讨论动态复制方法, 然后说明在某些特殊条件下, 也可以利用静态方法复制. 然而, 大多数基础的市场技术是建立在基本工具的静态复制方法之上的. 由于静态复制方法并不复杂烦琐, 而且便于理解, 所以我们首先研究静态复制方法. 本章将其扩展到动态复制情形.

## 7.2 一个例子

动态复制传统上是在一个理论框架中进行讨论的. 这种复制只有在连续时间情形下是精确的. 在此情形下, 可以对复制资产组合进行连续且微量的再平衡. 但是当考虑交易费用、资产价格发生跳跃以及其他复杂因素时, 这种复制的精确性很快就消失了. 在离散时间情形下, 动态复制可看作是一种近似. 然而即使不能精确地复制出给定的资产, 动态复制方法对于金融工程师来说仍然是一个重要的工具.

尽管存在许多实际问题, 离散时间的*动态对冲*仍然是许多重要工具实际定价和对冲的基础. 下面的资料说明了动态复制方法是如何从标准期权的定价和对冲这些金融工程的最初应用扩展到更多领域的.

**例**

*一位旧金山的工具资产经理准备卖出一个投资策略: 利用合成债券期权向投资者提供担保的最低回报……*

*尽管不再是一个新的概念——期权复制的理论早在 20 世纪 80 年代已经提出……债券期权复制资产组合……复制买入期权, 该期权中允许投资者在期权价格上行时参加而禁止在下行时参加. 复制资产组合模拟期权每天的价格走势直至到期日. 模型提供每天的对冲比率或者 delta, 即显示了期权价格关于标的资产的改变量.*

*"投资者肯定采取交易商而不是资产经理人的方法, 因为后者是自己创造而不是直接从华尔街购买期权." 一位交易商说. (IFR, 1998 年 2 月 28 日)*

以上资料说明动态复制方法的一个应用. 它说明市场参与者选择用较便宜的方法复制非线性资产而不是直接从交易商那里购买相同的证券. 在本例中, 经理人利用动态复制和保持本金相结合获得了对投资者有吸引力的产品. 因此, 利用动态复制方法来构造的合成期权可能在市场中要贵得多.

## 7.3 静态复制方法的回顾

如下所示, 我们简单回顾一下静态复制的基本步骤.

(1) 首先, 我们写出将被复制的标的资产的现金流, 图 7-1 重复了复制存款的例子. 图中的现金流表示期限为 $T$ 的*欧元存款*. 这个工具包含了在不同时间 $t$ 和 $T$ 的两个现金流. 现金流用美元表示.

(2) 接下来, 我们将这些现金流分解, 由此构造某些 (流动) 资产, 使得新的现金流垂直相加可以与目标资产吻合, 如图 7-1 中上面部分所示. 用货币 $X$ 远期购

买美元的远期货币合约, 货币 $X$ 的国外存款和即期 FX 操作产生的现金流在垂直相加时复制了欧元存款的现金流.

(3) 最后我们需要确认目标资产的 (信用) 风险与合成资产的风险相同. 合成资产的组合就是所谓的**复制资产组合**.

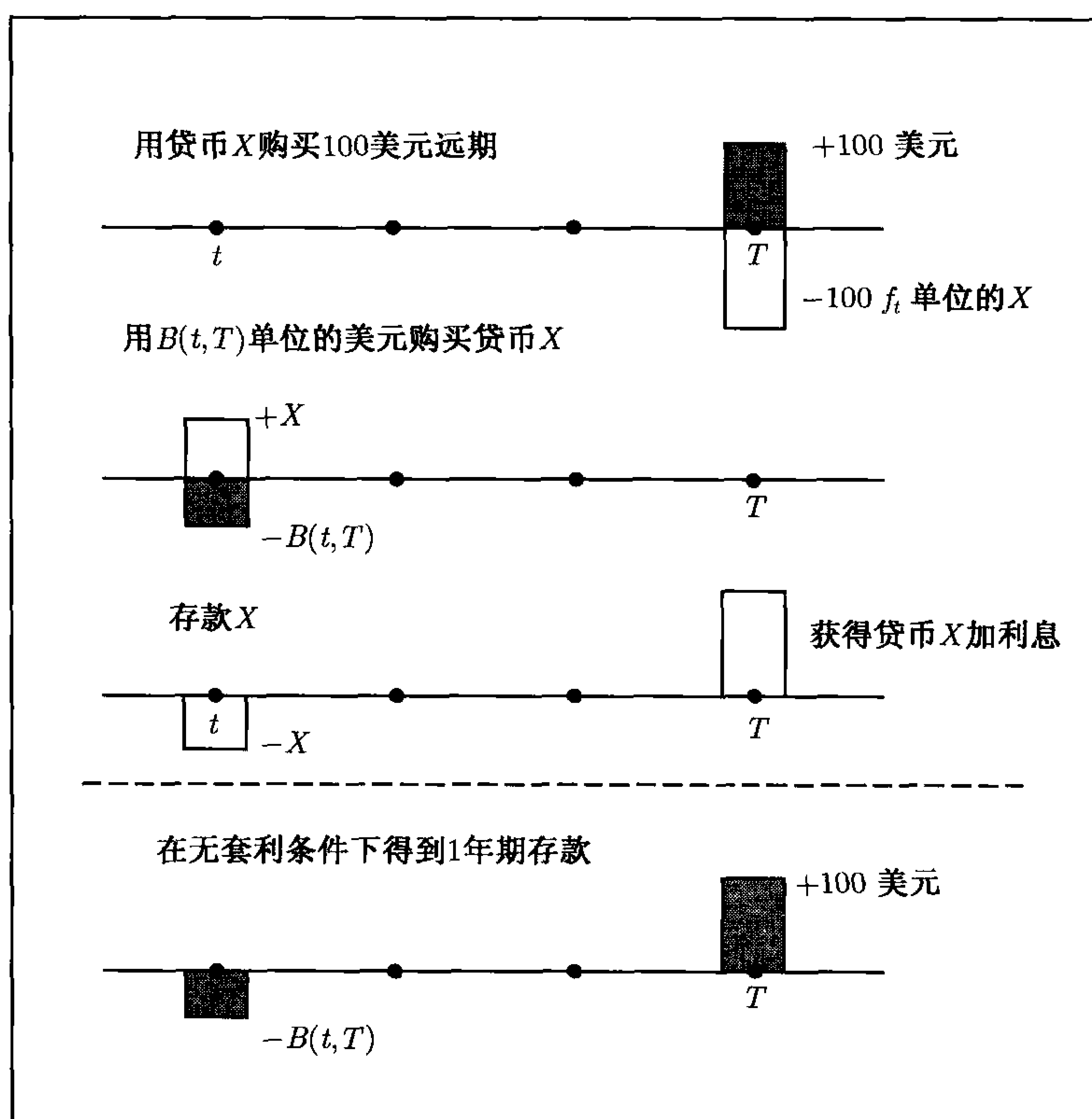



图 7-1

我们已经看到构造这种合成资产的几个例子. 这里有必要总结这些合成的两个重要特性.

首先, 通过建立其他三种工具的头寸, 我们在 $t$ 时构造了合成工具. 但是需要强调的是, 一旦头寸建立, 那么在目标工具到期前我们**无需**再次修改或者重新调整买卖的工具的**数量**, 尽管市场风险将在区间 $(t, T)$ 内会有变化. 涉及复制组合中资产权重的决策是在 $t$ 时决定的, 它们将保持至 $T$ 时不变. 因此, 合成工具不再需要**现金的流入或流出**, 并且与原始工具产生的现金流相吻合.

第二, 我们的目的是构造与目标工具相同的到期现金流. 因为在区间 $[t, T]$ 中, 复制不需要其他现金的流入或流出, 所以目标工具在 $t$ 时的价值将与合成工具的价

值相同.

### 7.3.1 框架

下面说明市场的不存在或非流动性以及某些工具的凸性如何改变构造静态合成资产的方法. 我们首先说明在这些情况下, 利用静态方法复制的困难. 然后叙述构造动态合成资产方法的思路.

动态方法自然要比本章之前所采用的简单方法需要更多技术. 显然, 只要涉及资产组合的再平衡和动态复制, 就需要另外一个基础的解析框架. 特别地, 我们需要注意调整的时机, 尤其是要注意在没有现金流入或流出的情况下进行调整的方式.

我们使用一个基本例子来说明构造动态合成资产的简单环境. 这里使用的是贴现债券, 并假定无风险借贷是现有的唯一资产. 此外假设不存在有关外汇、利率远期或非常短期限的欧元存款账户的市场. 在这个简单的环境里, 我们将试图构造贴现债券的合成. 本章后半部分将讨论如何把同样的方法应用到权益工具和期权上.

考虑长度为 $\delta$ 的一个区间序列:

$$t_0 < \cdots < t_i < \cdots < T, \tag{1}$$

其中

$$t_{i+1} - t_i = \delta. \tag{2}$$

假设市场参与者只面临两个流动市场. 第一个市场是单期借贷, 由符号 $B_t$ 表示[①]. $B_t$ 是 $t_0$ 时投资 1 美元在 $t$ 时的价值. 以年浮动利率 $L_{t_i}$ 增长且到期日为 $\delta$, $B_t$ 在 $t_n$ 时的值可表示为

$$B_{t_n} = (1 + L_{t_0}\delta)(1 + L_{t_1}\delta)\cdots(1 + L_{t_{n-1}}\delta). \tag{3}$$

第二个流动市场是无违约风险纯贴现债券, $t$ 时价格表示为 $B(t,T)$. 这种债券在 $t$ 时以 $B(t,T)$ 的价格卖出, 在 $T$ 时支付 100 美元. 参与者只能利用这两种流动工具, $\{B_t, B(t,T)\}$, 来构造合成. 为此, 我们假设不存在其他流动工具.

显然, 除了一些新兴市场可能拥有流动的隔夜借贷和另一种流动的在期贴现债券外, 这种假设是不现实的. 成熟市场不仅拥有各种期限的借贷和债券, 而且存在多种利率和外汇衍生市场. 这些市场使得在前几章中介绍的复杂合成的构造变得容易. 但是为了讨论动态合成资产构造方法, 选择这种简单的框架将是非常有用的. 在说明这种方法之后, 我们将在图形上直接添加新的市场和工具.

① 一些教科书称这种工具为储蓄账户.

### 7.3.2 带有缺失资产的合成

考虑一个市场参与者在上述市场中进行操作. 假设这位参与者想要在 $t_0$ 时购买一个两期无违约风险的纯贴现债券, 记为 $B(t_0, T_2)$, 这里到期日 $T_2 = t_2$. 然而现在只有三期债券是唯一的流动债券, 记之为 $B(t_0, T_3)$, 这里到期日 $T_3 = t_3$. $B(t_0, T_2)$ 或者不存在或者没有流动性, 并且当前的公允价格未知. 所以, 这位市场参与者决定通过合成来构造 $B(t_0, T_2)$.

首先我们判断出静态复制在这种情况下是不可行的. 为此, 考虑图 7-2 和图 7-3. 图 7-2 表示了一期借贷 $B_t$ 和二期债券的现金流图.

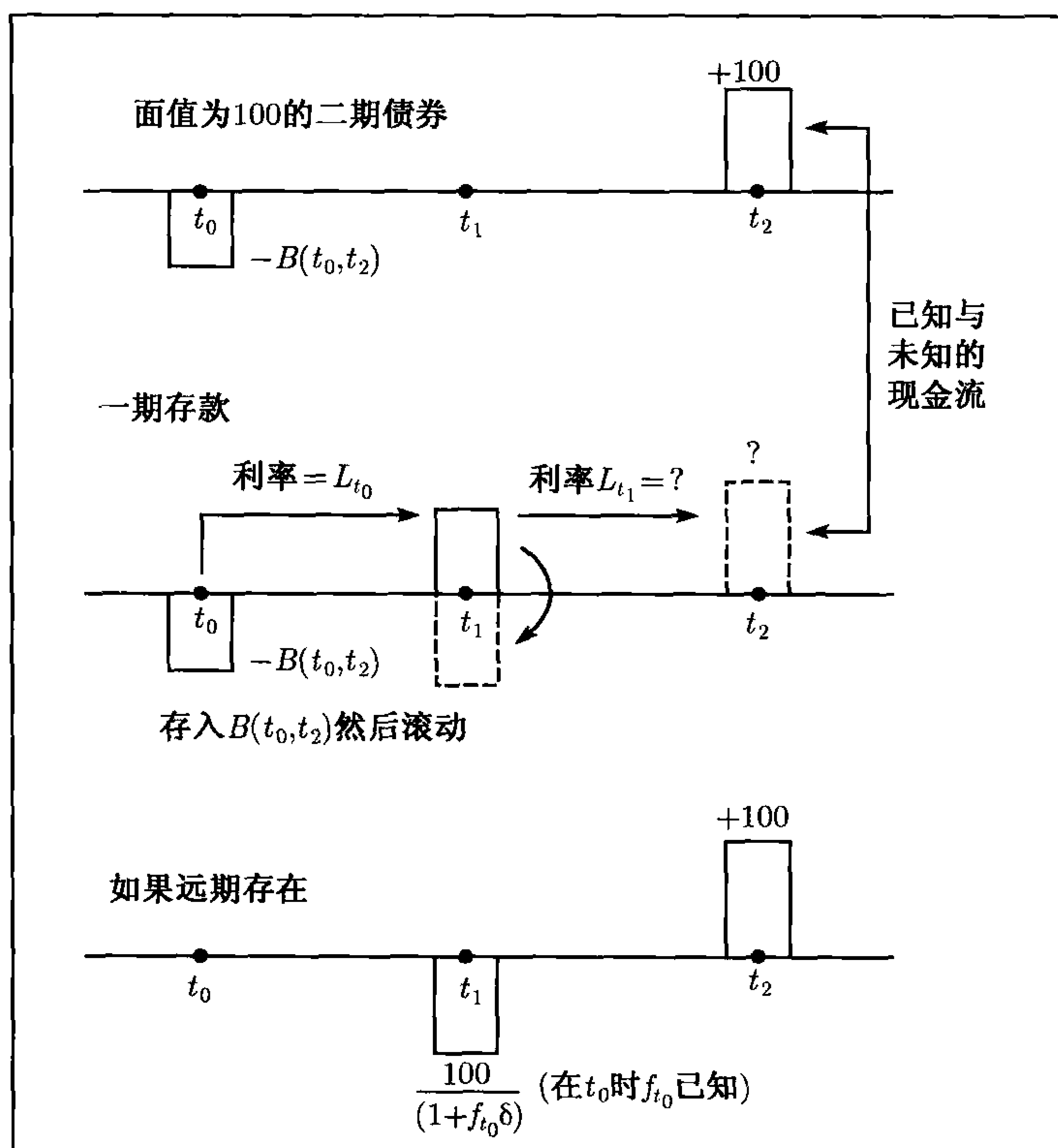



图 7-2

图 7-2 的上面部分表示在 $t_0$ 时支付 $B(t_0, T_2)$ 以购买债券, 该债券在到期日 $T_2$ 时获得 100 美元. 遗憾的是, 只利用一期借贷 $B_t$ 不能重新构造这些简单的现金流, 如图 7-2 第二部分所示. 二期债券包含 $t_0$ 和 $T_2$ 时的两种已知现金流. 如果没有任何现金的流入或流出, 在 $t_0$ 时利用 $B_t$ 复制 $T_2$ 时 100 美元的现金流是不可能的.

我们将在下一节讨论这个问题.

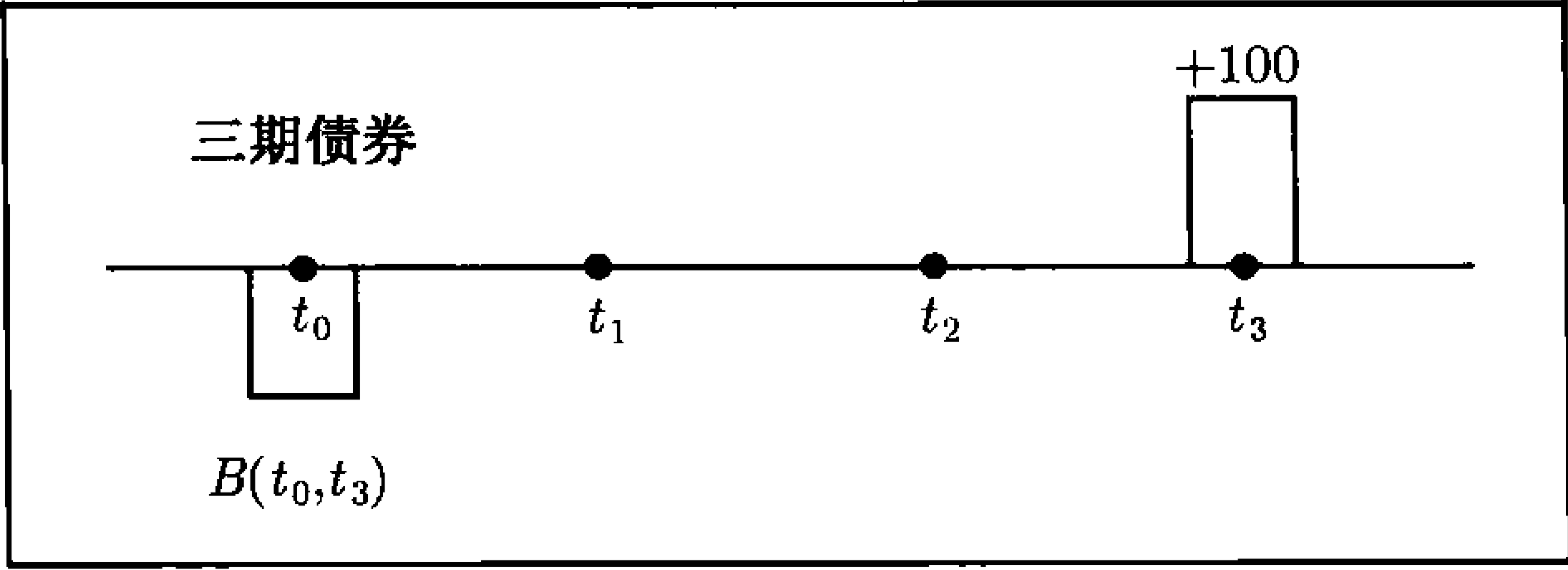



图 7-3

1. 仅利用 $B_t$ 的合成

假设我们利用滚动策略: (1) 在已知利率 $L_{t_0}$ 下, 在 $t_0$ 时借出一期现金; (2) 收集 $t_1$ 时所得现金; (3) 在 $t_1$ 时将现金借出, 利率为 $L_{t_1}$, 以便在 $t_2$ 时获得 100 美元的净现金流. 这种方法存在两个问题. 第一, 在 $t_0$ 时 $L_{t_1}$ 未知, 因此在 $t_0$ 时我们不能确定$L_{t_1}$ 的值以及借出多少现金可以复制 $t_2$ 时的现金流. 金额

$$\frac{100}{(1+L_{t_0}\delta)(1+L_{t_1}\delta)} \tag{4}$$

是为在 $t_2$ 时获得 100 美元所应投资的资金, 尽管我们已知 $L_{t_0}$, 但这个金额仍是未知的.

当然, 我们可以推测出投资的数量并且在 $t_1$ 时相应地增加资产组合中的现金: 我们可以在 $t_0$ 时投资 $B_{t_0}$, 一旦 $t_1$ 时得知 $L_{t_1}$, 就能添加或者减去数量为 $\Delta$B 的现金以确保

$$[B_{t_0}(1+L_{t_0}\delta)+\Delta B](1+L_{t_1}\delta)=100. \tag{5}$$

但第二个问题是在 $t_1$ 时添加或者减去的现金 $\Delta B$ 是未知的. 这使得我们的策略用于对冲无效, 因为资产组合不是自融资的且附加资金的需求不能彼此抵消.

这种方法的定价是不完美的. 潜在的现金流入或流出意味着在 $t_0$ 时合成的真实费用是未知的[①]. 因此, 我们不能仅利用一期借贷完成对 $B(t_0,T_2)$ 的静态合成. 在 $t_0$ 时, 合成的构造未完成, 我们需要在 $t_1$ 时再做一次决策以保证现金流与目标工具吻合.

2. 含 $B_t$ 和 $B(t,T_3)$ 的合成

引入具有流动性且较长期的债券 $B(t,T_3)$ 同样不能对静态合成有所帮助. 图 7-4 说明了无论我们在 $t_0$ 时如何操作, 三期债券在到期日 $T_3$ 时依然存在多余的、

① 如果存在现金的注入, 我们就无法利用合成定价. 因为合成的费用不仅是 $t_0$ 时的支付, 最终费用有可能比这个支付大或小. 这意味着策略的费用在 $t_0$ 时是不确定的.

非随机的现金流. 这个多余的现金流使得我们不能在 $t_0$ 时精确复制 $B(t_0,T_2)$ 产生的现金流.

至此我们没有涉及利率远期合约的使用. 显然, 如果远期贷款或者远期利率协议以及"长期"债券 $B(t_0,T_3)$ 存在, 我们就可以构造 $B(t_0,T_2)$ 的合成. 在这种假设下, 引入 2×3 FRA 将非常方便, 如图 7-4 所示. 这个合成包含买入 $(1+f_{t_0}\delta)$ 单位 $B(t_0,T_3)$ 的同时以远期利率 $f_{t_0}$ 进行一期贷款. 这样, 我们成功地在静态情况下构造了二期债券的合成. 但这种方法是建立在远期市场存在和具有流动性的假设上. 如果这些市场不存在, 我们只好选择动态复制了.

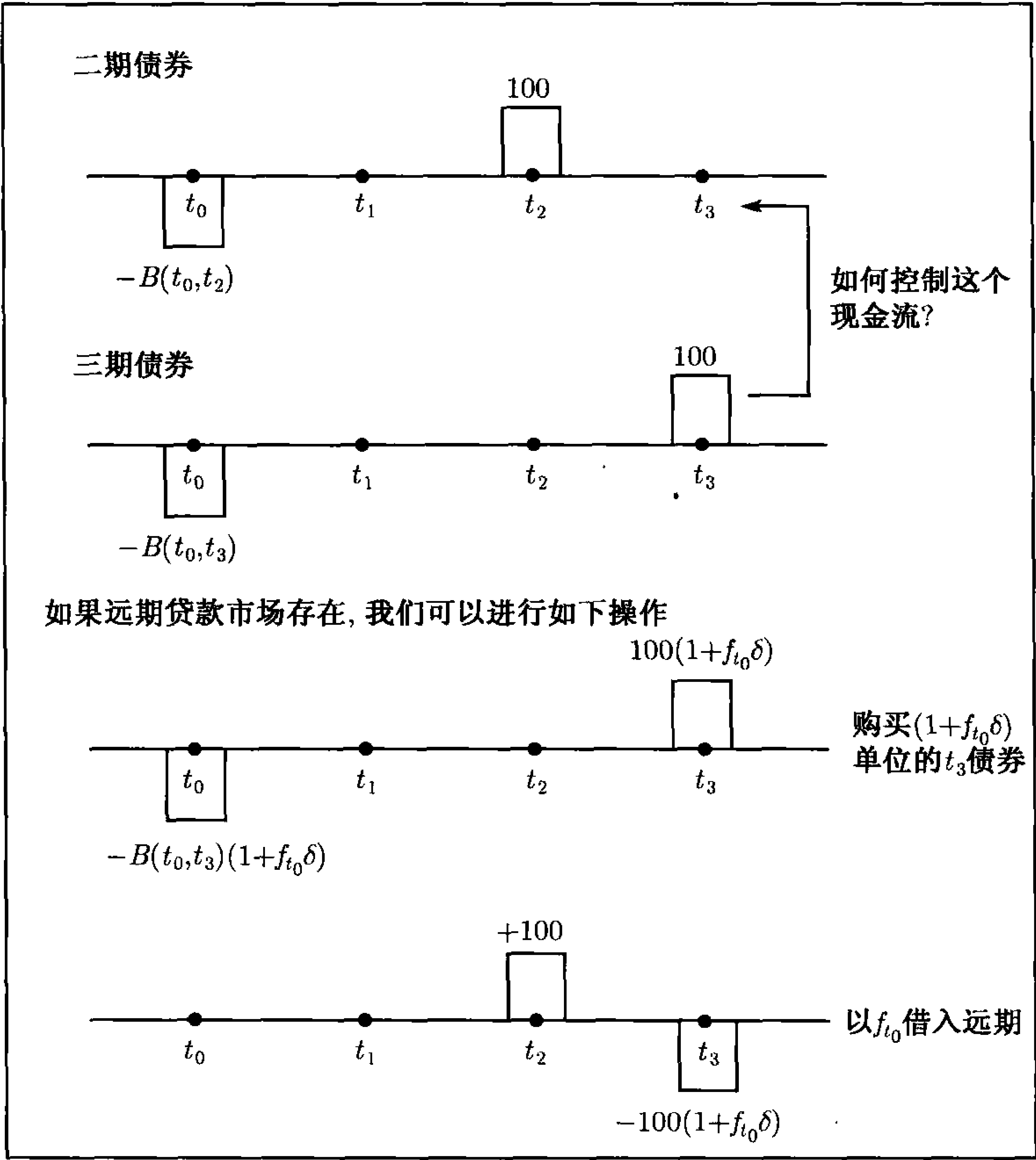



图 7-4

## 7.4 特定合成

那么, 我们如何复制二期债券呢? 基于金融工程师对"合成"精确程度的期望,

这个问题有几种答案. 一个精确的复制需要使用动态复制方法, 这个问题将在本章的后半部讨论. 另一种解决方法是使用不太精确的特定 (ad-hoc) 方法. 例如, 可以在固定收入部分中使用简单而普遍的方法来构造合成工具, 它就是*免疫*策略.

在本节中, 我们暂时偏离前一节使用的记号, 为简单起见, 设 $\delta$=1. 因此 $t_i$ 表示年. 我们假设存在 3 个工具. 这些工具具有相同的风险因子, 但由于各自价值方程的强非线性, 它们的*敏感性*不同. 与前一节相比, 我们采用稍抽象一点的框架. 令 3 种资产 $\{S_{1t}, S_{2t}, S_{3t}\}$ 的定价函数是

$$S_{1t} = f(x_t), \tag{6}$$

$$S_{2t} = g(x_t), \tag{7}$$

$$S_{3t} = h(x_t), \tag{8}$$

这里 $h(\cdot), f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 是非线性的. $x_t$ 是所有价格的共同风险因子. $S_{1t}$ 表示目标工具, $\{S_{2t}, S_{3t}\}$ 将用来形成合成工具.

我们首先讨论*静态*复制策略. 因为敏感性不同, 所以第 3 章至第 6 章中应用的静态方法在这里不能使用. 随着时间的推移, $x_t$ 将随机地变化, 而 $S_{it}(i = 1, 2, 3)$ 对 $x_t$ 的这种变化的反应也不相同. 利用 $S_{2t}$ 和 $S_{3t}$ 构造 $S_{1t}$ 的合成的 ad-hoc 方法如下.

在 $t$ 时我们构造与 $S_{1t}$ 等值的资产组合, 权重分别为 $\theta^2$ 和 $\theta^3$, 使得以下资产组合的敏感性

$$\theta^2 S_{2t} + \theta^3 S_{3t}, \tag{9}$$

关于风险因子 $x_t$ 与相应的 $S_{1t}$ 的敏感性尽可能地接近. 利用一阶敏感性, 我们得到包含两个未知量 $\{\theta^2,\theta^3\}$ 的方程:

$$S_1 = \theta^2 S_2 + \theta^3 S_3, \tag{10}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial_x} = \theta^2 \frac{\partial S_2}{\partial_x} + \theta^3 \frac{\partial S_3}{\partial_x}. \tag{11}$$

使用这种方程确定的策略可能存在某些严重的缺点. 它一般会不时地要求现金的流入或流出, 这违反了合成工具的要求. 但是在某种情况下, 这种策略可以为金融工程师提供一个实际的解决方法. 下一节我们将给出这种策略的例子.

**免疫**

假设在 $t_0$ 时, 一家银行考虑购买此前提到价格为 $B(t_0, T_2), T_2 = t_0+2$ 的二期贴现债券. 这家银行可以使用 6 个月浮动基金, 或者卖空一个三期贴现债券 $B(t_0, T_3)$, $T_3 = t_0+3$, 或者结合此二者来完成此项交易. 银行该如何操作呢?

这种情况与本章前面讨论的如何构造 $B(t_0, T_2)$ 的合成相似. 最好的方法是利用 6 个月基金和三期债券精确构造一个既具有流动性又最便宜的合成. 如果需要

对冲, 则卖出该合成. 这样也获得了购买 $B(t_0,T_2)$ 所需资金. 结果将是一个完全对冲了的头寸, 即银行实现了买卖价差. 本章将介绍如何利用动态策略构造合成的"精确"的方法.

一种近似方法是与之前要求的敏感性相匹配. 特别地, 我们试图与目标工具的一阶敏感性保持匹配. 下面是一个关于固定收入资产组合的免疫例子. 为了保证仅存在一个简单风险因子, 我们假设收益曲线只有平行移动. 这种假设不太现实, 但是它经常被一些市场参与者用来作为一阶近似. 在下面的例子中, 利用这个假设可以简化陈述.

**例**

假设零附息债券收益曲线是一条直线 $y=8\%$, 并且只平行移动. 那么, 2 年、3 年和 6 个月的债券价值为

$$B(t_0,T_2)=\frac{100}{(1+y)^2}=85.73, \tag{12}$$

$$B(t_0,T_3)=\frac{100}{(1+y)^3}=79.38, \tag{13}$$

$$B(t_0,T_{0.5})=\frac{100}{(1+y)^{0.5}}=96.23. \tag{14}$$

利用"长期"债券 $B(t_0,T_3)$ 和"短期"债券 $B(t_0,T_{0.5})$, 我们构造一个初始费用为 85.73 的资产组合. 这与目标工具 $B(t_0,T_2)$ 在 $t_0$ 时的价值相等.

我们希望资产组合的敏感性与原始工具的敏感性相同. 因此, 需要解如下方程:

$$\theta^1 B(t_0,T_3)+\theta^2 B(t_0,T_{0.5})=85.73, \tag{15}$$

$$\theta^1\frac{\partial B(t_0,T_3)}{\partial_y}+\theta^2\frac{\partial B(t_0,T_{0.5})}{\partial_y}=\frac{\partial B(t_0,T_2)}{\partial_y}, \tag{16}$$

由此得

$$\frac{\partial B(t_0,T_{0.5})}{\partial_y}=\frac{-50}{(1+y)^{1.5}}=-44.55, \tag{17}$$

$$\frac{\partial B(t_0,T_2)}{\partial_y}=-158.77, \tag{18}$$

$$\frac{\partial B(t_0,T_3)}{\partial_y}=-220.51, \tag{19}$$

代入公式 (15) 和 (16) 中, 得

$$\theta^1 79.38+\theta^2 96.23=85.73, \tag{20}$$

$$\theta^1(220.51)+\theta^2(44.55)=158.77, \tag{21}$$

联立解得

$$\theta^1 = 0.65, \quad \theta^2 = 0.36. \tag{22}$$

因此, 我们需要卖出 0.65 单位的 6 个月债券和 0.36 单位的 3 年期债券来构造 2 年期债券的近似合成. 这样在 $t_0$ 时可以筹集所需资金和获得与 $y$ 的变化相同的一阶敏感性. 以上是固定收入资产组合的免疫的简单例子.

据此, 利用全部头寸对 $y$ 的一阶变化不敏感的假设, $B(t_0, T_2)$ 的资金可以由其他资产构成的资产组合"筹集". 这样的头寸就是"免疫的".

上述例子说明利用动态方法获得"合成"的一种近似方法. 在我们的假设中, 资产组合权重的选择需要保证收益率的变化 d$y$ 与资产组合的变化相一致. 但需要注意以下事实.

二阶以及高阶的敏感性不一致. 所以, 这个资产组合不是原始债券 $B(t_0, T_2)$ 的精确合成. 事实上, "合成"的第二部分与原始工具相应的 d$y$ 不同. 所以, 权重 $\theta^i$, $i$=1,2 随着时间的推移需要不断地计算, 而且需要观测新的 $y$ 值.

值得注意的是, 我们该利用哪种敏感性进行估计. 尽管随着时间的变化, 我们调整了权重 $\theta^i$, 但是这些调整本身就需要现金的注入或流出. 这意味着资产组合不是自融资的.

其次, 收益曲线极少平行移动, 而且这三种工具的收益率变化也不同, 这些都破坏了一阶敏感性相同的原则.

## 7.5 动态复制的原理

现在, 我们回到利用存款 $B_t$ 和"长期"债券 $B(t_0, T_3)$ 构造"短期"债券 $B(t_0, T_2)$ 的合成问题上. 构造一个 $B(t_0, T_2)$ 的合成, 最好的方法是建立包含 $B_t$ 和 $B(t_0, T_3)$ 的"聪明"头寸, 使得在 $t_1$ 时由 $B_t$ 调整产生的多余的现金流足够调整 $B(t_0, T_3)$ 的权重.

换句话说, 我们不用静态方法复制, 而是决定在 $t_1$ 时调整 $t_0$ 时确定的头寸来满足 $T_2$ 时二期债券的支付. 但是, 我们规定在调整时不需要任何净现金的注入或流出. 在 $t_1$ 时调整一个工具需要多少现金, 我们就可通过调整另一个工具获得这些现金. 如果在 $t_1$ 时调整成功, 那么调整后的资产组合在 $T_2$ 时的价值一定是 100, 复制也就完成了. 这种复制方法不是静态的, 它将需要进一步调整. 重要的是, 在 $t_0$ 时, 我们需要清楚投入多少资金以便在 $T_2$ 时得到 100 美元.

这样一种策略是可行的, 因为 $B_{t_1}$ 和 $B(t_0, T_3)$ 都依赖于同样在 $t_0$ 时未知的利率 $L_{t_1}$, 且二者都有已知的价值公式. 通过巧妙地建立这两个资产相互抵消的头寸, 我们可以消除 $t_0$ 时未知的 $L_{t_1}$ 的影响.

这个策略是在 $t_0$ 时利用不完美却相关的两个工具来构造合成. 但是, 因为资产的权重和随机变量的相关性在 $t_0$ 时未知, 所以合成需要持续的再平衡. 如果这些随机变量以某种方式相关, 那么就可以使用相互间的这些相关性来消除现金的注入或流出的需求. $t_0$ 时资产组合的成本就是原始资产的无套利价值.

按照迄今为止所进行的讨论, 动态复制的一般*原则*如下.

(1) 我们需要确定证券期限内无分红或其他支付. 复制资产组合的现金流必须与*最终*现金流相等.

(2) 复制过程中, 不存在任何净现金的注入或流出. 初始投入的资金应该同复制策略的*真实成本*相等.

(3) 合成工具与目标工具的信用风险应相同.

只要满足以上原则, 任何一个权重在 $[t, T]$ 间变化的资产组合都可以作为原始资产的合成. 本章的余下部分将把这些原则应用到特殊的情况中, 并且将介绍动态复制的机制.

### 7.5.1 期权的动态复制

为了复制期权, 我们利用与 7.4 节讨论过的二期债券同样的动态机理. 在第 8 章中我们将深入讨论期权. 为了完整性, 我们先回顾一下期权的简单定义. 欧式看涨期权赋予期权持有者在到期日 $T$ 时以交割价 $K$ 买入标的资产 $S_t$ 的权利. 因此, 在 $T$ 时, $t < T$, 看涨期权的支付如图 7-5 中折线所示. 如果 $T$ 时的期权价格低于 $K$, 那么支付为零. 如果 $S_T$ 大于 $K$, 那么支付为 $S_T - K$. 到期日前的期权价值包含另一项称为*时间价值*的附加项, 如图 7-5 中曲线所示.

假设标的资产是价格为 $S_t$ 的股票, 当股票价格上升时, 期权价格同样上升. 因此, 股票与期权高度*相关*.

这意味着在 $t_0$ 时我们可以利用 $B_{t_0}$ 和 $S_{t_0}$ 构造资产组合, 使得随着时间的变化, 通过调整一种资产所得可以补偿由于调整另一种资产而带来的损失. 不用现金的注入或流出就可以完成持续的再平衡, 并且资产组合的最终价值与期权到期时的价值相等. 如果通过近似计算, 这种方法可行, 那么构造资产组合的成本将与期权的无套利价值相等. 后面将详细讨论这个问题. 这里, 先看一个利率为常数情形的例子.

### 7.5.2 离散时间动态复制

实际中, 动态复制并不能连续地实现, 复制过程中总需要一定的时间来调整组合的权重. 这意味着动态策略要按离散时间进行分析. 我们首先讨论债券再考虑期权. 假设希望利用 $B_t$ 和 $B(t_0, T_3)$ 来复制二期无违约风险的贴现债券 $B(t_0, T_2)$, 其中 $T_2 = t_2$, $T_2 < T_3$. 这与我们之前讨论的情况相似. 那么在现实中如何进行操

作呢?

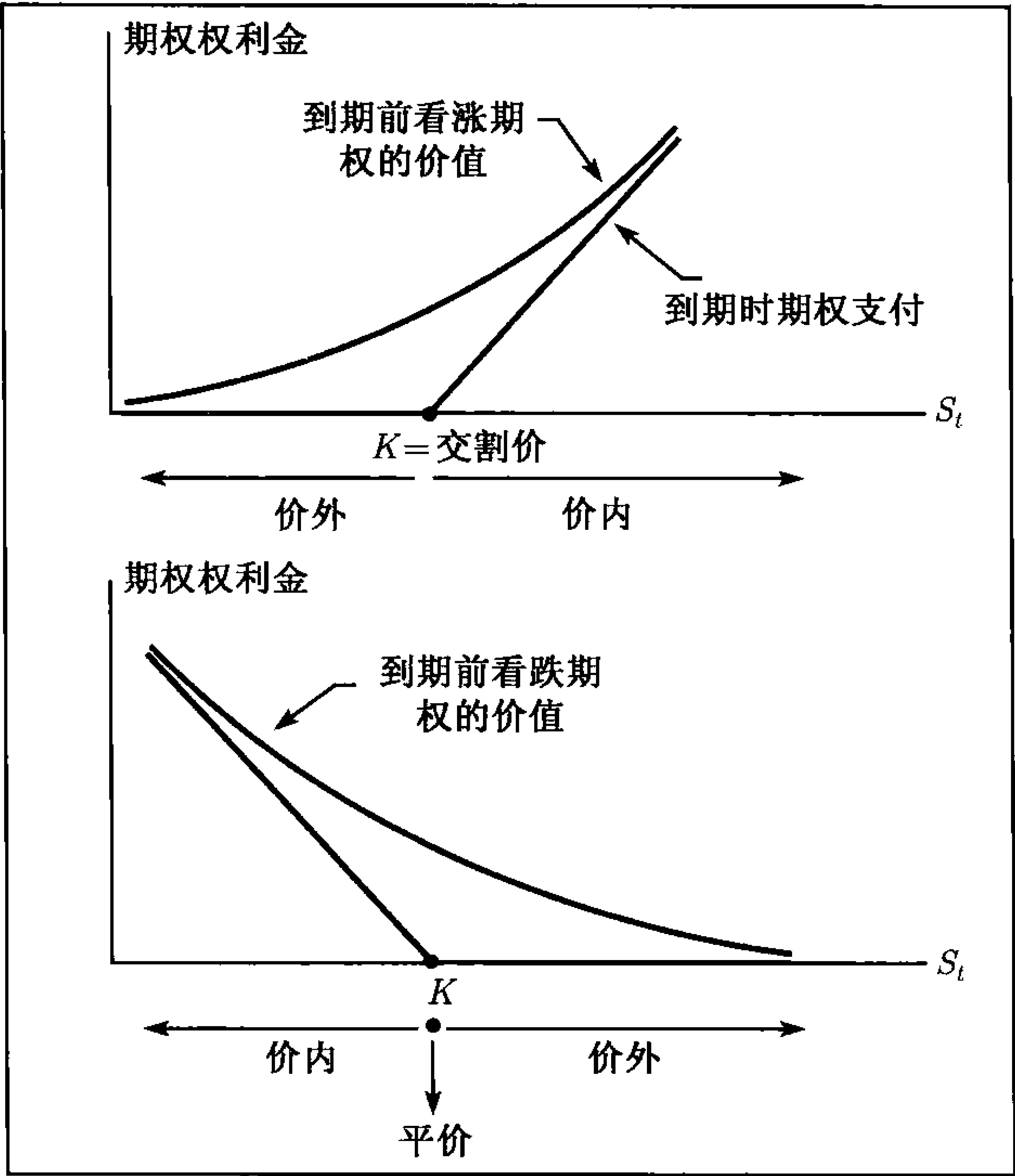



图 7-5

*方法*

复制时间段为 $[t_0,T_2]$, 再平衡要在其中的离散区间内完成. 首先, 选取区间长度为 $\Delta$, 并且将 $[t_0, T_2]$ 划分为 $n$ 等份:

$$n\Delta = T_2 - t_0. \tag{23}$$

在每个 $t_i = t_{i-1} + \Delta$ 上, 我们选择新资产组合的权重 $\theta_{t_i}$, 使得

(1) 在 $T_2$ 时, 动态构造的合成与 $T_2$ 时到期的债券价值相等.

(2) 复制资产组合的每一步调整都不能有净现金的注入或流出.

为了实现这样的复制策略, 我们需要在静态复制方法的基础上增加一些新的假设. 特别地, 由于标的资产的相关性在动态复制中起了重要的作用, 因此需要建立有关 $B_t$、$B(t,T_2)$ 和 $B(t,T_3)$ 随时间联合变化的模型.

这是一个很精细的过程, 至少可用三种途径来模拟这样的模型: (1) 二叉树或三叉树方法; (2) 偏微分方程 (PDE) 方法, 这是与三叉树相似但更普遍的方法; (3) 利用随机微分方程和 Monte Carlo 模拟直接模拟风险因子. 在本节中, 我们选择最

简单的二叉树方法来说明如何用动态方法创造合成资产.

### 7.5.3 二叉树

令 $j = 0, 1, 2, \cdots$ 表示二叉树的"时段", 选择相应的 $\Delta$ 使得 $n = 3$, 那么该树包含 3 个时段 $j = 0, 1, 2$. 每个节点只有两种可能状态. 这意味着 $j = 1$ 时有两种可能状态, $j = 2$ 时共有 4 种状态①.

事实上, 通过调整 $\Delta$ 和选择每个节点上的可能状态, 比如两个、三个甚至更多, 我们可以得到更复杂的树. 每个节点有两种可能状态的是二叉树; 有三种可能状态的是三叉树. 二叉树如图 7-6 所示. 其中每个节点上的可能状态表示为 up 和 down. 这并不意味着变量一定增加或者减少, 它们只是交易者看作"牛市"或"熊市"状态的简称.

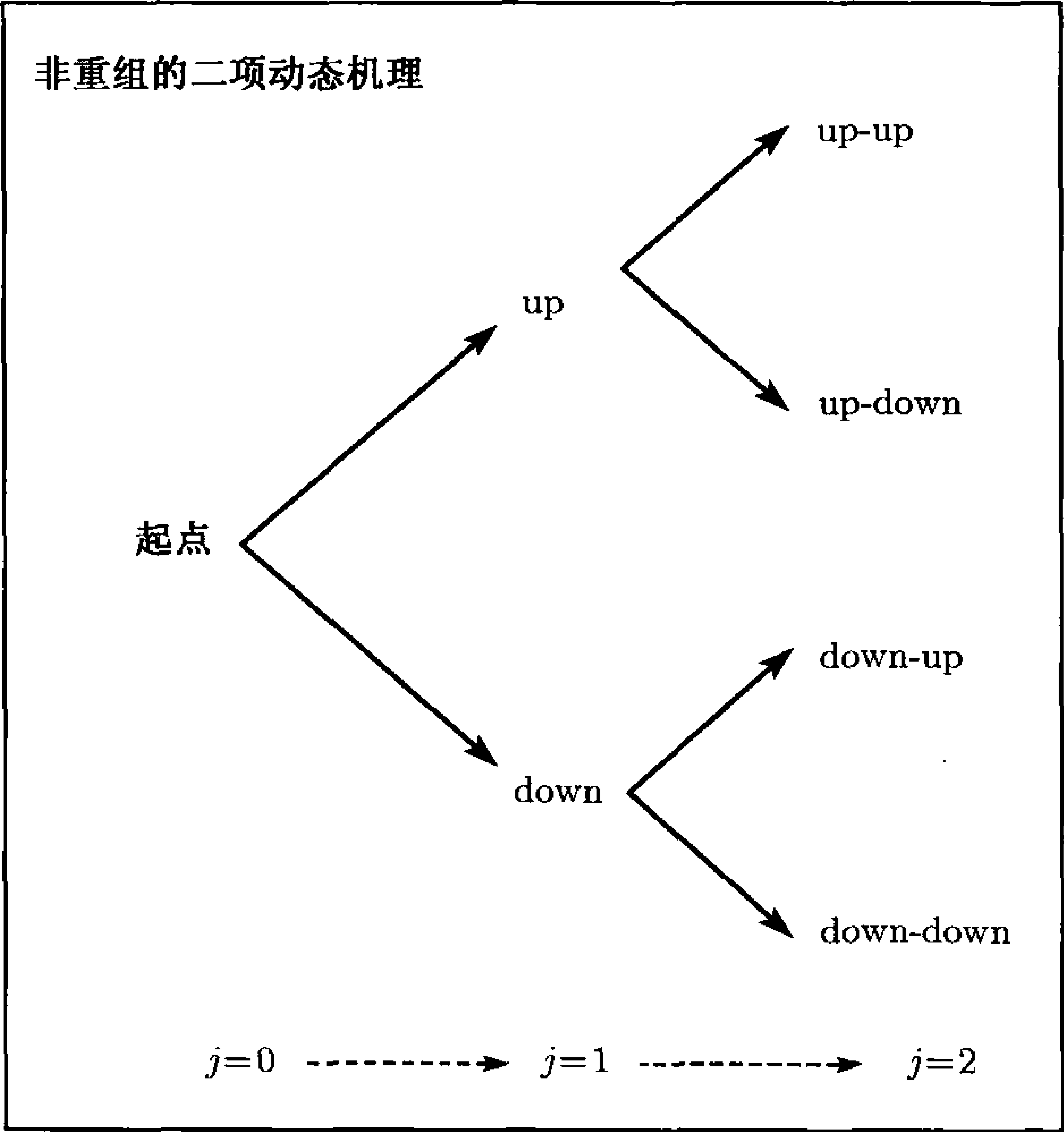



图 7-6 二叉树

### 7.5.4 复制过程

在本节中, 为了方便, 我们令 $\Delta=1$. 图 7-7 是一棵二叉树, 表示 $B_t$ 和 $B(t,T)$ 的联合动态机理. 图中上部描述了 $j = 0$ 时投资 1 美元的二叉树. 这种投资称为*存款*, 随着即期利率滚动. 图中下部表示"长期债券"的价格. 初始点 $j = 0$ 等价于 $t_0$,

① 一般地, 非重组树在 $j = n$ 时有 $2^n$ 种可能的状态.

$j=3$ 时等价于 $t_3$, 即 $B(t,T_3)$ 的到期日. 树是不可重组的, 这意味着, 先向上后向下的利率与先向下后向上的利率的值是不同的. 因此, 到达时间节点的路径是非常重要的[①].

我们现在考虑这些二叉树的动态机理.

1. $B_t$ 和 $B(t,T_3)$ 的动态机理

首先考虑存款或无风险借贷 $B_t$ 的二叉树. 市场参与者在 $t_0$ 时投资 1 美元. $j=0$ 时已知利率是 10%, 不管现实状态如何, 在 $j=1$ 时我们得到 1.10 美元[②]. 在 $j=1$ 时有两种可能. 向上状态表示利率下降, 债券价格增长. 图 7-7 表示在 $j=1$ 时向上状态的即期利率是 8%. 而向下状态的即期利率是 15%.

所以, 二叉树中我们可以看到债券到 $t_2$ 时的 4 种可能路径. 从向上开始, 即期利率的路径是

$$\{10\%,\ 8\%,\ 6\%\}, \tag{24}$$

$$\{10\%,\ 8\%,\ 9\%\}, \tag{25}$$

$$\{10\%,\ 15\%,\ 12\%\}, \tag{26}$$

$$\{10\%,\ 15\%,\ 18\%\}. \tag{27}$$

存款 $B_t$ 的价值的两种可能路径是

$$\{1, 1.10, 1.188, 1.26\}, \tag{28}$$

$$\{1, 1.10, 1.188, 1.29\}, \tag{29}$$

$$\{1, 1.10, 1.26, 1.42\}, \tag{30}$$

$$\{1, 1.10, 1.26, 1.49\}. \tag{31}$$

显然, 如果 $\Delta$ 变小, 即 $n$ 变大时, 可能的路径数也会增多.

"长期" 债券的二叉树如图 7-7 中下部所示. $j=3$ 时债券到期价值为 100 美元, 因为无违约风险, 无论哪种状态, 债券到期价值都相等. 这意味着在到期前的一期, 债券将模拟一期无风险投资. 事实上, 无论哪个状态发生, 从 $j=2$ 到 $j=3$, 我们总会投资一个常数然后得到 100. 例如在 $A$ 点, 我们支付

$$B(2,3)^{down} = 91.7 \tag{32}$$

购买面值为 100 的债券, 此时不考虑即期利率的变化. 但是当我们向前移动时, 情况就不同了. 例如 $B$ 点, 我们或者得到较好的回报

$$R^{up} = \frac{94.3}{85.0}, \tag{33}$$

① Jarrow(2002) 提供了关于利率敏感证券无套利定价的树及其应用的入门理论.

② 因此该项是 "无风险投资".

或有较差的回报

$$R^{down} = \frac{91.7}{85.0}. \tag{34}$$

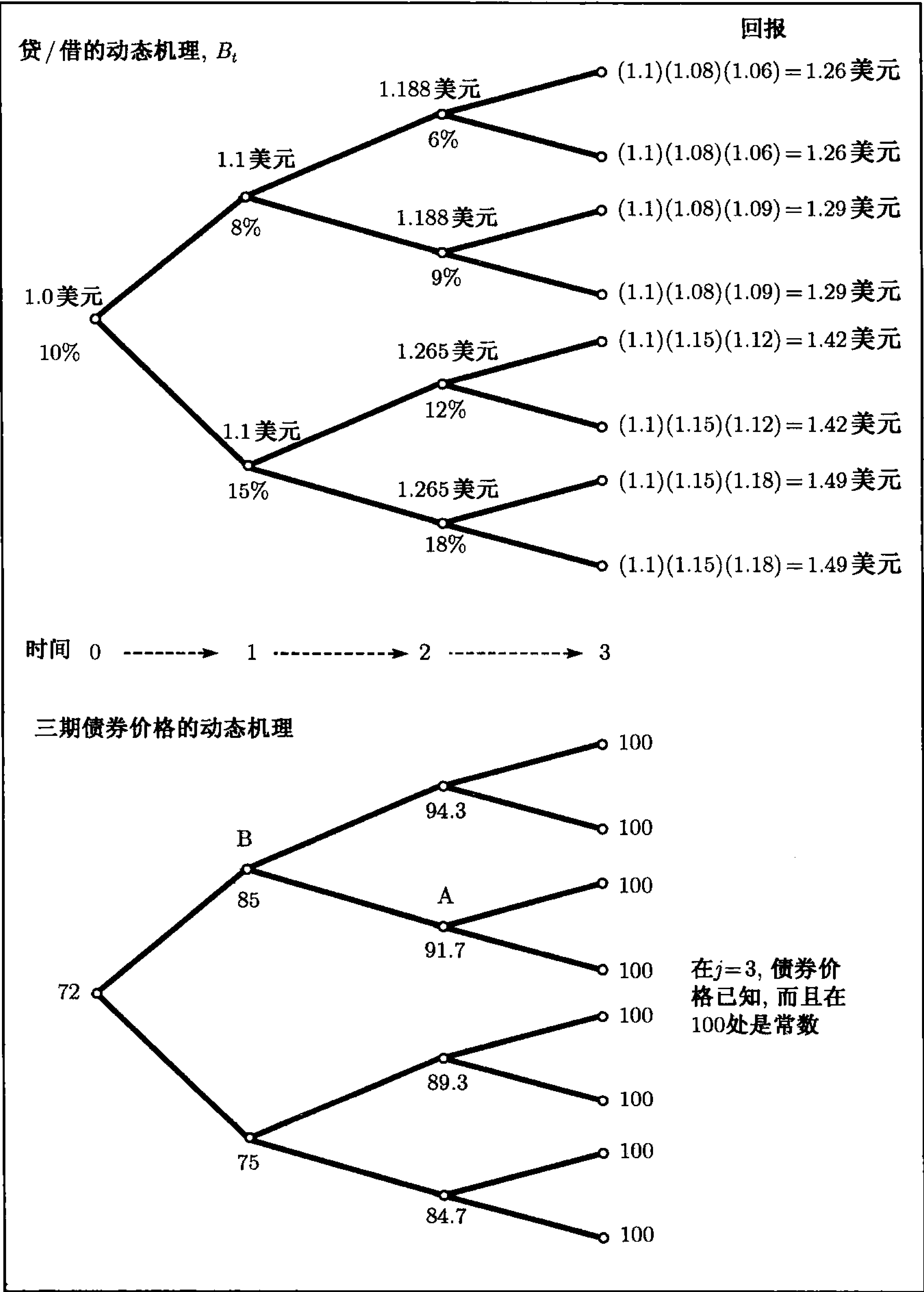



图 7-7

因此, 图 7-7 表示了两种不同的无违约风险的固定收入工具: 存款 $B_t$(可以看作较短期的债券) 以及三期债券 $B(t,T_3)$. 问题是如何结合这两种工具来构造中期债券 $B(t,T_2)$ 的合成.

2. 复制机制

我们将讨论复制的机制. 图 7-8 表示二期债券 $B(t,T_2)$ 价格的二叉树. 假定此树描述了与图 7-7 中完全相同的状态. $B(t,T_2)$ 在 $j=2$ 时已经到期, 所以 $j=2$ 之后的情况没有表示出来. 根据这个二叉树, 我们仅仅知道二期债券在 $j=2$ 时的价值为 100. $j=2$ 之前的价值都是未知的, 所以用空白表示. 当然, 最重要的是未知 $j=0$ 时的债券价值 $B(t_0,T_2)$. 这是二期债券的 "当前" 价值. 本节我们需要讨论如何填满这棵树.

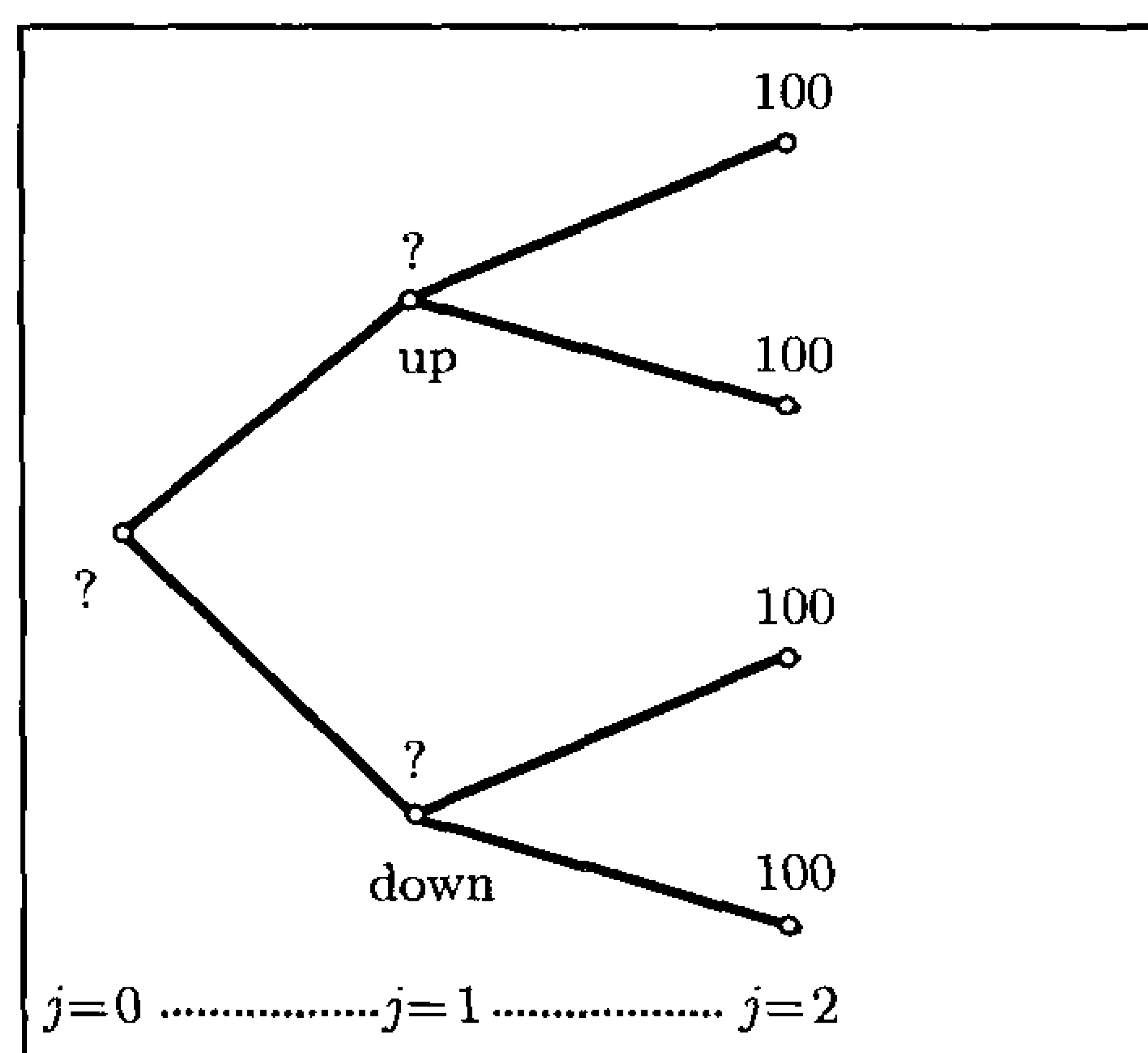



图　7-8

主要思想是利用图 7-7 所给信息来构造权重分别为 $\theta_t^{lend}$ 和 $\theta_t^{bond}$ 的 $B_t$ 和 $B(t,T_3)$ 资产组合. 这个组合应该能够模拟中期债券 $B(t_0,T_2)$ 在 $j=0,1,2$ 时所有节点处的价值. 第一个条件是资产组合在 $T_2$ 时的价格为 100.

第二个重要条件是: 在 $j=0,1$ 时的调整不需要任何现金的注入或流出. 这意味着当我们调整权重或进行再平衡时, 其中一个资产所需的资金来自于另一个资产的调整. 这样, 现金流包括 $t_0$ 时的支付和 $T_2$ 时 100 美元的收入, 在 $t_0$ 和 $T_2$ 之间不含任何净支付或收入, 这与二期贴现债券的现金流相同.

于是, 通过套利资产组合的价值在任何相关时间都应与 $B(t,T_2)$ 的价值相同. 这意味着对任意的 $t$ 和 $j$, $\theta_t^{lend}$ 和 $\theta_t^{bond}$ 需要满足

$$\theta_t^{lend}B_t+\theta_t^{bond}B(t,T_3)=B(t,T_2). \tag{35}$$

3. 保证自融资

如何保证 $\theta_t^{lend}$ 和 $\theta_t^{bond}$ 在 $j=0,1,2$ 时的调整不会导致现金的注入或流出呢？一个充分条件就是在 $j=0,1$ 时满足

$$\theta_j^{lend}B_{j+1}^{up}+\theta_j^{bond}B(j+1,3)^{up}=\theta_{j+1}^{lend}B_{j+1}^{up}+\theta_{j+1}^{bond}B(j+1,3)^{up}, \tag{36}$$

$$\theta_j^{lend}B_{j+1}^{down}+\theta_j^{bond}B(j+1,3)^{down}=\theta_{j+1}^{lend}B_{j+1}^{down}+\theta_{j+1}^{bond}B(j+1,3)^{down}. \tag{37}$$

考察一下这些条件意味着什么. 在左边, 资产组合的权重有下标 $j$, 而资产价格却在 $j+1$ 时度量. 这意味着公式左边表示的是 $j$ 时选择的组合的价值, 并且是在 $j+1$ 时新的上或下状态下的估计值. 于是左边是 "新" 资产价格的函数, 而不是 "旧" 资产组合权重的某个函数.

公式右边是 "新" 资产组合的权重 $\theta_{j+1}^{lend}$ 和 $\theta_{j+1}^{bond}$ 乘以 $j+1$ 时价格. 所以右边表示 $j+1$ 时新组合在向上或向下状态时的成本. 因此, 这两个方程表明无论哪种状态发生, 此前选择的资产组合恰好产生足够的现金来购买一个新的复制组合.

如果选择合适的 $\theta_{j+1}^{lend}$ 和 $\theta_{j+1}^{bond}$ 以满足方程 (36) 和方程 (37), 那么在资产组合再平衡时, 我们不需要任何的现金注入或流出. 这个资产组合就是自融资的. 这就是所谓的动态复制. 通过这些步骤, 我们可以在 $j=0$ 时构造一个资产组合, 直至 $j=2$ 时获得 100 美元, 再平衡的费用都为零. 假设不存在违约风险, 并且所有最终现金流相等, 那么复制资产组合的初始成本必须同 $j=0$ 时二期债券的价值相等:

$$\theta_0^{lend}B_0+\theta_0^{bond}B(0,3)=B(0,2). \tag{38}$$

因此, 动态复制将构造一个真正的二期债券的合成.

最后整理方程 (37), 得

$$(\theta_j^{lend}-\theta_{j+1}^{lend})B_{j+1}^{down}=-(\theta_j^{bond}-\theta_{j+1}^{bond})B(j+1,3)^{down}. \tag{39}$$

这说明调整一个权重所得到的现金能够满足下一个权重调整的资金需求. 所以, 不需要其他的现金注入或流出. 注意, 即使 $B_{j+1}^i$ 和 $B(j+1,3)^i$ 是随机的, 此方法也同样有效. 图 7-7 中的二叉树隐含地假定了这些随机变量是完全相关的.

### 7.5.5 两个例子

我们将上面的主要思想应用到以下两个例子中. 首先, 利用图 7-7 中动态调整的复制资产组合确定两期无违约风险的纯贴现债券的现值. 其次, 讨论期权的复制.

**复制债券**

图 7-7 上部表示了存款 $B_t$ 的特性. 下部表示三期贴现债券 $B(t,T_3)$ 的树. 这两个二叉树都是外生给定的, 而且它们的无套利特征在这里是没有问题的. 我们的

目标是填补图 7-8 中的现值与未来值，并且在这些条件下确定二期债券 $B(t,T_2)$ 的价格.

**例**

为了确定 $\{B(j,2), j=0,1,2\}$，我们首先从图 7-8 中 $j=2$ 处开始. $j=2$ 时是二期债券的到期日，并且由假设我们知道无违约可能. 所以，二期债券在 $j=2$ 时的可能价值记为 $B(2,2)^i$，并可按如下确定

$$B(2,2)^{up-up} = B(2,2)^{down-up} = B(2,2)^{up-down}$$

$$= B(2,2)^{down-down} = 100. \tag{40}$$

一旦图 7-8 中 $j=2$ 的节点上的值确定，我们向后倒推，就能得到 $\{B(1,2)^i, i=\text{up}, \text{down}\}$ 的价值. 这里，我们将用到前面提出的原理. 从 $j=1$ 到 $j=2$，包含 $B_1$ 和 $B(1,3)^i$ 的资产组合在 $j=1$ 时的价值应该与所有节点上 $B(2,2)$ 的可能值相等. 先考虑顶部的节点 $B(1,2)^{\text{up}}$. 我们有如下方程

$$\theta_1^{lend,up} B_2^{up-up} + \theta_1^{bond,up} B(2,3)^{up-up} = B(2,2)^{up-up}, \tag{41}$$

$$\theta_1^{lend,up} B_2^{up-down} + \theta_1^{bond,up} B(2,3)^{up-down} = B(2,2)^{up-down}, \tag{42}$$

这里，$\theta$ 的下标是 $j=1$，所以，方程左边表示 $j=1$ 时确定的复制组合的价值，但是在 $j=2$ 时估价. 在两个方程中，除了组合权重 $\theta_1^{lend,up}$ 和 $\theta_2^{bond,up}$ 外，所有变量都是已知的. 将图 7-7 中的值代入得

$$\theta_1^{lend,up} 1.188 + \theta_1^{bond,up} 94.3 = 100, \tag{43}$$

$$\theta_1^{lend,up} 1.188 + \theta_1^{bond,up} 91.7 = 100, \tag{44}$$

联立方程，我们得到 $j=1$, $i=\text{up}$ 时复制组合的权重

$$\theta_1^{lend,up} = 84.18, \tag{45}$$

$$\theta_1^{bond,up} = 0. \tag{46}$$

于是，如果市场向上运动，84.18 单位的 $B_1$ 将足够复制 $j=2$ 时债券的未来值. 事实上，$j=2$ 时的头寸是

$$84.18(1.188) = 100. \tag{47}$$

注意，长期债券的权重是零①. $j=1$ 时资产组合的成本可以通过计算 $\{\theta_1^{lend,up}, \theta_2^{bond,up}\}$ 得到；它应该与 $B(1,2)^{up}$ 相等：

① 这正是所期望的，因债券在到期前类似于无风险投资权，复制投资组合只对 $B_t$ 有非零权重. 在这种情况下，二期债券是风险投资. 同样，如果 $\theta_2^{bond,up}$ 不为零，那么这两个方程将是矛盾的.

$$\theta_1^{lend,up}(1.1) + \theta_1^{bond,up}(85.0) = 92.6. \tag{48}$$

同理, $j = 1, i = down$ 时的两个方程是:

$$\theta_1^{lend,down}1.265 + \theta_1^{bond,down}89.3 = 100, \tag{49}$$

$$\theta_1^{lend,down}1.265 + \theta_1^{bond,down}84.7 = 100. \tag{50}$$

解得相应的组合权重为

$$\theta_1^{lend,down} = 79.05, \tag{51}$$

$$\theta_2^{bond,down} = 0. \tag{52}$$

在这种状态下, 我们获得组合的成本为

$$\theta_1^{lend,down}(1.1) + \theta_1^{bond,down}(75) = 86.9. \tag{53}$$

这应该是 $B(1,2)^{down}$ 的价值. 最后, 我们考虑 $B(0,2)$ 的价值. 想法仍相同. 在 $j = 0$ 时, 选择合适的资产组合权重 $\theta_0^{lend}$ 和 $\theta_0^{bond}$, 使得组合的价值与 $B(1,2)$ 未来的可能价值相等

$$\theta_0^{lend}1.1 + \theta_0^{bond}85.00 = 92.6, \tag{54}$$

$$\theta_0^{lend}1.1 + \theta_0^{bond}75.00 = 86.9. \tag{55}$$

这里, 方程左边表示 $j = 0$ 时资产组合的总价值, 等于方程右边二期债券的价值. 解出未知量

$$\theta_0^{lend} = 40.1, \tag{56}$$

$$\theta_0^{bond} = 0.57. \tag{57}$$

所以, $j = 0$ 时我们需要存入 40.1 美元并且购买 0.57 单位价格为 $B(0,3)$ 的三期债券. 这样我们将复制出两个可能值 $\{B(1,2)^i, i = up, down\}$. 如果 $B_t$ 和 $B(j,3)$ 的二叉树是无套利的, 这个资产组合的成本必须与 $B(0,2)$ 的当前公允价值相等. 组合成本是

$$b(0,2) = 40.1 + 0.57(72) = 81.14. \tag{58}$$

它也是二期债券在 $j = 0$ 时的公允价值.

二期债券的无套利市场价值是通过计算复制了它的最终现金流的动态自融资资产组合的所有当前和未来权重获得的. 在每一步中, 我们调整资产组合的权重使

得再平衡后的资产组合的价值同 $B(j,2)(j=0,1,2)$ 的价值相等. 事实上, 每个节点只有两种可能状态, 这使得我们得到两个未知量的两个方程.

同静态复制策略相比, 通过利用动态策略和调整资产组合权重, 我们可以在无任何实际现金注入或流出的情况下, 确保组合能够与二期债券产生的最终现金流相等. 每到达一个新的节点, 之前确定的资产组合依然能够提供调整所需的资金①.

### 7.5.6 对期权的应用

我们可以将复制技术应用于期权, 从而构造适当的合成工具. 考虑与图 7-7 相同的无风险借贷动态机理 $B_t$. 这里, 我们将复制一个标的股票 $S_t$ 的看涨期权 $C_t$. 这个期权具有如下标准性质. $t_2$ 时到期, 交割价 $K=100$. 它是欧式期权, 因此不能在到期日之前行权. 标的股票 $S_t$ 不分红. 最后, 不存在诸如佣金或交易 $S_t$ 或 $C_t$ 之类的其他交易费用.

假设股票价格 $S_t$ 服从图 7-9 所示的二叉树. 与债券不同, 股票没有期限, 而且股票价格 $S_t$ 的未来值是随机的. 与 $T_3$ 到期的债券不同, 股票不存在最终时间的未来价值.

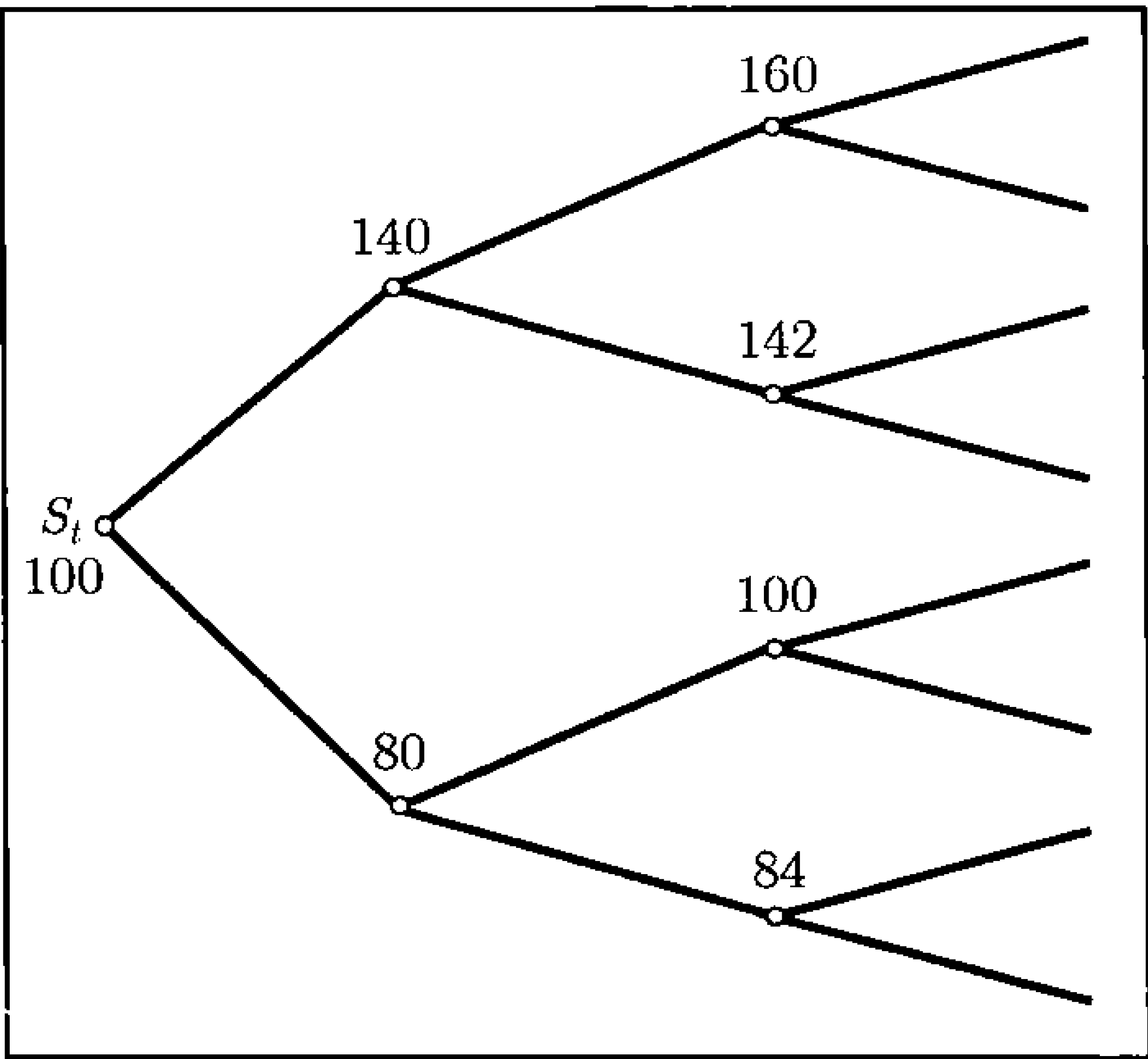



图 7-9

但是, 到期日 $j=2$ 时看涨期权的二叉树仍然有已知价值. 因为在到期日, 我们知道期权的可能价值由下式给出:

$$C_2=\max\left[S_2-100,0\right]. \tag{59}$$

如果已知 $S_2$, 我们就可以确定 $C_2$ 的可能值. 但前期的期权价值仍需要确定.

① 读者应记住以下假设: 待复制的资产无任何中间支付.

我们如何确定它呢？主要思想与前面讨论的二期无违约风险债券相同. 我们需要利用存款和股票 $S_t$ 组成的动态调整资产组合来确定看涨期权的现值 $C_0$.

**例**

先从到期日开始计算, 利用边界条件

$$C_2^i = \max\left[S_2^i - 100, 0\right], \tag{60}$$

这里上标 $i$ 表示在现实状态 {up-up, up-down, down-up, down-down} 中的收益. 由此, 我们确定了到期时 $C_2^i$ 的 4 种可能值

$$\begin{aligned} &C_2^{up-up} = 60, \quad C_2^{up-down} = 42, \\ &C_2^{down-up} = 0, \quad C_2^{down-down} = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

接下来, 后退一步考虑 $C_1^{up}$ 的值. 我们需要构造由 $B_1$ 和 $S_1$ 的组合复制 $C_1^{up}$, 使得随着时间的变化, 该组合的值与期权 $C_2^i$ 的值相等. 于是有

$$\theta_1^{lend,up} B_2^{up-up} + \theta_1^{stock,up} S_2^{up-up} = C_2^{up-up}, \tag{62}$$

$$\theta_1^{lend,up} B_2^{up-down} + \theta_1^{stock,up} S_2^{up-down} = C_2^{up-down}. \tag{63}$$

将图 7-7 和图 7-9 中的已知量代入, 我们就得到两个未知量的两个方程:

$$\theta_1^{lend,up}(1.188) + \theta_1^{stock,up}(160) = 60, \tag{64}$$

$$\theta_1^{lend,up}(1.188) + \theta_1^{stock,up}(142) = 42. \tag{65}$$

解出权重 $\theta_1^{lend,up}$ 和 $\theta_1^{stock,up}$, 得

$$\theta_1^{lend,up} = -84.18, \tag{66}$$

$$\theta_1^{stock,up} = 1. \tag{67}$$

所以, 在 $j = 1, i = $up 时, 我们卖出 84.18 单位的 $B_t$ 并买入股股票. 这个组合下一时刻的值与 $\{C_2^i\}$($i$ 表示 $j = 2$ 时 4 种可能的状态) 的未来值相等. 该组合的成本是 $C_1^{up}$:

$$C_1^{up} = -84.18(1.1) + 140 \tag{68}$$

$$= 47.40. \tag{69}$$

类似地, 为了确定 $C_1^{down}$, 我们首先解下面的方程来构造一个复制组合:

$$\theta_1^{lend,down}(1.26) + \theta_1^{stock,down}(100) = 0, \tag{70}$$

$$\theta_1^{lend,down}(1.26) + \theta_1^{stock,down}(84) = 0, \tag{71}$$

由此得

$$\theta_1^{lend,down} = 0, \tag{72}$$

$$\theta_1^{stock,down} = 0. \tag{73}$$

资产组合的成本是零, 因此在 $j = 1, i =$down 时, 期权价值也为零

$$C_1^{down} = 0. \tag{74}$$

最后, 通过下面方程解出初始的组合权重, 我们可以确定期权的公允价值 $C_0$:

$$\theta_0^{lend}(1.1) + \theta_0^{stock}(140) = 47.40, \tag{75}$$

$$\theta_0^{lend}(1.1) + \theta_0^{stock}(80) = 0, \tag{76}$$

解得

$$\theta_0^{lend} = -57.5, \tag{77}$$

$$\theta_0^{stock} = 0.79. \tag{78}$$

因此, 我们需要在 $j = 0$ 时借入 57.5 美元并且购买 0.79 单位的股票. 此组合成本就是期权的当前值:

$$C_0 = -57.5 + 0.79(100) \tag{79}$$

$$= 21.3. \tag{80}$$

如果由外生给定的二叉树是无套利的, 那么这就是期权的公允价值.

再次注意这种动态策略的重要特征: (1) 为了确定期权当前值, 我们从到期日和边界条件入手; (2) 不断调整资产组合的权重, 使得复制资产组合与期权有相同的最终现金流; (3) 最后, 无现金的注入或流出, 因此策略的初始投资就是合成的成本.

## 7.6 一些重要条件

为了保证这些方法可行, 有必要作某些重要假设. 到目前为止, 我们还没有详细讨论过这个问题.

### 7.6.1 无套利初始条件

本章所介绍的方法只有在排除了原始上任何套利的可能性才可行. 否则, 该过程将会给出 "错误" 的结果. 例如, 某些债券价格 $B(j,T_2)^i$, $j=0,1$ 或期权价格有可能为负值.

可以从很多途径来讨论原始动态机理的无套利性质. 一种明显的条件涉及存款和其他构成资产的回报. 显然, 图 7-7 中二叉树的每个节点处都必须满足以下条件:

$$R_j^{down} < L_j < R_j^{up}, \tag{81}$$

这里, $L_j$ 表示在该节点处观察到的一期即期利率, $R_j^{down}$ 和 $R_j^{up}$ 表示同一节点上债券的两种可能回报.

根据这个条件, 无风险利率的大小应该在持有 "风险" 资产 $B(t,T)$ 的两个可能回报之间. 对于债券, 在到期日前由于无套利我们得到

$$R_j^{down} = L_j = R_j^{up}. \tag{82}$$

否则, 可以买入或卖出该债券, 并且使用无风险投资所得来赚取无限的收益.

然而, 二叉树的无套利特征通常还需要做更复杂的假设. 第 11 章将说明, 保证二叉树是无套利的, 潜在的动态机理应该与一个适当的*鞅动态机理*一致.

### 7.6.2 二叉树结构的作用

前面在讨论二叉树结构时, 我们还做了一个更强的假设. 这个假设虽然没有改变动态复制策略的逻辑, 但是如果它不满足的话, 将会使动态复制在数值计算上变得更加复杂.

考虑图 7-7. 在这些二叉树中, 我们假设当短期利率下降时, 长期利率也下降. 相反地, 当短期利率增长时, 长期利率也增长. 换句话说, 长期债券的回报同短期利率是完全相关的. 由于这些假设, 我们可以将 $B_t$ 的未来值与 $B(t,T_3)$ 的未来值联系起来. 这些联系不是随机的. 在 $S_t$ 和 $C_t$ 的二叉树中我们也利用了类似的假设. 这两种资产的变动是完全相关的.

这是一个相当强的假设, 并且它缘于我们利用了所谓的*单因子模型*. 我们假设在每个节点只有一个随机变量确定资产的未来值. 在实际中, 虽然已知短期利率 $L_t$ 的可能运动, 由于还有*其他*随机因素的作用, 我们可能不知道债券价格 $B(t,T)$ 下一时刻究竟将要上升还是下降. 在这种情况下, 由于两种资产的*上升*或*下降*值的相关性不确定, 我们不可能得到相同的方程.

然而, 引入更多的随机因子将只会增加模型数值计算的复杂性. 比如, 我们可以将二叉树变成三叉树或者更复杂的树. 动态复制的一般逻辑没有改变, 但是, 我们可能需要更多的基础资产来构造合适的合成.

## 7.7 现实生活中的复杂性

现实生活中的复杂性使得动态复制比静态复制更不容易操作. 静态复制遇到的问题是熟知的. 存在实际操作问题, 对手风险问题以及理论上的精确合成与现实中原始资产不一致的问题. 还有流动性问题和存在其他交易费用的问题. 但是, 所有这些问题的影响都相对较小, 实际中使用的静态复制组合一般提供了很好的合成工具.

对于动态复制, 这些问题就放大了, 因为标的头寸需要多次调整. 例如, 如果动态调整频繁发生, 那么交易费用的影响将会严重得多. 类似地, 流动性的问题也会更加严重. 但更重要的是, 动态复制方法在现实生活中的利用导致了静态复制所没有的 4 个新的问题. 下面简单介绍一下.

### 7.7.1 询价差和流动性

考虑询价差的一个简单的例子. 在静态复制中, 组成合成的资产组合在 $t$ 时已经形成, 而且直至到期日 $T$ 时也不会改变. 在这种情况下, 询价差的存在也许是不可忽略的, 但是它不是问题的主要方面. 毕竟, 任何询价差最终都会增加 (减少) 相关合成的费用, 并且当这些询价差不存在时, 合成将无法构成一个整体.

但是, 对于动态复制, 参与者持续调整复制资产组合. 这种过程很容易扩大询价差或者增加标的流动性的变化. 在动态复制形成初始, 询价差或流动性的未来变化不是确切知道的, 而且也不能考虑在合成的初始费用中. 即便将该合成持有到期, 这种变化也将导致附加的风险并增加费用.

### 7.7.2 模型和跳跃

动态复制在现实生活中是不完美的. 它使用的是离散时间*模型*. 但是, 模型本身就包含很多假设, 而且离散意味着近似, 这导致了模型风险. 如果在动态复制过程中对多因子和可能存在跳跃风险不加考虑的话, 将会导致严重的后果.

### 7.7.3 维护与操作费用

理论上获得动态复制策略是容易的. 但是事实上, 执行这个策略需要适当的头寸维持和风险管理工具. 必要的软件和为此所需的人工技能可能会带来相当可观的新费用.

### 7.7.4 波动率的变化

通常当标的工具是非线性时需要进行动态复制. 事实说明, 在处理非线性工具时, 我们将遇到新的且不明显的风险, 例如与风险因子相关的*波动率*变化等. 因为

风险管理的波动率敞口比利率或者汇率风险管理更加棘手 (并且困难), 所以动态复制通常还需要别的技巧.

在本章最后的练习中, 我们简单回顾了这一点, 并提供了有关动态对冲过程中波动率变化的阅读资料 (及一些问题).

## 7.8 结 论

我们用一个重要的观察结果来结束这一章. 利用现金流图我们可以很好地完成静态复制, 而且最后归结为权重为常数的契约方程.

用动态方法构造一个合成需要持续的调整和精心选择资产组合权重 $\theta_t^i$ 以保证合成是自融资的. 于是我们再次用到契约方程, 但此时指定给每一个合约的权重随时间变化而变化. 这就需要使用代数方程并用计算机进行计算.

最后应指出, 动态合成工具实际上就是金融工程师在 $t_0$ 时确定的一个权重序列 $\{\theta_1^i,\theta_2^i,\cdots,\theta_n^i\}$.

## 参考文献

关于动态复制的书通常都是有关衍生产品和金融市场的中等水平教科书. 这里我们介绍两本很好的材料, 读者可以从中进一步了解更多的例子. 第一个是 Jarrow(2002), 此书讨论了固定收入的例子. 第二个是 Jarrow 和 Turnbull(1999), 它们更详细地讨论了动态复制方法, 并且提供了更广范的应用. 读者还可以参考 Cox 和 Ross 的原始文章 (1976a), 它仍是一个非常好的概述.

## 习 题

1. 假设已知如下数据:
- 无风险利率是 6%;
- 股票价格服从:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t; \tag{83}$$

- 波动率是每年 12%;
- 股票无红利且当前价格为 100.

利用这些数据, 估计股票欧式看涨期权的当前价值. 期权的交割价是 100, 期限是 200 天.

(a) 选择适当的时间长度 Δ, 使得所隐含的二叉树有 5 个阶段.

(b) 向上状态的隐含概率是多少?

(c) 确定股票价格 $S_t$ 的二叉树.

(d) 确定买入期权权益金 $C_t$ 的二叉树.

2. 假设上题中的股票有分红, 其他所有参数都相同. 考虑公司支付红利的 3 种方式:

(a) 支付连续的已知红利流, 每单位时间支付率为 4%;

(b) 在第 3 个节点支付股票价值的 5%, 除此外无其他分红;

(c) 在第三个节点支付 5 美元红利.

确定每种情况除息后股票价格的二叉树. 确定前两种方式期权的权益金. 第 3 种分红方式如何使二叉树变得复杂?

3. 利用二叉树来估计英镑的美式期权价值. 假设英镑的当前价值是 1.40 美元. 波动率是 10%. 当前英国无风险利率是 5%, 美国无风险利率是 2%. 看跌期权的交割价是 1.50 美元. 期限是 200 天. 美式期权可以在到期日之前执行.

(a) 第一个需要解决的问题是美国和英国利率所起的作用. 这个期权是在美国购买的, 所以相应的无风险利率是 2%. 但是英镑可以用来赚取英国无风险利率. 所以这个变量可以看作是连续分红率.

考虑到这一点后, 确定 $\Delta$ 的值使二叉树有 5 个阶段.

(b) 确定相应的概率.

(c) 确定汇率的二叉树.

(d) 确定相同特征的欧式卖出期权的二叉树.

(e) 确定具有这些性质的美式卖出期权的价格.

4. 考虑下面的阅读资料, 它涉及了直接 delta对冲的影响. 阅读下面的事件然后回答后面的问题.

*动态对冲*(Dynamic Hedging)

*上星期美国权益期权市场参与者一致拒绝了下述说法: 权益期权交易所引起的 [动态对冲] 加剧了十月末股票市场回调. 此次回调导致道琼斯平均工业指数下跌了 554.26 个点, 或约 7%.*

*动态对冲是一种利用买卖股票来产生支付的策略. 这种策略和买卖期权相同. 所以, 如果股票价格大跌, 看跌期权的卖出者会卖出股票以减少损失. 期权对冲者通过买卖股票以获得他们所期望的头寸来平衡波动率敞口.*

*动态对冲, 也称为 delta 对冲的目的, 是为了保持市场中性. 对冲者的目的是为了保证没有关于市场的方向敞口. 例如, 对冲者购买卖出期权, 就获得了卖出股票的权利, 这样他们本质上看空市场. 为了抵消这个空头头寸, 他们将购买标的股票. 投资者将购买卖出期权并且购买股票, 因此实现了市场中性.*

*如果股票价格下跌, 投资者的卖出期权具有实值, 增加了对市场的空头敞口. 为了抵消它, 投资者将卖出标的股票……*

*"我的拙见是很少有投资者利用动态对冲. 如果有人卖出期权, 即卖出波动率, 他就要持有一个多头波动率的抵消头寸. 人们对一个大赌注不会只赌一面." 一个美国衍生产品交易所的高级专家如是说.* (IFR, 第 832 期)

(a) 假设有很多人卖出期权. 这些交易者如何对冲他们的头寸呢? 利用适当的支付图形进行说明.

(b) 当市场开始下跌时, 这些交易者将如何应对? 利用支付图形进行说明.

(c) 现在假设一位期权交易者如最后一段所说那样卖空波动率. 描述这位交易者如何在"其他方面" 成为波动率多头的?

(d) 市场总体上是否可能为 (一点) 波动率空头？这个空头数对于标的 (现金) 市场仍然非常重要吗？

在这篇资料中有许多特殊的名词, 但这里我们需要强调动态对冲的一个重要方面, 它在本章中没有涉及. 如这篇资料所述, 为了动态对冲一个非线性资产, 我们需要 delta. delta 是标的价格变化对期权变化的敏感性. 如果这个资产确实是非线性的, 那么 delta 将依赖于标的风险的波动率. 如果波动率本身依赖于多个因素, 例如交割价等, 那么将会出现*波动率微笑*从而 delta 对冲可能不精确.

为此, 假设持有标的英国 FTSE 100 指数的多头期权头寸, 你将如何 delta 对冲这个头寸呢？更重要的是, 你的 delta 对冲如何受上述资料中最后一段的观点所影响呢？

5. 确定图 7-7 中的树是否是无套利的.

# 第 8 章 期权的交易机制

## 8.1 引 言

本章介绍处理含有*选择权*的金融工具的方法. 与大部分现有教科书不同, 本书采用一种不同的方式来看待期权：从期权市场做市商的角度来讨论问题. 在我们的框架下, 期权不再是用来打赌或对冲标的风险方向的工具, 而是*波动率*工具.

在传统教科书的方法中, 期权是作为*方向性*工具来介绍的. 而市场专业人士并不这样看待期权. 在大部分教科书中, 持牛市观点的人认为, 看涨期权会成为价内的, 且当标的资产价格上涨时将会获利. 对看跌期权的处理亦类似. 看跌期权适用于那些认为标的资产价格将要下跌的投资者. 对一个终端投资者或者零售客户来说, 期权的这种*方向性*是很自然的. 但是, 如果我们关注的是银行间市场或者交易商间市场, 这种看待期权的方式将会令人产生误解. 实际上, 将期权作为方向性工具将会掩盖这些工具的基本特征, 即期权是交易*波动率*的工具. 对期权的这两种看法直觉上很不相同, 我们希望读者能够像期权交易者或者市场做市商一样来考虑问题.

本章将说明当一个期权敞口完全建立后, 有人期望波动率发生变化时, 它就不再是一个纯粹的头寸. 一个持有净*多头头寸*的做市商就是希望波动率*增大*的人; 而持有期权*空头头寸*的做市商则是认为标的资产的波动率会下降的人. 有时这种头寸会被用作融资工具.

从这个意义上看, 交易者看待看涨期权和看跌期权的方式与期权的方向性看法完全相反. 例如, *做市商将欧式看涨期权和看跌期权看成是一样的工具*. 就像我们即将看到的那样, 在一个期权做市商的眼里, 买一个看涨期权和买一个看跌期权是没有区别的. 这两种交易最后将导致相同的支付. 考虑图 8-1, 图中展示了标的资产价格在当天的两种可能轨迹. 在其中一种情形下价格迅速下降, 而在另一种情形下价格上涨. 一个期权交易者卖出看跌期权或看涨期权同样容易. 我们也将要看到, 交易者并不关注卖出什么类型的期权, 他关注的是应该*买入*还是*卖出*它们.

本章和第 9 章将证明波动率与期权价格的关系. 首先回顾一些基本概念.

## 8.2 期 权

从市场操作者的角度来看, 期权是波动率工具. 一个持有某个资产 $s_t$ 看涨期

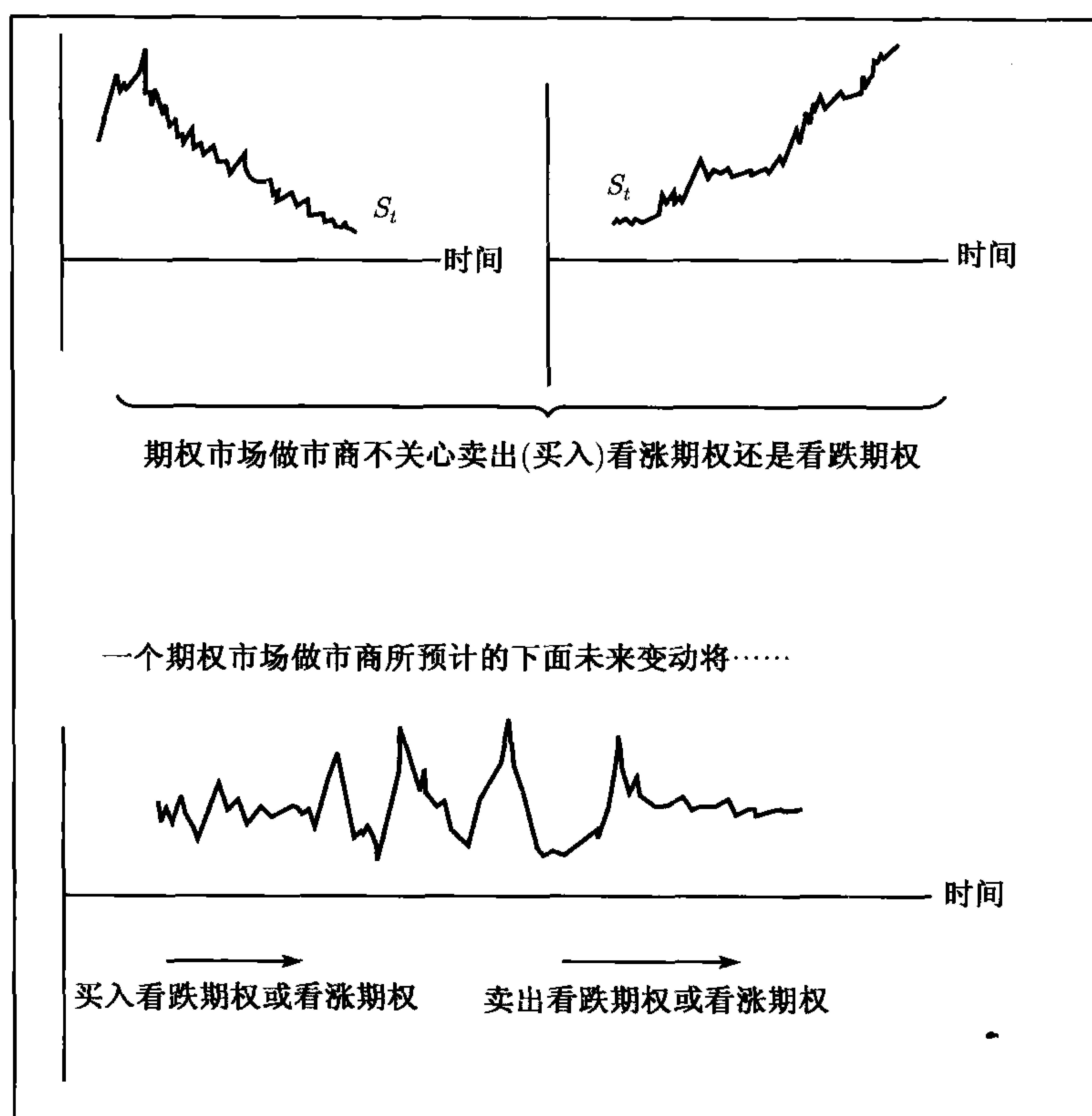



图　8-1

权的零售投资者也许认为, 这种资产价格的持续上涨对他将会是有利的. 但是, 一个持有同样看涨期权的做市商更愿意标的资产的价格 $s_t$ 能够发生尽可能大且尽可能频繁的波动. 价格波动得越频繁越剧烈, 在账簿上的多 (空) 头头寸将会获利 (损失) 越多, 而不管他拥有的是看涨还是看跌期权.

下面是关于期权交易者如何看待期权的一个很好的例子.

**例**

华尔街的公司准备推荐做多即将公布利润的某公司股票的波动率头寸. 在报表发布季节通常会为通过买入看涨期权或者看跌期权而做多波动率提供机会. 由于投资者总体的负面倾向, 这个季节将为从做多波动率头寸中受益提供充足的机会. 一个公司公布的收益比预期更差会对整个市场产生很大冲击.

这些交易潜在的巨大利润来自于 gamma, 换句话说, 来自于标的资产的巨大波动而不是隐含波动率的波动. 一个有前途的某公司在二月中旬宣布生产过程和控制上的问题导致了某些产品在美国的销量减少, 预计将影响到第一季度和全年的销量

和收益. 在周五, 八月份到期的期权拥有大约 43%的中期市场隐含波动率, 也就意味着在每个交易日里股价有 2.75%的波动. 在上个月内, 股价平均每日波动 3%, 这意味着通过买入这家公司的期权, 你获得了便宜的波动率. (摘自《衍生产品周刊》, 2001 年 4 月 1 日)

这段材料展示了期权的一些重要特点. 首先, 我们清楚看到市场操作者将看涨期权和看跌期权看作是相似的工具. 问题不是买入看涨期权还是看跌期权, 而是是否买它们.

其次, 这与第一点有关系. 注意到市场操作者关心的是波动率, 而不是价格的变化趋势. 市场专业人士对股价每日的实际波动率和期权隐含的波动率之间的差很感兴趣. 材料里的最后一句话是一个很好的 (但可能有些误导) 例子. 材料表明, 期权隐含了每日 2.75%的波动率, 而股价每日实际的波动率是 3%. 由此认为期权是便宜的, 因为在特定的一天里, 标的资产实际的波动比期权隐含的波动要大①. 要记住隐含波动率与实际波动率之间的差别.

最后, 材料似乎涉及了从波动率中获得的两种类型的收益. 一种来自于标的资产价格的较大波动, 也就是 gamma*收益*, 另一种来自于隐含波动率, 也就是 vega*收益*. 在这个特定的事件中, 市场专业人士希望隐含波动率保持不变, 而标的资产显示出相当大的波动. 在开始就理解这种差别比较困难. 本章将先阐明一些概念, 然后使市场专业人士对期权的看法与读者之前看到的方向性看法一致起来②.

## 8.3　期权的定义和符号

期权合约通常被分为*普通期权*和*奇异期权*两类, 虽然很多以前是奇异期权的现在已经成为普通的工具了. 在讨论期权时, 比较好的办法是从简单的基准模型开始, 理解期权的基本要素, 再把这种方法推广到更加复杂的工具. 这个简单的基准将是一个在 Black-Scholes 模型的框架下的普通期权.

期权的买方买的并不是标的资产, 他买的是一种权利. 如果这种权利只能在到期日行使, 这个期权就是*欧式*的. 如果这种权利在一个特定时间段里的任何时间均能行使, 这种期权就称为*美式*的. 一个*百慕大*期权介于两者之间, 这种权利可在期权有效期内多于一个日子里行使.

---

① 这里的分析需要仔细阐述. 在期权的文献中有许多种度量波动率的方法. 就像本章所示, 这两个值不同是合理的, 而且可能并不隐含着套利机会.

② 前面的例子也说明了实际中波动率算法的一个技术问题. 现在考虑给定百分比形式的年波动率后, 如何计算日波动率. 假设一年有 246 个交易日, 注意百分比的年波动率并不是除以 246, 而是除以 246 的平方根, 从而得到 2.75%的日波动率. 这就是著名的*平方根法则*, 这与将股票的价格过程模拟为 Wiener 过程有关. Wiener 过程的增量方差与所经过的时间成正比. 因此, 标准差或波动率就与时间的平方根成正比.

在一个普通欧式看涨期权情形下，期权持有者购买了可以按一定价格在特定日子购买标的资产的权利，这个价格称作**交割价**或执行价，这个特定的日子称为**到期日**. 在普通欧式看跌期权的情形下，期权持有者同样是购买了某种行为的权利，只是这时候行为变为按照执行价在到期日卖出标的资产.

美式期权可以在到期日前的任何时间执行，因此可能更贵，因为提前执行需要附加的费用. 在到期日，期权将不再存在. 在本章里，我们大多数时候用普通看涨期权来讨论期权的基本性质. 显然，看跌期权的处理也是类似的.

### 8.3.1 符号

用符号 $K$ 来表示交割价，$T$ 表示到期日. 当标的资产是现货时，用 $S_t$ 表示它的价格或者价值；当它是远期或期货时，则用 $F_t$ 表示. 在 $t$ 时，看涨期权的公平价格用 $C(t)$ 表示，看跌期权价格用 $P(t)$ 表示[①]. 这些价格依赖于隐含在合约中的变量和参数. 我们用 $S_t$ 作为隐含变量，然后将相应的看涨期权的**定价函数**写为

$$C(t) = C(S_t, t|r, K, \sigma, T). \tag{1}$$

这里 $\sigma$ 是 $S_t$ 的波动率，$r$ 是即期利率，假定为常数. 公式可以表示成下面更加简洁的形式

$$C(t) = C(S_t, t). \tag{2}$$

假定这个函数有一阶偏导数：

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} = C_s, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} = C_{ss}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} = C_t. \tag{5}$$

关于这些偏导数还有更多的性质. 当所有其他量保持不变时，如果 $S_t$ 增加，看涨期权的价格 $C(t)$ 也将增加. 如果 $S_t$ 减少，价格将会下降. 但是，$C(t)$ 的变化永远不会超过隐含资产 $S_t$ 的价格变化. 因此，我们有

$$0 < C_s < 1. \tag{6}$$

同时，如果所有的其他量保持不变，当 $t$ 增加时，期权的有效期变短，而时间价值则下降，

$$C_t < 0. \tag{7}$$

---

① 这种刻画和处理时间指标的方式与本章之前的方法有些不同. 期权的价格没有像前面章节中那样记成 $C_t$ 和 $P_t$，而是使用了 $C(t)$ 和 $P(t)$. 前面的符号将被保留为期权价格关于时间的偏导数符号.

最后, 一个看涨 (看跌) 期权的到期日支付是一个凸函数, 我们预期 $C(S_t,t)$ 也是凸函数. 这意味着

$$0 < C_{ss}. \tag{8}$$

关于偏导数的这些信息被看作是已知的, 即使并不知道 $C(S_t,t)$ 本身确切的表达式.

方程 (1) 的符号表示这些偏导数本身也是 $S_t, r, K, t, T$ 和 $\sigma$ 的函数. 因此, 我们可以推导出更高阶的偏导数. 传统的 Black-Scholes普通期权定价情形只用到了 $C_s, C_{ss}, C_t$. 随着 Black-Scholes 假设的逐步放松, 可引入更多的偏导数.

图 8-2 显示了普通看跌和看涨期权在到期日的支付. 在同一图中也表示出了看涨期权和看跌期权在时间 $t$, $t<T$ 时的价值. 这些价值形成了由 Black-Scholes 公式得到的光滑的凸曲线.

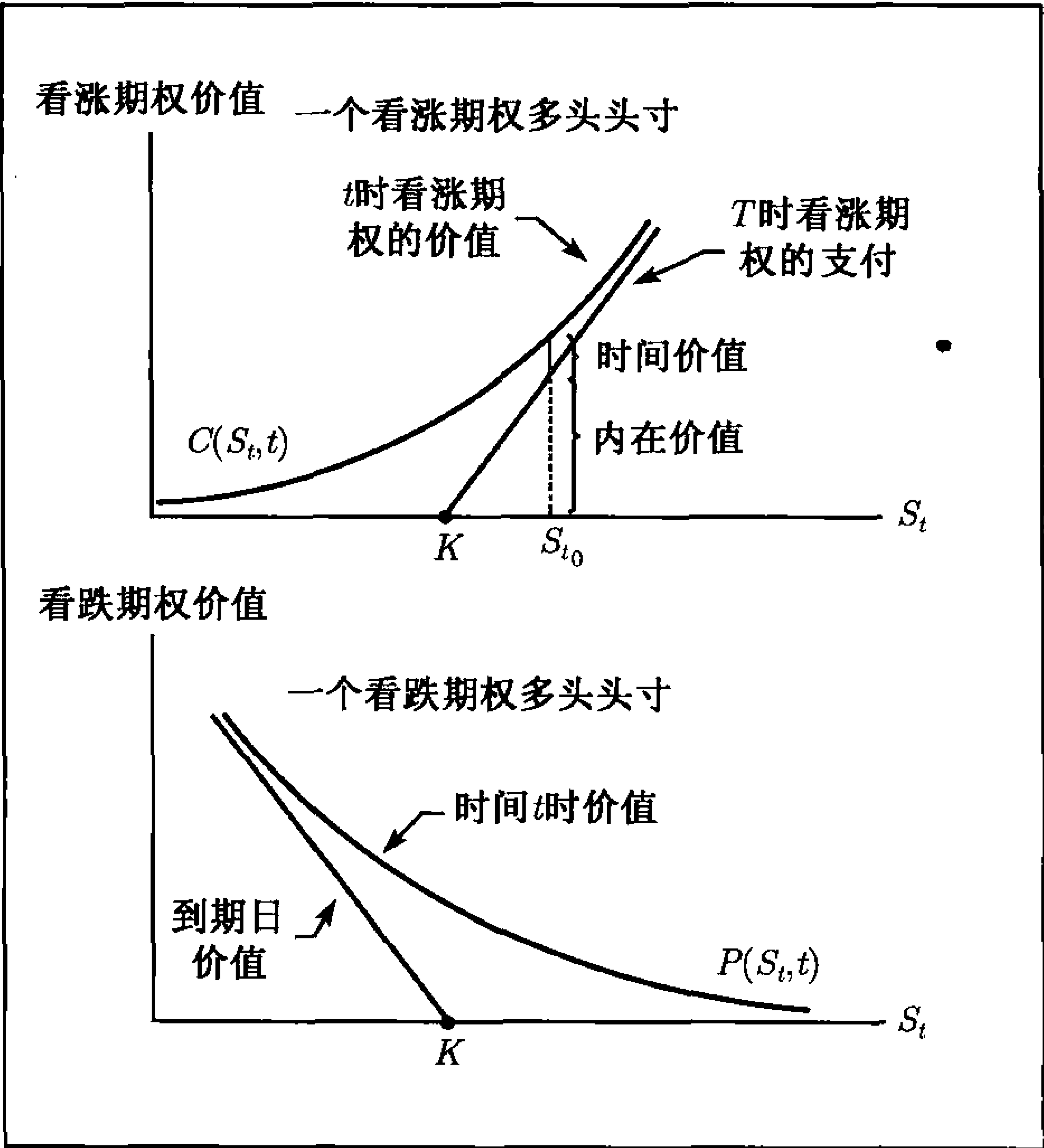



图 8-2

我们现在考虑这些概念在现实中的应用. 下面的例子涉及芝加哥期权交易所内交易的微软期权, 并且讨论了在此背景下的各种参数.

**例**

假设微软 (MSFT) 股票在纳斯达克市场上现在以 61.15 进行交易. 此外, 隔夜利率是 2.7%, 我们有如下来自芝加哥期货交易所 (CBOE) 的报价.

在表格中, 第一栏表示到期日和期权的交割水平. 准确的到期日是每个月的第三个星期五. 在 CBOE, 这些股票期权都是美式的. 买入价就是市场做市商愿意从客户买入这个期权的价格, 而卖出价是他愿意卖给客户的价格.

CBOE 的期权价格要乘以 100 后再开票. 当然, 由于代理和其他花费, 买入和卖出期权还会有一些额外的费用. 表格的最后一栏表示相关合约的交易数量.

| 看涨期权 | 买入价 | 卖出价 | 数量 |
|---|---|---|---|
| 11 月 55.00 | 7.1 | 7.4 | 78 |
| 11 月 60.00 | 3.4 | 3.7 | 6291 |
| 11 月 65.00 | 1.2 | 1.3 | 1456 |
| 11 月 70.00 | 0.3 | 0.4 | 98 |
| 12 月 55.00 | 8.4 | 8.7 | 0 |
| 12 月 60.00 | 5 | 5.3 | 29 |
| 12 月 65.00 | 2.65 | 2.75 | 83 |
| 12 月 70.00 | 1.2 | 1.25 | 284 |
| 看跌期权 | 买入价 | 卖出价 | 数量 |
| 11 月 55.00 | 0.9 | 1.05 | 202 |
| 11 月 60.00 | 2.3 | 2.55 | 5984 |
| 11 月 65.00 | 5 | 5.3 | 64 |
| 11 月 70.00 | 9 | 9.3 | 20 |
| 12 月 55.00 | 2.05 | 2.35 | 10 |
| 12 月 60.00 | 3.8 | 4.1 | 76 |
| 12 月 65.00 | 6.3 | 6.6 | 10 |
| 12 月 70.00 | 9.8 | 10.1 | 25 |

注意: 数据来自于 CBOE, 2002 年 10 月 24 日, 上午 11: 02.

例如, 考虑 11 月份 55 的看跌期权. 如果微软的股价低于 55.00, 这个期权将是价内的. 如果股价一直保持这样直到 2001 年 11 月的星期五, 这个期权将在到期日有一个正的支付.

100 个这样的看跌期权将花费

$$1.05 \times 100 \times 100 = 10\ 500 \text{ 美元}, \tag{9}$$

加上购买佣金, 则如果是按照卖出价卖的话可以卖到

$$0.90 \times 100 \times 100 = 9\ 000 \text{ 美元}. \tag{10}$$

注意到对于一手期权, 当日的买卖价差达到了 1 500 美元.

下面深入讨论期权的机制, 并引进更多的术语.

### 8.3.2 期权的零售用途

假设一个零售客户和一个期权做市商是交易的双方. 假设一个商人以商品 $S_t$ 作为生产输入, 而且想以 $S_T$ 作为未来 $T$ 时的价格上限. 为了保险, 商人需要买入

关于 $S_t$ 的看涨期权, 期权费用 $C(t)$ 表示. 通过购买这个看涨期权, 客户确保了他在到期日 $T$ 时能以最高价格 $K$ 购买一单位标的资产. 如果到时候 $S_T$ 比 $K$ 低, 客户将不执行这个期权. 没有必要支付 $K$ 美元去购买在市场上更便宜的东西. 在 $T$ 时只有 $S_T$ 等于或者超过 $K$ 时期权才会被执行.

从此角度来看, 期权与防止商品价格潜在上涨的标准保险有一些相似. 在这样一个框架下, 期权作为方向性工具来使用. 某人会有这样的印象, $S_t$ 上涨对客户有害, 而看涨期权保护了这种风险. 看跌期权的情况是对称的. 看跌期权似乎是为 $S_t$ 的不被期望出现的下跌风险提供保护的. 在两种情形下, 标的资产价格 $S_t$ 某一个方向的变化会伴随着看涨期权或者看跌期权, 而这两种期权似乎是根本不同的工具.

图 8-3 表示了这些思想. 最上面的图表示看涨期权的支付图. 在开始时间 $t_0$, 标的资产的价格是 $S_{t_0}$. 注意到 $S_{t_0} < K$, 所以期权是价外的. 显然这并不意味着在时间 $T$ 时用 $K$ 美元购买资产的权力没有价值. 实际上, 从客户的角度来看, $S_t$ 在区间 $t \in [t_0, T]$ 时可能上涨而在 $T$ 时超过 $K$. 这会使期权成为价内的. 这时候执行期权而以价格 $K$ 购买标的资产将会获利. 期权的支付将是差价 $S_T - K$. 支付可以

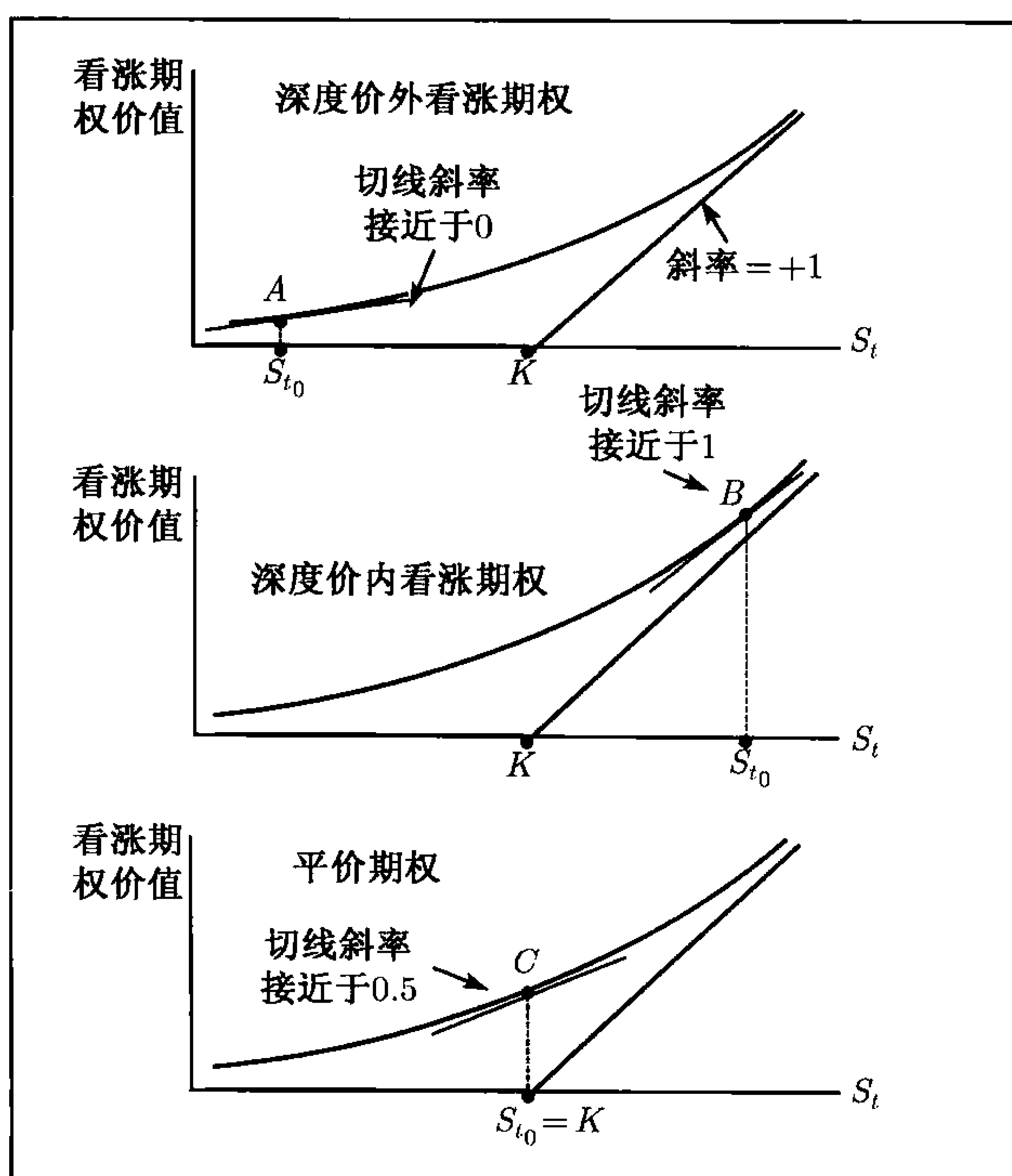



图 8-3

在水平轴上或更明确地在竖直轴上表示出来.[1]因此, 从零售客户的角度来看, 即使在 $S_{t_0}$ 的价格水平上, 价外期权仍然是有价值的, 因为它可能会在以后成为价内的. 期权的方向性解释通常就是建立在这类讨论的基础上.

如果在期权到期时 $S_T = K$, 期权将成为平价的 (ATM), 期权持有者也许选择接收或者不接收标的资产. 但由于交割看涨期权标的资产的费用一般少于在公开市场上购买标的资产的成本, 一些平价期权的持有者更倾向于执行期权.

因此, 我们得到了一个普通欧式看涨期权的典型价格图. $t \in [t_0, T]$ 时的期权价格在图 8-3 里显示为一条光滑的凸曲线, 并且随着接近到期日 $T$, 这条曲线收敛于分段线性的期权支付曲线. 支付曲线和水平轴的竖直距离称为内在价值. 期权价格曲线和到期支付的竖直距离称为期权的时间价值. 注意, 对于固定的 $t$, 时间价值似乎当期权是平价 (即当 $S_t = K$) 时达到最大.

### 8.3.3 图的一些有趣性质

考虑图 8-3 中最上面部分里的 $A$ 点. 这里, 在 $t$ 时, 期权处于深度价外. $S_t$ 接近原点而时间价值接近 0. $A$ 点的切线正斜率只比零稍微大一点. 曲线几乎为线性的且二阶导数非常接近于 0. 这意味着对于 $S_t$ 的微小改变, 切线的斜率将不会变化很大.

现在考虑一下图 8-3 中 $B$ 点处的情形. 这里, 在时间 $t$, 期权处于深度价内. $S_t$ 显著高于执行价. 但是, 时间价值再一次接近于 0. 曲线接近于支付线, 因此斜率接近于 +1. 但是曲线的二阶导数再一次非常接近于 0. 这再一次意味着对于 $S_t$ 的微小改变, 切线的斜率不会变化很大.[2]

第三种情形表示在图 8-3 底部的 $C$ 点处. 假设在 $t$ 点期权是平价的, 就像 $C$ 点表示的一样. 期权的价值完全由时间价值构成. 而且切线的斜率接近于 0.5. 最后, 有趣的是, 期权的曲率在 $C$ 达到最大, 而且如果 $S_t$ 改变一点, 切线的斜率将会发生显著的变化.

这就为我们引出了比较有趣的一个问题. 曲线在一个点的曲率越大, 相应的时间价值似乎就越高. 在两种曲线斜率完全不同的极端情形下, 例如 $A$ 点和 $B$ 点, 期权都有比较小的时间价值. 在这两个点, 曲线的二阶导数都很小. 当曲率达到最大时, 时间价值也最大. 问题是这样的现象会不会是一种巧合.

为了更深入地研究时间价值与曲率的联系, 我们需要估计一下标的资产的波动率. 假设一个做市商通过持有一个期权, 当 $S_t$ 上下波动时能以某种方式产生现金收益. 是不是当其他所有条件一样时, $C(t)$ 的曲率越大, 现金收益就越大? 8.4 节的任务就是说明这确实是真实的情形.

① 通常在图 8-3 中向上倾斜的直线的斜率是 +1, 因此, 沿着竖直轴也反映了在水平轴上的利润 $S_T - K$.
② 即斜率将保持近似等于 1.

## 8.4 作为波动性工具的期权

本节我们将看到当 $S_t$ 上下波动时, 凸度是如何转化为现金收益并创造时间价值的. [1]这里的讨论是在一个高度简化的环境里进行的, 是为了能够更加容易地理解波动性与期权多 (空) 头头寸的利得 (损失) 之间的关系.

考虑一个做市商, 他为一个普通欧式看涨期权 $C(t)$ 报出了两个方向的价格[2], 假设该期权执行价为 $K$, 到期日为 $T$, 标的资产是用 $S_t$ 表示的无红利支付的资产. 设无风险利率 $r$ 是常数. 为简单起见, 考虑一个平价期权, 即 $K = S_t$. 以下先考虑购买了一个期权的做市商采取的初始步骤. 然后, 我们再说明这个做市商如何动态地对冲这个头寸, 从而由 $S_t$ 的波动产生现金收益.

### 8.4.1 初始头寸和对冲

假设这个做市商向一个客户买入一个看涨期权.[3] 图 8-4 顶部表示了做市商的初始头寸. 这是一个标准的*看涨期权多头头寸*. 做市商不是投资者也不是投机者, 而买入这个期权是为了在账簿上持有它, 然后再将它卖给另外一个客户. 因此, 接下来是一些机械的程序. 首先, 做市商需要为这个头寸*筹集资金*; 其次, 他应该*对冲*伴随而来的风险.

我们从第一个要求开始讨论. 不像终端投资者, 做市商从来没有自己的资金. 交易需要*筹资*. 筹资至少有两种方式: 一种是卖空适当的资产来获得所需要的资金, 另一种是直接从货币市场借入资金.[4] 假设选择了第二种, 而且做市商以利率 $r_t = r$ 从货币市场机构借入 $C(t)$ 美元. 图 8-4 的底部显示了将期权和借入资金放在一起的*净头寸*.

现在, 考虑一下头寸面临的风险. 从图 8-4 我们很清楚看出, 由货币市场贷款融资的看涨期权多头头寸是*有风险的*. 如果 $S_t$ 减少, 头寸的价值将减少, 而且在某日持有数倍这样的头寸的做市商将无法承受这样的损失. 做市商必须通过持有能够弥补这种可能损失的另一种头寸来对冲这个风险. 当 $S_t$ 减少时, $S_t$ 的*空头寸*将会获利. 当 $S_t$ 改变了 $\Delta S_t$ 后, 空头寸将改变 $-\Delta S_t$ . 因此, 我们可以考虑运用这个空头寸来进行对冲.

但还有一个隐含的问题. 看涨期权的多头头寸是用曲线来表示的, 而 $S_t$ 的空头头寸用*一条直线*来表示. 这意味着 $C(t)$ 和 $S_t$ 对 $S_t$ 变化的反应可能不相同. 其

① 要强调的是, 这种看待期权的方式是从银行间的角度出发的. 对于终端投资者, 期权仍作为方向性工具, 但是期权的定价和对冲只能从经销商的角度来理解. 下一章将提供有关期权经典用途的应用.

② 记住做市商有义务按照他们的报价买入和卖出期权.

③ 这意味着客户满足了做市商报出的买入价.

④ 做市商也可能会等其他客户出现将期权买走. 做市商有头寸限制, 对于没有关闭的敞口头寸只能操作比较短的时间.

他条件都一样时，如果标的资产的价格改变了 $\Delta S_t$，期权价格将改变①

$$\Delta C(t) \cong C_s \Delta S_t. \tag{11}$$

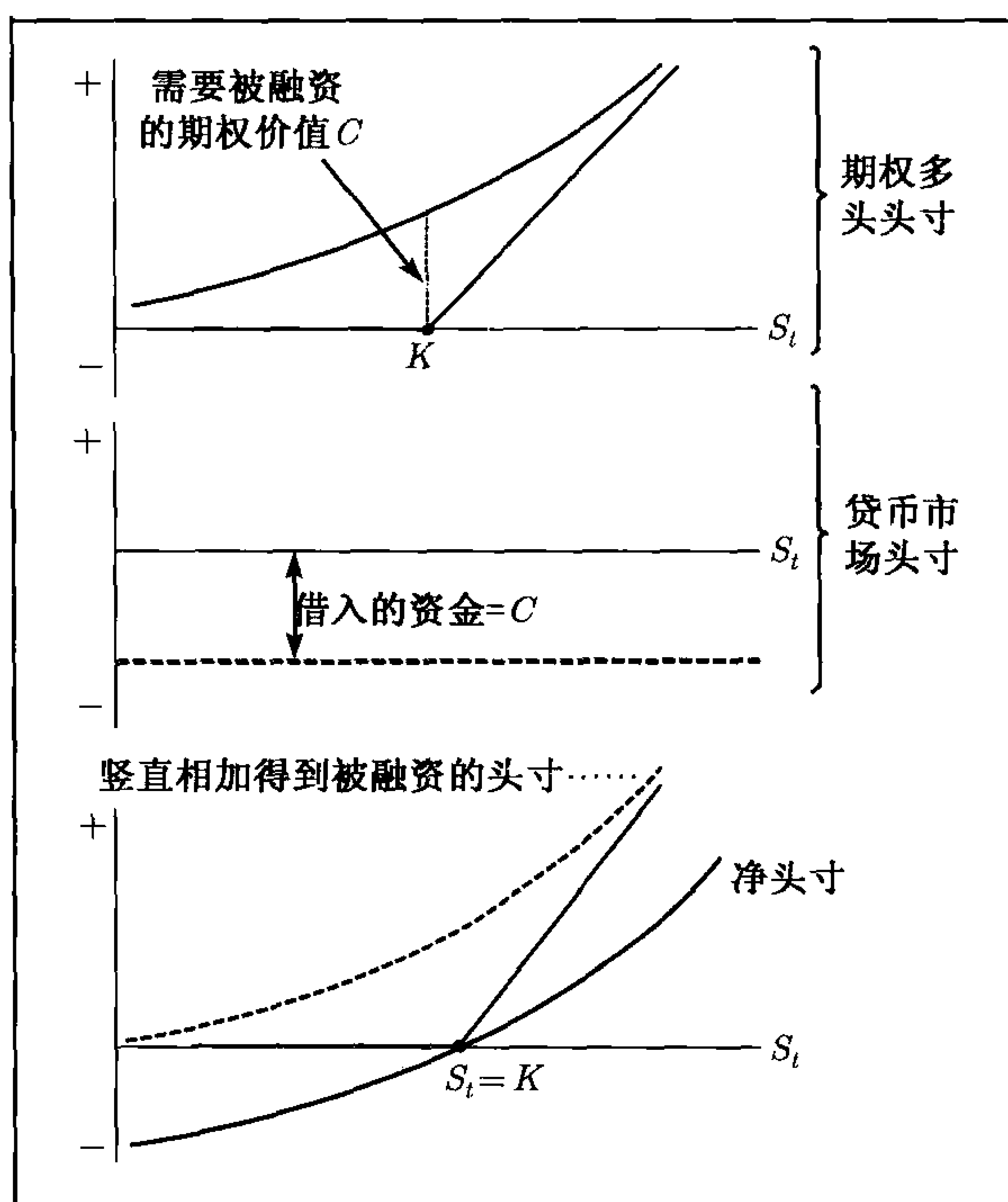



图 8-4

另一方面，空头头寸的改变将等于 $-\Delta S_t$. 实际上，资产组合

$$V_t = \{\text{买入}C(t), \quad \text{卖出}S_t\} \tag{12}$$

对于 $S_t$ 微小变化而产生的净变化，用一阶近似给出来是

$$\Delta V_t \cong C_s \Delta S_t - \Delta S_t \tag{13}$$

$$= (C_s - 1)\Delta S_t < 0, \tag{14}$$

这是因为 $0 < C_s < 1$. 图 8-5 显示了这个头寸. 它仍然是一个有风险的头寸，而有趣的是，风险被倒转了. 这时如果 $S_t$ 增加，做市商将会损失. 实际上，这个头寸等价于用货币市场贷款筹资的一个看跌期权多头头寸.

如何消除由于 $S_t$ 波动带来的风险呢？根据方程 (14)，卖空一单位的 $S_t$ 过分对冲了风险. 做市商不应卖空一单位的 $S_t$ 资产，而应该卖空 $h_t$ 单位的 $S_t$，$h_t$ 的选择

① 由于假设其他条件都一样，$\Delta S_t$ 和 $\Delta C(t)$ 应该用偏微分来解释.

根据下面的公式进行

$$h_t = \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} = C_s. \tag{15}$$

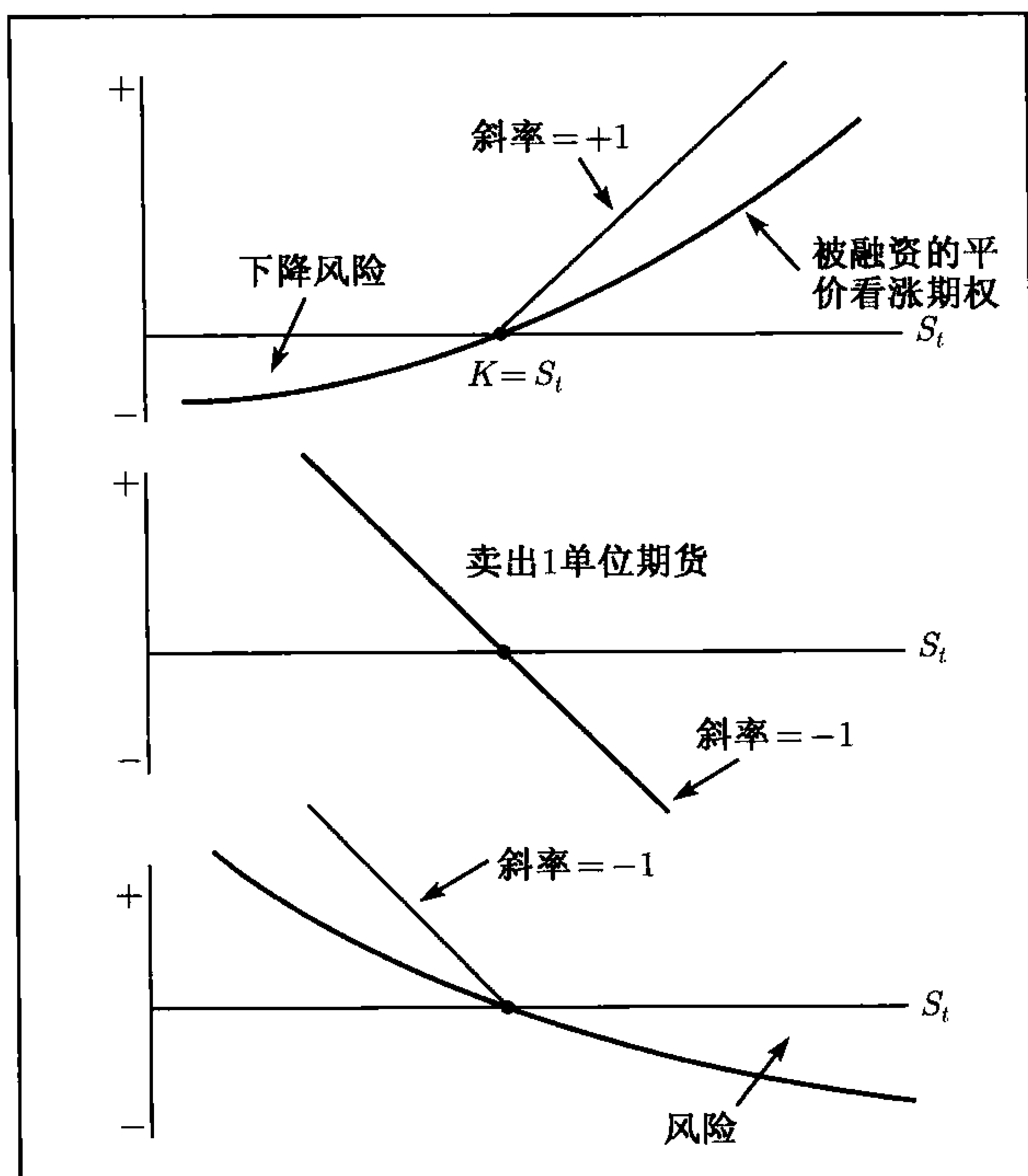



图 8-5

为了说明这样做有效, 我们考虑下面新的资产组合 $V_t$

$$V_t = \{买入一单位C(t), \quad 借入C(t)美元, \quad 卖空C_s单位的S_t\}. \tag{16}$$

其他条件不变时, 如果 $S_t$ 改变了 $\Delta S_t$, 资产组合价值的改变大约是

$$\Delta V_t \cong [C(S_t + \Delta S_t, t) - C(C_t, t)] - C_s \Delta S_t. \tag{17}$$

为了简化这个关系, 我们可以运用 $C(S_t + \Delta S_t, t)$ 在 $S_t$ 点的一阶泰勒级数来近似[①]

$$C(S_t + \Delta S_t, t) = C(S_t, t) + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} \Delta S_t + R, \tag{18}$$

① 设 $f(x)$ 连续, 且关于 $x$ 无穷次可导. $f(x)$ 在 $x_0$ 点的 $k$ 阶泰勒级数由下式近似给出,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k,$$

其中 $f^k(x_0)$ 是 $f(\cdot)$ 的 $k$ 阶导数在 $x = x_0$ 处的值.

这里, $R$ 是余项. 将公式的右边代入方程 (17) 中得到

$$\Delta V_t \cong \left[\frac{\partial C(S_t,t)}{\partial S_t}\Delta S_t + R\right] - C_s\Delta S_t. \tag{19}$$

运用以下定义

$$\frac{\partial C(S_t,t)}{\partial S_t} = C_s, \tag{20}$$

化简后, 变成

$$\Delta V_t \cong R. \tag{21}$$

这就是说, 资产组合对于 $S_t$ 变化的敏感性将是余项 $R$. 这与附录中的 Ito 引理有关. 余项中的最大的一项是

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C(S_t,t)}{\partial S_t^2}(\Delta S_t)^2. \tag{22}$$

由于 $C(t)$ 的二阶偏导数总是正的, 所以受 $S_t$ 变化影响的资产组合的价值总是正的. 图 8-6 的底部说明了这一点. 像这样的一个资产组合称作 delta中性的. 也就是说, 用头寸对于 $S_t$ 变化的一阶敏感性表示的 delta敞口是 0. 注意到讨论中的时间变量 $t$ 假定是常数.

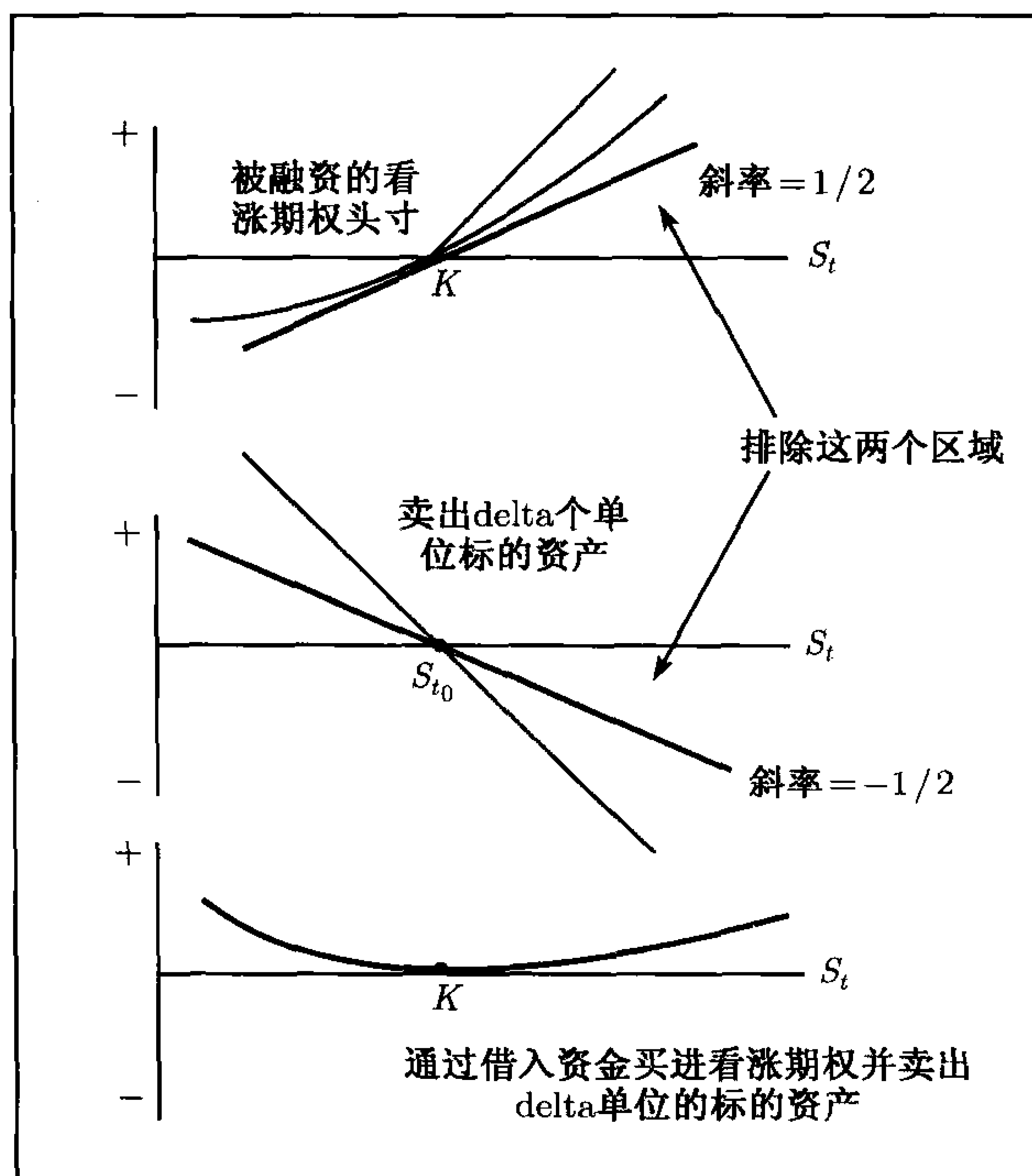



图 8-6

这种为期权建立对冲的方式称作 delta对冲, 而 $h_t$ 称为对冲率. 应该注意, 这个程序随着时间的演化和 $S_t$ 的改变需要持续更新对冲率 $h_t$. 这里的基本思想是用线性工具作为非线性工具的一阶泰勒级数近似. 但是, 泰勒级数的近似是局部的, 而这种近似只在初始点 $S_t$ 的一个适当的邻域有满意的效果. 考虑图 8-7. 当 $S_t$ 从 $A$ 点移动到 $B$ 点, 在 $A$ 点的近似将恶化而需要一个新的近似. 这个新的近似将是在 $B$ 点的切线.

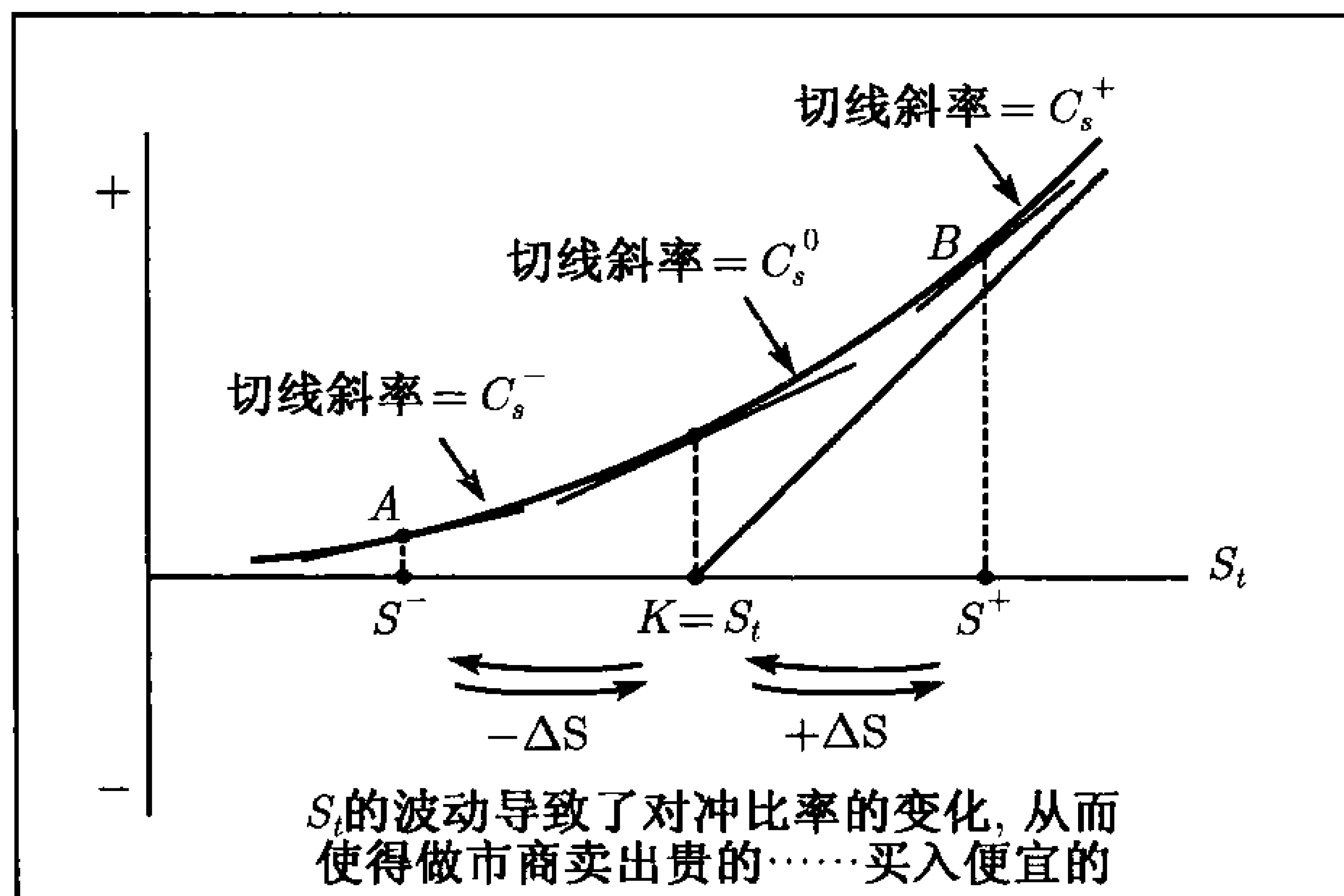



图 8-7

### 8.4.2 对冲的适时调整

我们现在考虑 $S_t$ 波动时, delta 对冲头寸将发生什么样的变化. 根据第 7 章的讨论, 随着时间的推进, 复制资产组合需要重新平衡. 这个平衡过程将产生现金收益.

我们在一个高度简化的环境里来讨论这些资产组合调整. 考虑 $S_t$ 在初始点 $S_{t_0} = S^0$ 附近的一系列简单波动. 令

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n \tag{23}$$

和

$$t_i - t_{i-1} = \Delta \tag{24}$$

代表一系列间隔为 $\Delta$ 个单位时间的时间段. 我们假设 $S_t$ 在初始点 $S_{t_0} = S^0$ 附近按照一个标准方差 $\sigma$ 的年百分比波动. 例如, 一个可能的往返变动是

$$S^0 \to S^0 + \Delta S \to S^0, \tag{25}$$

而 $\Delta S = \sigma S^0 \sqrt{\Delta}$, 波动的百分率将与 $\sqrt{\Delta}$ 成比例. 我们将在这个简化情况下, 讨论维持 delta对冲看涨期权多头头寸的机制.

由于 $S_{t_i}$ 只在三种可能的价值间移动, 为简化记号, 用 $S^-$, $S^0$, $S^+$ 来表示 $S_t$ 可能的价值, 其中①

$$S^+ = S^0 + \Delta S, \tag{27}$$

$$S^- = S^0 - \Delta S. \tag{28}$$

现在说明这些波动如何产生现金收益. 根据图 8-7, 随着 $S_t$ 的波动, $C(S_t, t)$ 的斜率 $C_s$ 也会改变. 忽略时间的影响, 斜率将会在例如 $C_s^+$, $C_s^0$ 和 $C_s^-$ 间改变, 如图 8-7 中所示.② 我们注意到

$$C_s^- < C_s^0 < C_s^+ \tag{29}$$

对于所有的 $t_i$ 成立. 这意味着, 当 $S_t$ 移动时, 对冲率 $h_t$ 也会以特定的方式改变. 为了保持资产组合是 delta 对冲的, 做市商需要调整卖空标的资产 $S_t$ 的数量.

其次, 对冲调整有出人意料的好效果. 当 $S_t$ 移动到 $S^-$ 时, 做市商需要减少$S_t$ 空头头寸的数量. 为了达到这个目的, 做市商需要购回一定比例的原先以高价 $S^0$ 卖出的标的资产.

**相应地, 当价格上涨时, 做市商卖空标的资产, 而当价格下降时, 则购回一部分头寸. 这将产生现金收益.**

现在考虑当价格从 $S^0$ 移动到 $S^+$ 时, 将发生什么. 新的斜率 $C_s^+$ 比 $C_s^0$ 更加陡峭. 这意味着做市商需要在新价格下多卖空一些 $S_t$ 资产. 当 $S_t$ 又回到 $S^0$ 时, 这些多卖空的头寸将以比 $S^+$ 更低的价格 $S^0$ 被购回. 这再一次产生了现金收益.

因此, 当 $S_t$ 在 $S^0$ 附近波动时, 资产组合也要进行相应调整, 而做市商则会自动卖出高价资产和买进低价资产. 在每一个往返变动里, 例如 $\{S^0, S^+, S^0\}$(经历了两个周期), 对冲调整产生的现金收益等于

$$(C_s^+ - C_s^0)[(S^0 + \Delta S) - S^0] = (C_s^+ - C_s^0)\Delta S, \tag{30}$$

这里, $(C_s^+ - C_s^0)$ 代表价格从 $S^0$ 变到 $S^+$ 之后, 需要多卖空的 $S_t$ 资产的数量. 一旦价格又回到$S^0$, 同样数量的资产将以一个较低的价格被购回. 当时间间隔 $\Delta$ 变得越来越小时, 讨论这些交易收益趋向将是一个非常有趣的问题.

**极限形式**

当 $\Delta S \to 0$ 时, 我们可以得出关于交易 (对冲) 收益的一个重要近似

$$(C_s^+ - C_s^0)\Delta S, \tag{31}$$

---

① 我们可以用服从以下概率的三态马尔可夫链来代表这个轨迹:

$$P(S^0|S^+) = 1, \quad P(S^-|S^0) = \frac{1}{2}, \quad P(S^+|S^0) = \frac{1}{2}, \quad P(S^0|S^-) = 1, \tag{26}$$

其中 $S^0$ 是初始点.

② 认识到这点很重要: 这些斜率同样依赖于时间 $t$, 虽然为了简化记号, 我们在这里省略了时间指标.

其中 $(C_s^+ - C_s^0)$ 项是当资产 $S_t$ 从 $S_{t_0}$ 移动到 $S_{t_0} + \Delta S$ 表示的新水平时, $C(S_t, t)$ 一阶偏导数的变化. 我们可以通过乘以 $\Delta S$ 再除 $\Delta S$ 将 $(C_s^+ - C_s^0)$ 转化为变化率

$$(C_s^+ - C_s^0)\Delta S = \frac{C_s^+ - C_s^0}{\Delta S}(\Delta S)^2. \tag{32}$$

令 $\Delta S$ 趋向 0, 得到了以下的近似

$$\frac{C_s^+ - C_s^0}{\Delta S} \to \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}. \tag{33}$$

因此, 公式 (30) 表示, 在一个往返变动里由 delta 对冲调整产生的收益可以近似表示为

$$(C_s^+ - C_s^0)\Delta S \cong \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}(\Delta S)^2. \tag{34}$$

每个时间单位的收益将是上面的一半

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}(\Delta S)^2. \tag{35}$$

这些收益只是做市商面临的潜在现金流入和流出的一部分. 头寸还有更多的潜在现金流需要描述. 我们将在下面两部分讨论.

### 8.4.3 其他现金流

以上只说明了如果做市商用 delta 对冲期权多头寸时, $S_t$ 的波动将产生正的现金流. 这是否隐含着一个套利机会呢? 做市商毕竟没有预付任何现金, 但是只要 $S_t$ 波动看上去似乎就会自发地收到现金. 答案是否定的. 这个策略需要成本, 而且 delta 对冲期权头寸也不是没有风险的.

(1) 做市商通过借钱来为他的头寸筹资. 这意味着, 随着时间的推移, 要承受利息成本. 对于长度为 $\Delta$ 的时间段, 这项成本等于

$$rC\Delta, \tag{36}$$

这里假设即期利率为常数. (我们将 $C(t)$ 写为 $C$)

(2) 期权是有时间价值的, 而且随着时间的推移, 当其他条件不变时, 期权的价值将会按照下面的比率减少

$$C_t = \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t}. \tag{37}$$

对于每个时间段 $\Delta$ 的推移, 期权将损失

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t}\Delta \tag{38}$$

美元.

(3) 最后, 从空头寸收到的现金在每个时间段 $\Delta$ 会产生 $rS_tC_s\Delta$ 美元利息.

交易收益和成本放在一起就可以得到一个重要的*偏微分方程*(PDE), 它在金融工程中起核心作用.

### 8.4.4 表示期权益损的偏微分方程

现在加上每 $\Delta$ 时间内的所有收益和成本. 从对冲调整中获得的每时间单位期权收益是

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C(S_t,t)}{\partial S_t^2}(\Delta S)^2. \tag{39}$$

如果 $S_t$ 是几何过程, 年百分比方差将是常数, 且可以写成 (参见附录)

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2\Delta. \tag{40}$$

以下将继续假设 $\sigma$ 为常数.

借来购买看涨期权的资金利息是按日支付的. 对每个长度为 $\Delta$ 的时间段, 一个看涨期权的持有者将支付

$$rC\Delta. \tag{41}$$

另一进项是由卖空 $C_s$ 个单位 $S_t$ 资产所获现金带来的利息[①]

$$rC_sS_t\Delta, \tag{42}$$

将它们加在一起, 我们得到在 $\Delta$ 时间内对冲看涨期权多头寸获得的净现金收益 (损失)

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2\Delta + rC_sS_t\Delta - rC\Delta. \tag{43}$$

现在, 为了不产生套利机会, 它必须等于每日损失的时间价值

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2\Delta + rC_sS_t\Delta - rC\Delta = -C_t\Delta, \tag{44}$$

消去公共项 $\Delta$, 得到一个非常重要的关系, 它就是读者熟知的 Black-Scholes*偏微分方程*.

每个偏微分方程都有边界条件, 这个方程也不例外. 看涨期权将在时间 $T$ 时执行, 到期日的价值 $C(S_T,T)$ 由下式给出

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2 + rC_sS_t - rC + C_t = 0. \tag{45}$$

求解这个偏微分方程就得到了 Black-Scholes 公式. 在大部分金融教科书里, 这里推导的偏微分方程是通过数学求导得来的. 本节通过实际的交易以及套利的启发性论述获得了同一方程.

① 如果标的资产不能产生货币工具而产生远期合同, 那么将去掉这一项.

### 8.4.5　到期日的现金流

到期日的现金流有三部分: (1) 如果贷款没有在期权有效期内连续归还, 做市商需要支付最初的贷款; (2) 期权最终的交割; (3) $S_t$ 空头寸的最终支付.

在到期日前的一个无限小的时间段 $dt$ 内, 标的资产的价格非常接近 $S_T$, 记它为 $S_T^-$ . 价格曲线 $C(S_t, t)$ 非常接近分段线性的期权支付图. 因此, 对冲率 $h_T^- = C_s$ 非常接近 0 或者 1:

$$h_T^- \cong \begin{cases} 1, & S_T^- > K, \\ 0, & S_T^- < K. \end{cases} \tag{46}$$

这意味着在时间 $T$, 看涨期权多头寸的潜在收益将等于 $S_t$ 空头寸的损失.

有趣的问题是, 在这样的条件下, 做市商如何成功归还最初的贷款呢? 只有一种方式. 唯一能得到的现金就是由 $[t, T]$ 内进行对冲调整而产生的 (净) 交易收益的累积. 只要方程 (45) 对每个 $t_i$ 都满足的话, 被对冲的期权多头寸就能产生刚刚够数的现金来归还贷款. 从这种观点看, 期权的价格就是交易商基于对 $S_t$ 波动率的预期而通过 delta 对冲期权头寸得到的收益和损失的现值之和.

现在讨论一个数值例子, 它说明了实际波动率是如何借助期权头寸转化成现金的.

### 8.4.6　一个例子

考虑一个股票 $S_t$, 当前交易价格为100. 股票不支付红利且已知拥有每年 $\sigma = 45\%$ 的 Black-Scholes 波动率. 无风险利率为 4%且已知 $S_t$ 符合几何过程, 所以 Black-Scholes 假设全部满足.

一个做市商买了 100 个普通的平价且在 5 天后到期的看涨期权. 每个看涨期权的期权费是\$2.13. 这个价格是通过将以上数据带入 Black-Scholes 公式中得到的. 因此, 总的支出现金是\$213, 没有其他的费用或佣金. 做市商借了\$213 来购买看涨期权, 而且立即通过卖空适当数量的标的股票来对冲多头寸.

**例**

假设在这 5 天内, 标的股票按下列路径变动:

$$\{\text{第 1 天} = 100, \text{第 2 天} = 105, \text{第 3 天} = 100, \text{第 4 天} = 105, \text{第 5 天} = 100\} \tag{47}$$

做市商账簿上这些看涨期权产生的现金流, 收益和损失各是什么? 我们将在下面回答这个问题.

(1) **第 1 天: 购买日**

当前 delta: 51(将 Black-Scholes 公式关于 $S_t$ 微分, 代入数据然后乘以 100 得到).

为看涨期权支付的现金: \$213.

为支付看涨期权借入的总额: \$213.

卖空 51 个单位股票产生的总额: \$5 100. 该金额以 4%的利率存入银行.

(2) **第 2 天: 价格变成 105**

当前 delta: 89 (根据 $S_t = 105$, 据到期日还有 3 天求得).

借入资金的利息: $213(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.02.

存款获得的利息: $5\,100(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.57(假设利率没有贷款和存款差).

为了达到 delta 中性而多卖空 38 个单位的股票获得: 38(105)=\$3 990.

(3) **第 3 天: 价格回到 100**

当前 delta: 51.

借入资金利息: $213(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.02.

存款利息: $(5\,100+3\,990)(0.04)(\frac{1}{360})$=\$1.

为了达到 delta 中性, 按价格 100 购回 38 个单位的股票产生的现金: 38(5)=\$190.

这些利润的利息在进行一阶近似时被忽略掉.

(4) **第 4 天: 价格达到 105**

目前 delta: 98.

借入资金的利息: $213(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.02.

存款获得利息: $5\,100(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.57.

为了达到 delta 中性, 按照每个单位价格 105 多卖空 47 个单位的股票获得: 47(105)=\$4 935.

(5) **第 5 天: 到期日 $S_T = 100$**

购回空头寸而产生的净现金流: 47(5)=\$235(有 98 个空头寸, 按照每个单位价格 100 购回. 其中 47 个按照价格 105 卖出, 51 个按照价格 100 卖出).

借入资金利息: $213(0.04)(\frac{1}{360})$=\$0.02.

存款得到的利息: $(5\,100+4\,935)(0.04)(\frac{1}{360})$=\$1.1 期权到期时是价内的, 所以没有产生额外的现金.

(6) **总计**

总支付的利息: 4(0.02)=\$0.08.

总获得的利息: 2(0.57)+1+1.1=\$3.24.

由对冲调整得到的总现金: \$235+\$190.

需要归还贷款的金额: \$213.

忽略利息产生的利息, 总净利润 =\$215.16.

一个更加精确的计算要考虑获得的利息所产生的利息以及\$190 在 2 天内带来的利息.

我们可以解释一下为什么总的利润是正的. 在这个例子里, $S_t$ 的变化路径相当于具有每日 5%的实际波动率. 但是, 期权按照隐含的年波动率 45%来卖, 其隐含

的每日百分比波动率为

$$0.45\sqrt{\frac{1}{365}} = 2.36\%. \tag{48}$$

因此, 在期权的有效期内, $S_t$ 的波动率比隐含波动率要大. 所以, 多的凸头寸就会有净利润.

当然, 这个例子被高度简化了. 它让隐含波动率为常数, 而且波动仅在一个固定点附近发生. 如果放松这些假设, 计算也将改变.

**一些说明**

本节有三个假设使记号和讨论得到简化.

- 第一, 我们考虑在一个*固定点*$S^0$ 附近的波动. 在现实生活中, 波动明显地发生在本身也在变动的点附近. 在这种情况下, 偏导数 $C_s$ 和 $C_{ss}$ 将以更加复杂的方式变化.
- 第二, $C_s$ 和 $C_{ss}$ 也是时间 $t$ 的函数, 随着时间的推进, 将产生其他变化.
- 第三点更重要. 在讨论中, 假定 $\Delta S$ 处的波动保持不变. 而在现实生活中, 波动率将随着时间改变且是随机的. 这一点本质上不会改变我们关于对冲调整收益的讨论, 但是, 它将带来做市商需要进行对冲的*另一种*风险. 这种风险称为 vega 风险.
- 最后, 应该记住在期权的有效期内标的资产没有分红. 如果支付了红利或股息, 则现金收益或损失的计算也要进行相应的调整.

这些假设是用来强调期权作为波动率工具的作用. 后面的章节将讨论如何放松这些假设.

## 8.5　期权工具

可以利用 Black-Scholes 偏微分方程导出一些期权交易商或做市商经常使用的重要工具. 第一个工具就是 Black-Scholes*公式*, 它给出了一个普通的看涨 (看跌) 期权在特定假设下的无套利价格.

第二种工具由希腊字母组成. 这些字母度量了一个期权价格对不同市场参数变化的敏感性. 这些希腊字母在对冲和期权账簿风险管理上非常必要. 它们也可用在定价以及期权策略方面.

第三套工具是市场操作者提出的有关这些理论模型的特别修正. 这些修正使这些理论工具能够更适用于真实世界.

### 8.5.1　求解基本偏微分方程

期权支付的凸度意味着一个套利论述, 即由 $S_t$ 的波动产生的净收益 (损失) 的

期望等于在同一时间段里时间价值的衰减. 这就导致了 Black-Scholes 偏微分方程

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2 + rC_s S_t - rC + C_t = 0, \tag{49}$$

以及边界条件

$$C(T) = \max[S_T - K, 0]. \tag{50}$$

在某些条件下, 偏微分方程可以用分析的方法求解, 从而获得一个**解析公式**. 参见 Duffie(2001). 在我们的情形下, 使用有关 $S_t$ 动态机理的特殊假设, 这个偏微分方程有这样一个解析解. 这个解就是 Black-Scholes 公式的市场基准.

### 8.5.2 Black-Scholes 公式

为了介绍 Black-Scholes 公式, 首先要弄清它的潜在假设. 假设我们考虑一个以股票为标的资产的普通看涨期权. 这个期权在 $T > t$ 时到期, 而且执行价为 $K$. 它是欧式的, 只能在到期日 $T$ 时执行. 用 $S_t$ 表示标的资产的价格, 相关的市场环境有以下特征.

(1) 无风险利率是常数 $r$.

(2) 标的股票的价格动态机理在连续时间情形下由下面随机微分方程 (SDE)①来描述

$$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty), \tag{51}$$

这里 $W_t$ 代表现实世界测度 $P$ 下的 Wiener 过程.②

为了强调上述随机微分方程的重要性, 我们假设 $S_t$ 的动态机理在无限小的时间区间内的**百分比方差**为常数. 但漂移部分 $\mu(S_t)S_t$ 是一般的且有待进一步指定. 使用套利论述可以消去 $\mu(S_t)$, 并在前面方程中用一个无风险瞬时即期率 $r$ 来代替它.

(3) 股票不支付红利, 而且在区间 $[t, T]$ 内没有股份的分割以及其他股东决议.

(4) 最后, 没有任何交易成本和买入一卖出价差.

在这些假设下, 我们可以求解偏微分方程 (49) 和 (51), 从而得到下面的 Black-Scholes 公式

$$C(t) = S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{54}$$

---

① 本章的附录深入讨论了随机微分方程.

② 关于 Wiener 过程的假设意味着

$$E_t[\mathrm{d}W_t] = 0, \tag{52}$$

和

$$E_t[\mathrm{d}W_t]^2 = \mathrm{d}t. \tag{53}$$

这些增量是一列正态分布的随机变量在连续时间情形的等价物. 关于随机微分方程以及 Wiener 过程可以参考例如 Oksendal (2003). Neftci (2000) 也提供了某些结果.

其中 $d_1, d_2$ 等于

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{55}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{56}$$

$N(x)$ 代表标准正态分布的累积函数

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u. \tag{57}$$

在这个公式中, $r, \sigma, T$ 和 $K$ 被看作参数, 因为公式只有在这些参数保持不变时才能表示成这种形式.① 变量是 $S_t$ 和 $t$. 后者在期权的有效期内允许变化.

根据这个公式, 我们可以对

$$C(t) = C(S_t, t | r, \sigma, T, K) \tag{58}$$

关于变量 $S_t$ 和 $t$ 以及关于参数 $r, \sigma, T$ 和 $K$ 求偏导数. 这些偏导数就是希腊字母. 它们代表了期权价格对于变量以及参数微小变化的敏感性.

Black 公式

方程 (54) 的 Black-Scholes 公式是使用 "现金" 标的进行**delta**对冲标情况下基本偏微分方程的解. 正如前面讨论的那样, 由交易收益以及融资成本可获得下面的偏微分方程

$$rC_s S_t - rC + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 S_t^2 = -C_t, \tag{59}$$

边界条件是

$$C(S_T, T) = \max[S_T - K, 0]. \tag{60}$$

当标的资产变成一个远期合约时, $S_t$ 将变成由 $F_t$ 表示的相应远期价格, 而且 Black-Scholes 偏微分方程也需要进行细微的调整.

与现金工具作为标的资产不同, 买卖一个远期合同并不需要资金. 远期多头寸和空头寸只是在未来时间 $T$ 约定买卖, 而不是立即购买标的资产. 因此, 唯一的现金流动将为看涨期权融资的利息成本和由对冲调整产生的现金收益. 这意味着相应的偏微分方程将变为

$$-rC + \frac{1}{2} C_{ss} \sigma^2 F_t^2 = -C_t, \tag{61}$$

① 标的资产的波动率在期权的有效期内必须为常数. 否则的话, 即使推导的原理仍然成立, 公式也将不再成立.

边界条件为

$$C(F_T, T) = \max[F_T - K, 0], \tag{62}$$

这里 $F_t$ 现在是标的资产的远期价格.

这个偏微分方程在欧式期权情形的解由下面的 Black公式给出

$$C(F_t, t)^{Black} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}[F_t N(d_1) - KN(d_2)], \tag{63}$$

其中

$$d_1^{Black} = \frac{\log\frac{F_t}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \tag{64}$$

$$d_2^{Black} = d_1^{Black} - \sigma\sqrt{(T-t)}. \tag{65}$$

Black 公式在许多不能直接应用 Black-Scholes 公式的实际环境下很有用. 例如上限和下限等利率衍生品, 它们是以未来时间才能观测到的 Libor 利率为标的资产. 这样的背景为 Black 公式提供了很好的用武之地. 标的风险是一个远期利率, 比如远期的 Libor 以及由 Black 公式给出的相关期权价格. 但是, 读者应该记得在此前的 Black 公式中, 即期利率被当作了常数. 第 15 章中将放松这一假设.

### 8.5.3 其他公式

Black-Scholes 型的偏微分方程在稍微不同的条件下也可以求出解析解. 这些运算仍给出相似但是包含更多参数和变量的解. 我们考虑两种比较有趣的情形. 第一个例子是选择期权.

1. 选择期权

考虑一个普通的看跌期权 $P(t)$ 和一个普通的看涨期权 $C(t)$, 它们都是以 $S_t$ 为标的资产, 到期日是 $T$. 一个选择期权是给予在未来时间 $T_0$ 从 $C(t)$ 和 $P(t)$ 中进行选择的权利的期权, 它在时间 $T_0(T_0 < T)$ 时的支付是

$$C^h(T_0) = \max[C(S_{T_0}, T_0), P(S_{T_0}, T_0)]. \tag{66}$$

由套利论述可推出下面的等式

$$P(S_{T_0}, T_0) = -(S_{T_0} - K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}) + C(S_{T_0}, T_0), \tag{67}$$

运用这个式子, (66) 式可以写为

$$C^h(T_0) = \max[C(S_{T_0}, T_0) - (S_{T_0} - K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}) + C(S_{T_0}, T_0)], \tag{68}$$

或者提出公共项后得

$$C^h(T_0) = C(S_{T_0}, T_0) + \max[-(S_{T_0} - K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}), 0]. \tag{69}$$

换句话说, 选择期权的支付要么等于 $T_0$ 时看涨期权的价值, 要么当下面的情形发生时等于它再加上一个正的增量

$$(S_{T_0} - K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}) < 0. \tag{70}$$

但是, 这等于一个执行价为 $K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}$, 到期日为 $T_0$ 的看跌期权的支付. 因此, 选择期权的定价公式由下式给出

$$\begin{aligned} C^h(t) = &[S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2)] \\ &+[-S_t N(-\bar{d}_1) + K\mathrm{e}^{-r(T-T_0)}\mathrm{e}^{-r(T_0-t)} N(-\bar{d}_2)]. \end{aligned} \tag{71}$$

简化为

$$C^h(t) = [S_t(N(d_1) - N(-\bar{d}_1))] + K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(N(-\bar{d}_2) - N(d_2)), \tag{72}$$

其中

$$d_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \tag{73}$$

$$\bar{d}_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r(T-t) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T_0-t)\right)}{\sigma\sqrt{(T_0-t)}}. \tag{74}$$

一个更加有趣的例子是 Black-Scholes 方法在障碍期权中的应用, 我们将考虑这种应用.

2. **障碍期权**

障碍期权将在第 9 章仔细讨论. 这里我们只定义这些工具, 解释在某些简化假设下伴随这些工具的解析公式. 到此我们将结束关于 Black-Scholes 型公式应用的讨论.

考虑一个普通欧式看涨期权, 以 $S_t$ 作为标的资产, 执行价为 $K$, 到期日是 $T$, $t < T$. 假设 $S_t$ 满足所有的 Black-Scholes 假设. 考虑一个**障碍**$H$, 在时间 $t$ 有 $H < S_t < K$. 假设我们缔结了一个合同, 规定在期权的有效期 $[t,T]$ 内, 如果 $S_t$ 低于障碍水平 $H$, 期权将不存在, 期权的卖方将不再承担更多责任. 换句话说, 只要 $H < S_u, u \in [t,T]$, 普通期权有效, 但是 $S_u$ 低于 $H$, 期权就失效. 这就是**障碍期权**——确切地说是**下敲出**障碍期权. 图 8-8a 中给出了两个例子.

下敲出障碍看涨期权的定价公式由下式给出

$$C^b(t) = C(t) - J(t), \tag{75}$$

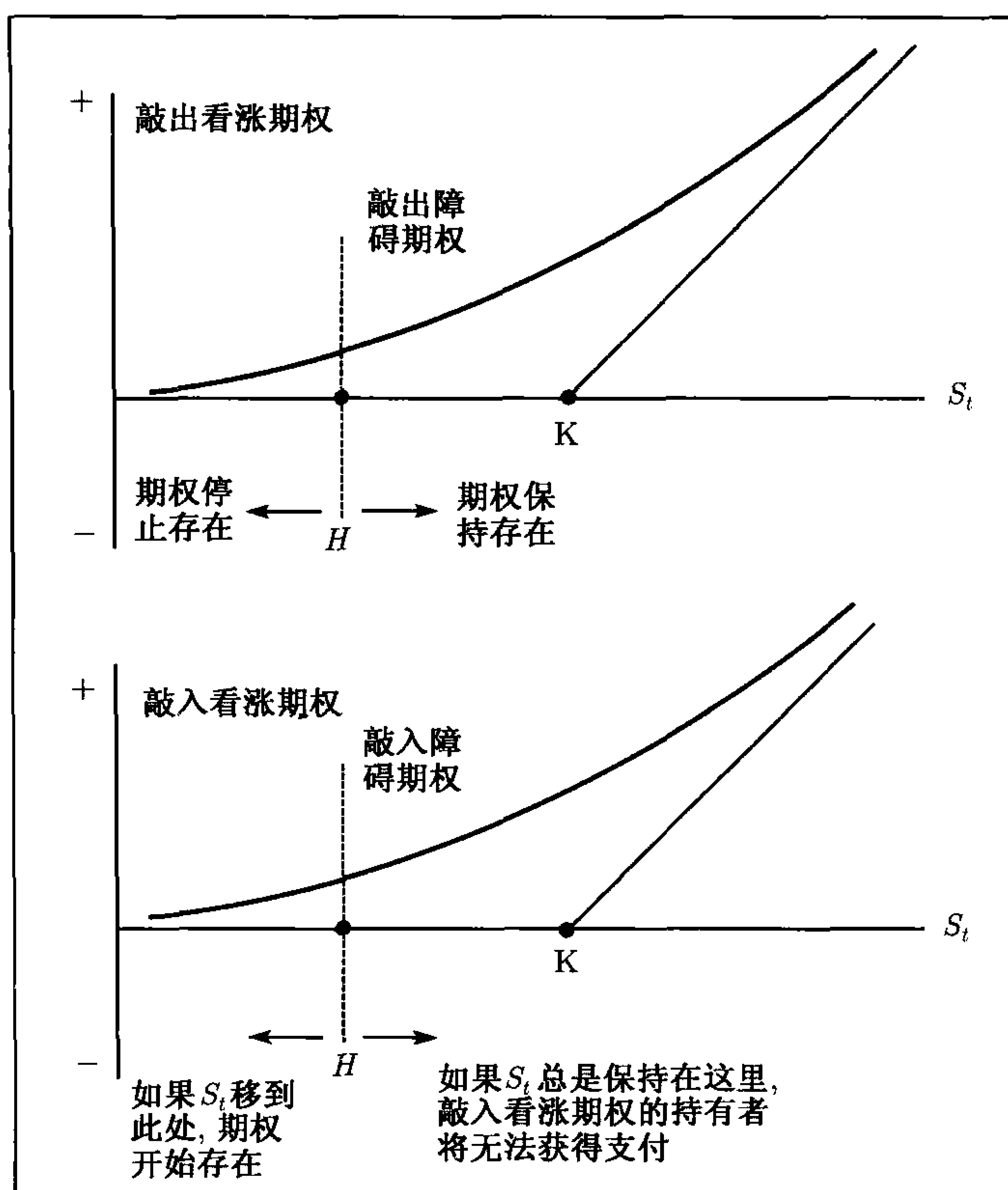



图 8-8a

这里 $C(t)$ 是普通看涨期权的价值, 由标准的 Black-Scholes 公式给出, 而 $J(t)$ 应用在时间段 $[t,T]$, $S_t$ 低于 $H$ 时期权可能失效上的折扣. 参考图 8-8b. $J(t)$ 的公式由下式给出

$$J(t) = S_t \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}+2} N(c_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} N(c_2), \tag{76}$$

这里

$$c_{1,2} = \frac{\log\frac{H^2}{S_tK} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{77}$$

非常有趣的是, 当 $S_t$ 到达障碍时

$$S_t = H, \tag{78}$$

$J(t)$ 的公式将变成

$$J(t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2). \tag{79}$$

这就是说, $C^b(t)$ 的价值为 0:

$$C^b(t) = C(t) - C(t). \tag{80}$$

障碍期权作为一个标准期权加上或者减去一个折扣项, 这个特性从金融工程的角度看非常有用. 在第 9 章里, 我们将得到有关障碍期权的一些简单的合同方程, 而且折扣的使用在推导其他障碍期权的 Black-Scholes 型公式时非常有用.

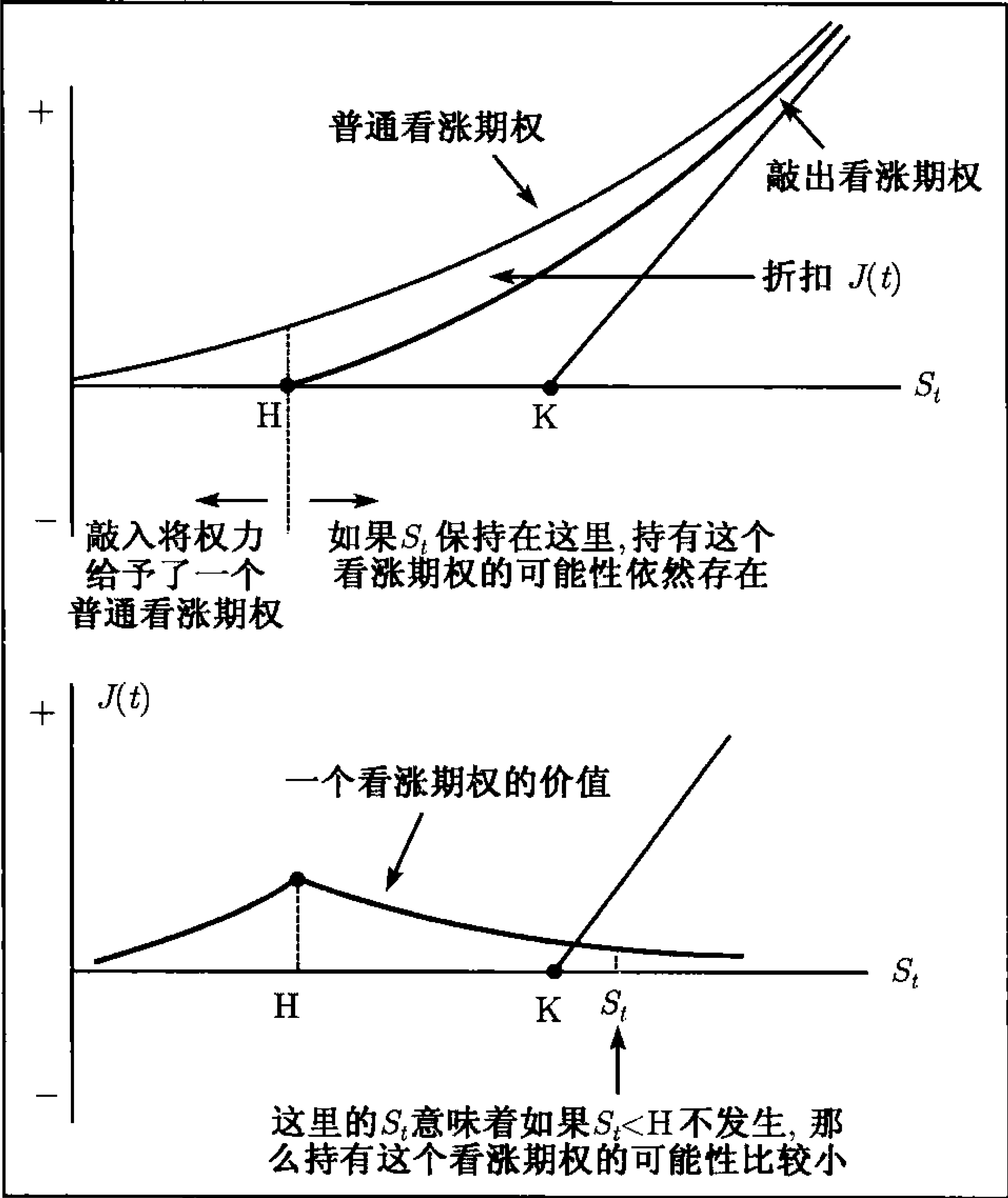



图　8-8b

### 8.5.4　Black-Scholes 型公式的使用

显然, 隐含在 Black-Scholes 公式推导中的假设是相当严格的. 这一点从本书介绍期权的方式上看更加清楚. 特别地, 如果期权被用来对波动率的方向进行打赌, 那么波动率百分比为常数的假设如何能够成立? 这个话题将在后面的章节里深入讨论, 那里详细阐明了市场专家在交易波动率时是如何使用 Black-Scholes 公式的.

当标的资产是一个利率工具或者外汇时, 某些 Black-Scholes 假设不再合理.[①] 但是, 如果放松这些假设, 那么用推导 Black-Scholes 公式的原理所推出的偏微分方

① 例如, 一个外汇支付外币利息, 就像标的股票支付红利.

程可能不存在解析解.

因此, 一个市场操作者可能想使用 Black-Scholes 公式或它的一些变体, 然后对它进行某些人为但实用的调整. 这可能比试图推导新的适应更加现实假设的复杂公式要可取. 同样, 即使隐含假设改变, Black-Scholes 公式不成立时, 仍像假设成立那样进行推导, 得出的结果具有令人惊讶的稳健性①. 我们将会看到当交易员对期权的波动参数 (与期权的价值特性有关) 进行调整时, 就会出现这种情形.

这就完成了我们关于期权分析中必不可少的第一套工具的简单讨论, 它在某些严格的假设条件下给出期权无套利价格的 Black-Scholes 型解析公式. 下面, 我们将讨论交易商和做市商经常使用的第二套工具, 即称为*希腊字母*的各种敏感性因子.

## 8.6 希腊字母和它们的用途

Black-Scholes 公式给出了一个普通看涨 (看跌) 期权在一些特定假设下的价值. 很明显, 这对于计算一个期权的无套利价值是有用的. 但是, 一个金融工程师需要某种方法来确定当公式中的变量或者参数随市场环境改变时, 期权费 $C(t)$ 是如何变化的. 由于推导 Black-Scholes 公式时使用的假设是不现实的, 所以这一点非常重要. 交易商, 做市商或者风险管理者必须不断地监控他们的期权账簿对于 $S_t, r, t$ 或者 $\sigma$ 变化的敏感性.

**例**

*$\sigma$ 变化情形是一个很好的例子. 我们假设期权头寸本质上 (不是完全地) 是波动率头寸. 很显然波动率并不像 Black-Scholes 世界里假设的那样总是常数. 一旦期权被购买和 delta 对冲, 对冲率 $C_s$ 和 $C_{ss}$ 都依赖于波动率参数 $\sigma$ 的变化.*

*因此, 对冲后的期权头寸在许多方面仍然是有风险的. 例如, 根据 $\sigma$ 和 $S_t$ 的变化影响 $C_{ss}$ 的方式, 做市商可能在他对 $S_t$ 的波动预测上是正确的, 但是, 也可能仍然在期权的多头寸上受到损失.*

进一步的问题是期权的敏感性对于不同执行价 $K$ 或到期日 $T$ 可能并不一致. 对于同一标的资产的期权, $K$ 和 $T$ 的差别将分别导致所谓的*微笑效应*和*期限结构效应*, 所以应该仔细考虑.

期权敏感性参数在期权术语里被称作希腊字母. 我们接下来将讨论它们并且给出一些实用的例子.

### 8.6.1 delta

考虑 Black-Scholes 公式 $C(S_t, t|r, \sigma, T, K)$. 如果标的资产价格 $S_t$ 变化了一个无穷小量, 那么理论价格将改变多少呢?

① 可以参考 El-Karoui 等人的书.

这个问题的一个理论解由函数关于 $S_t$ 的偏导数给出. 定义它为时间 $t$ 时的 delta:

$$\text{delta} = \frac{\partial C(S_t, t|r, \sigma, T, K)}{\partial S_t}. \tag{81}$$

这个偏导数前面曾用 $C_s$ 表示. 注意到 delta 只是期权价格对于 $S_t$ 的一个无穷小变化的局部敏感性, 这就是为什么使用偏导数记号的原因.

为了从图中得到一些直观感受, 记住一个看涨期权的价格曲线在标准的 $C(t)$, $S_t$ 空间有一个向上倾斜的斜率. 作为这条曲线切线的斜率, 一个看涨 (看跌) 期权的 delta 总是正的 (负的). 如图 8-9 所示. 这里, 我们考虑用 $S_A, S_B$ 和 $S_C$ 代表标的资产价格的三个结果从而在期权价格曲线上得到三个点 $A, B$ 和 $C$. 在每一个点, 可以画出一条切线. 这条切线的斜率对应于各自价格的 delta.

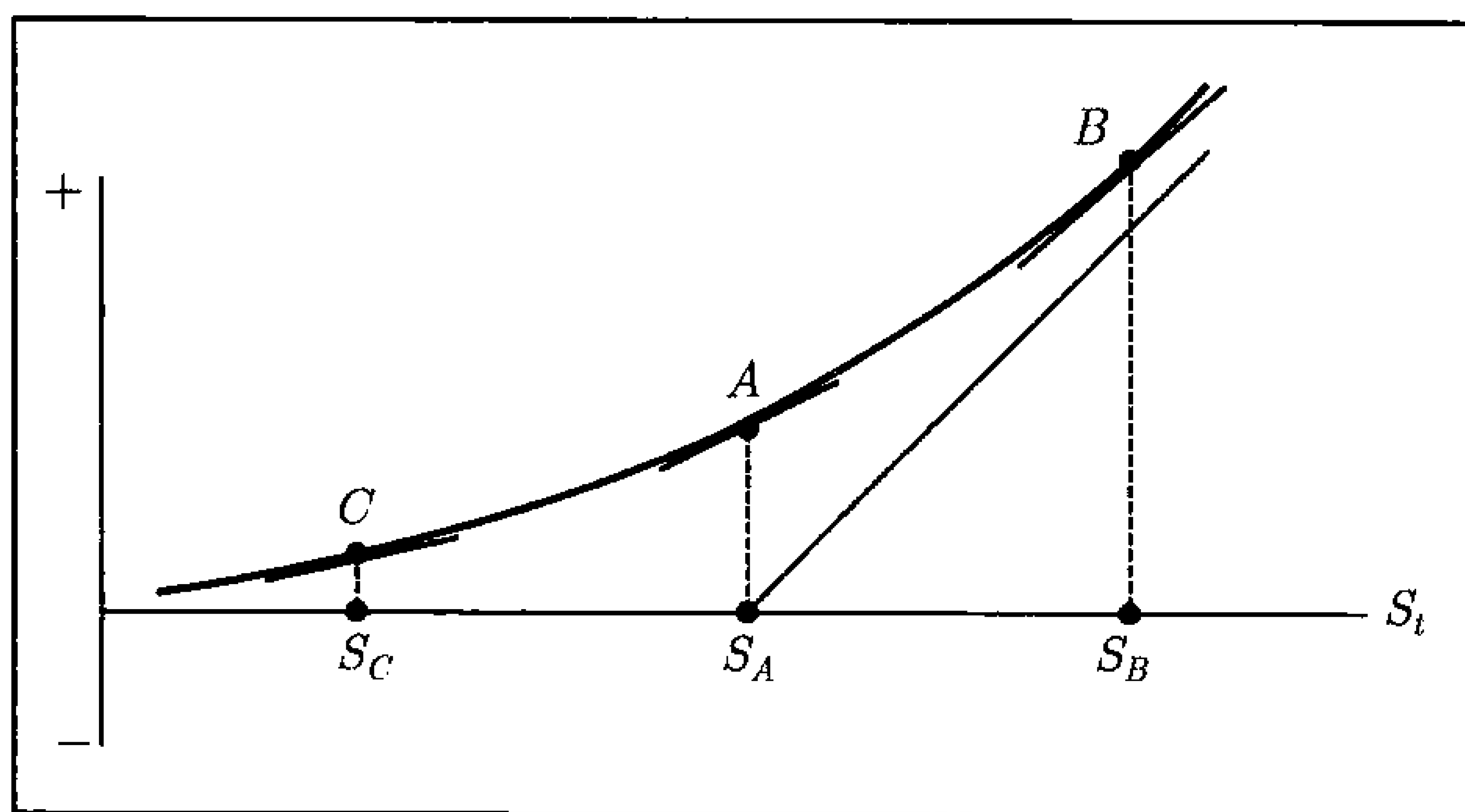



图 8-9

- 在 $C$ 点, 因为当 $S_t$ 下降时曲线接近于水平轴, 斜率也即 delta 接近于 0.
- 在 $B$ 点, 因为曲线接近于斜率为 1 的直线, delta 接近于 1.
- 在 $A$ 点, delta 在 "中间", 而且切线斜率在 0 和 1 之间.

因此, 在看涨期权多头寸的情形下总有 $0 < \text{delta} < 1$. 像此前提到的那样, 当期权是平价 (ATM) 时, delta 接近于 0.5.

1. 惯例

市场专业人士不喜欢使用小数点. 期权市场上的惯例考虑的不是交易 1 个而是 100 个期权, 这使得期权头寸的 delta 可以用 0~100 的整数来叙述. 根据这个惯例, 一个平价期权的 delta 大约是 50. 一个 25 delta 的期权将是价外的, 而一个 75 delta 的期权将是价内的. 尤其是在外汇市场上, 交易员使用这种术语来买卖期权.

在上述条件下, 一个期权交易员可以利用 delta 点来估计他的敞口. 一个交易员可以是 delta 多头, 这意味着如果标的资产价格上涨, 头寸将获利; 而如果标的资产价格下降, 头寸就会损失. 一个 delta空头寸隐含着相反的结果.

2. 确切表达式

当看涨期权是欧式的, 且价格由 Black-Scholes 公式给出时, 可以在方程 (81) 中求偏导数, 从而得到此特殊情形的 delta

$$\frac{\partial C(S_t,t|r,\sigma,T,K)}{\partial S_t}=\int_{-\infty}^{\frac{(T-t)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\log(S_t/K)}{\sqrt{(T-t)}\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \tag{82}$$

$$=N(d_1)$$

本章附录里概述了推导过程. 它说明 delta 本身也是关于变量 $S_t$, $K,r,\sigma$ 和期权剩余寿命的函数. 这个函数是概率的形式. delta 介于 0 和 1 之间, 而且函数有我们熟悉的连续型分布函数的 $S$ 形状. 这意味着 delta 关于 $S_t$ 的导数 (称作 gamma) 将有概率密度函数的形状.[①] 因此一个典型的 delta 看起来将是图 8-10 所示的 $S$ 形曲线.

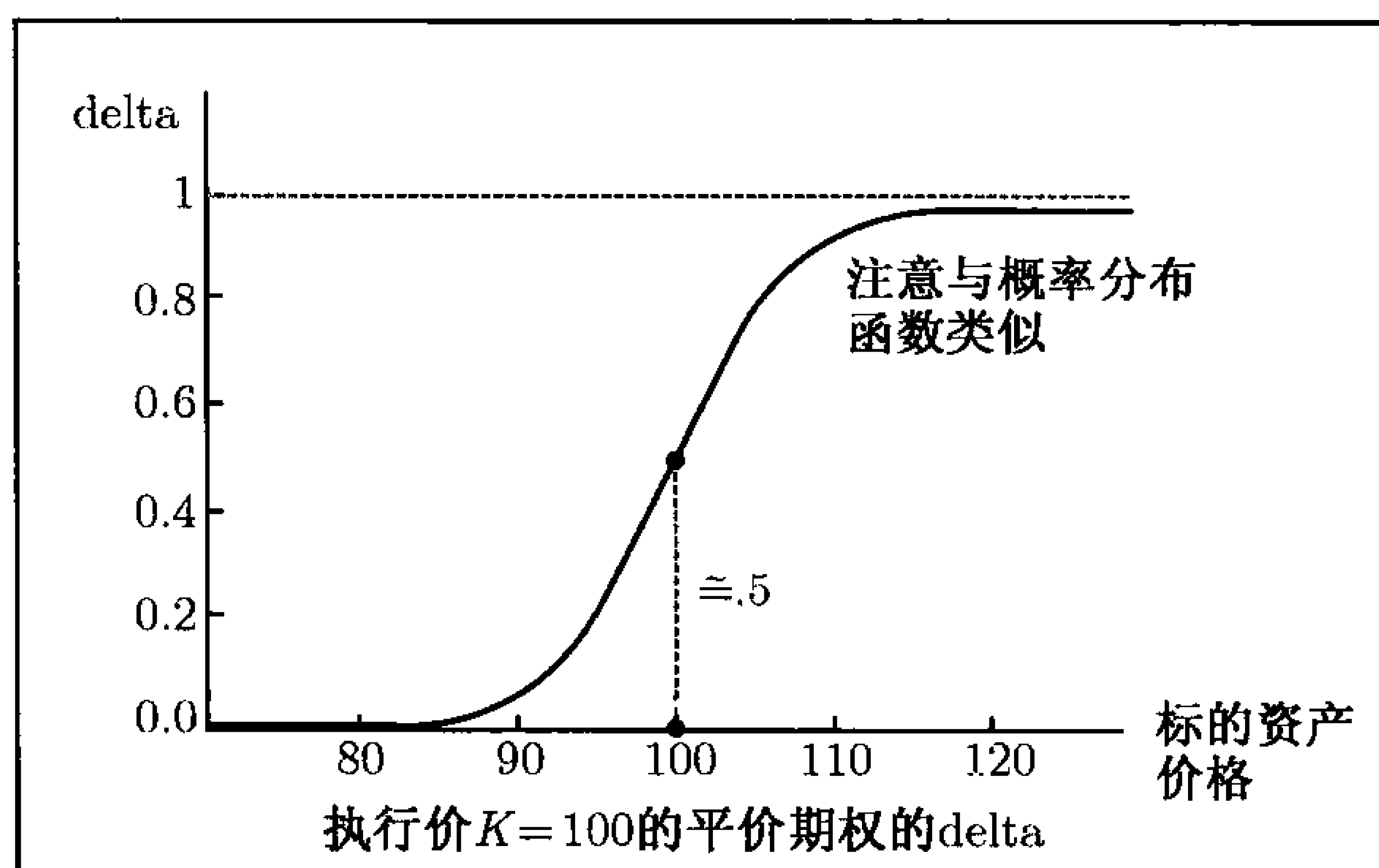



图 8-10

从这个公式还可以看出市场变量的不同变化如何影响特定期权的敏感性. 这个公式表明, 凡是使下面这个比率

$$\frac{\log(S_t/K)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{83}$$

增加的量都能使 delta 增加; 凡是使这个比率减少的量都能使 delta 减少.

例如, 当 $r$ 增加时, delta 将增加. 另一方面, 期权的价值特性可由下面的比率定义

$$\frac{S_t}{K}, \tag{84}$$

① 一些交易员使用个别期权的 delta 就像它是价内的概率一样. 这可能有误导.

它的减少将使 delta 减少. 波动率变化的影响更加不确定, 而且依赖于期权的价值特性.

**例**

我们计算一些特定期权的 delta. 首先假设是在 Black-Scholes 世界中, 即使我们操作的相关市场可能会违背一部分 Black-Scholes 假设. 例如, 我们假定标的资产的红利收益为 0, 但是在现实生活情形下, 这个假设可能不满足. 其次, 我们将下面的 $C(t)$ 函数关于 $S_t$ 求导

$$C(t) = S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2), \tag{85}$$

这里的 $d_1$ 和 $d_2$ 由等式 (55)~(56) 给出, 然后, 代入 $S_t, K, r, \sigma, (T-t)$ 的观测值.

假定本章第一个例子的表中所示微软 12 月份看涨和看跌期权价格满足这些假设. 基于下列参数值可以计算出 delta

$$S_t = 61.15, \quad r = 0.025, \quad \sigma = 30.7\%, \quad T-t = 58/365, \tag{86}$$

这里, $\sigma$ 是当 $K = 60$ 时求解下面方程而得到的隐含波动率.

$$C(61.15, 60, 0.025, 58/365, \sigma) = \text{观察价格} \tag{87}$$

| 看涨期权 | delta |
|---|---|
| 12 月 55.00 | 0.82 |
| 12 月 60.00 | 0.59 |
| 12 月 65.00 | 0.34 |
| 12 月 70.00 | 0.16 |
| 看跌期权 | delta |
| 12 月 55.00 | −0.17 |
| 12 月 60.00 | −0.40 |
| 12 月 65.00 | −0.65 |
| 12 月 70.00 | −0.84 |

将观测数据带入 delta 公式中得到了左列值:

我们可以获得以下观测结果:

(1) 平价看涨和看跌期权有同样的价格;

(2) 但是它们的 delta 不同;

(3) 距离平价同样远的看涨和看跌期权, 它们 delta 的绝对值差别很小.

根据最后一点, 如果我们考虑 25 delta 的看涨和看跌期权, 他们则不完全一样.[①]

现在指出在我们的例子中使用的一些有问题的假设. 首先, 在计算不同执行价的 delta 时, 我们总是使用同样的波动率参数 $\sigma$. 这不是一个小问题. 其他所有方面都一样, 只有执行价 $K$ 不同的期权可能会有不同的隐含波动率, 也可能会有波动率微笑. 运用平价时隐含波动率计算所有期权的 delta 可能是不正确的. 其次, 我们假设了一个零红利收益, 这也不是真实的. 通常, 股票拥有正的红利收益期望, 而且在计算期权价格和相关希腊字母时应该作出一些修正. 这么做的一个粗略方法是算出一个百分比的年红利收益期望, 然后从无风险利率 $r$ 中减去它.

① 我们忽略芝加哥期权交易所里这些股票期权均是美式的这一事实.

### 8.6.2 gamma

gamma 代表当标的风险 $S_t$ 改变时, delta 的变化率. delta 的改变在确定一个普通期权的价格时发挥着重要作用. 因此, gamma 是另一个重要的希腊字母. 它由 $C(S_t, t)$ 对 $S_t$ 求二阶偏导数给出:

$$\text{gamma} = \frac{\partial^2 C(S_t, t|r, \sigma, T, K)}{\partial S_t^2}. \tag{88}$$

很容易得出在欧式看涨期权情形下 gamma 的精确表达. 附录中的推导得出了下面的表达式:

$$\frac{\partial^2 C(S_t, t|r, \sigma, T, K)}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left( \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \right], \tag{89}$$

gamma 表示当 $S_t$ 改变时, delta 对冲应该调整多少. 图 8-11 显示了 Black-Scholes 公式的 gamma. 我们看到了已经提到过的性质. 当期权是平价时, gamma 达到最大, 而当期权变为深度价内或者深度价外时 gamma 接近于 0.

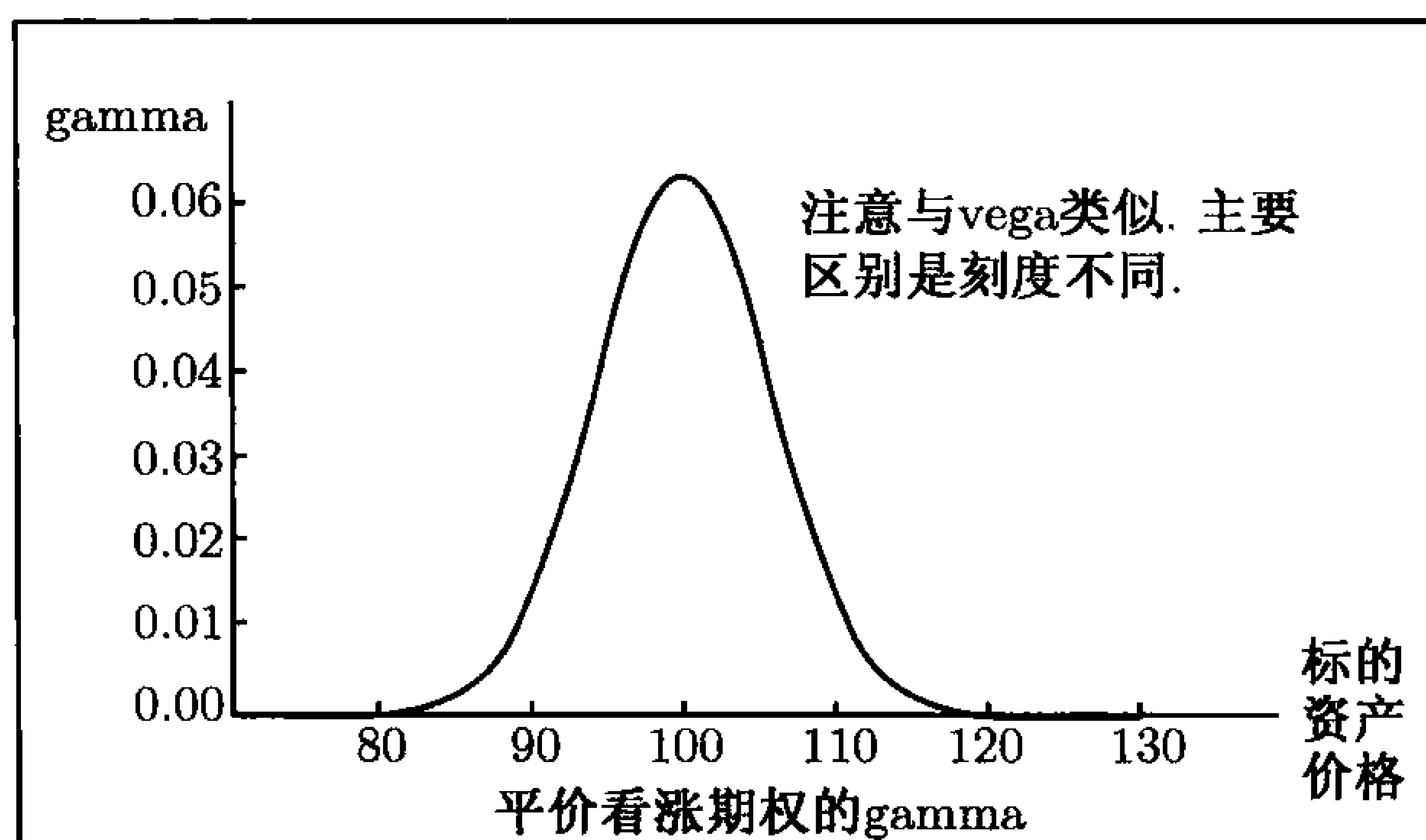



图 8-11

可以从 gamma 曲线的形状得到一些直观感受. 首先, 记住, gamma 实际上是 delta 关于 $S_t$ 的导数; 其次, 记住 delta 本身具有正态分布累积函数的形状. 这意味着 gamma 的形状将与连续的钟形状的概率密度函数形状非常相似, 就像表达式 (89) 所示的一样.

现在考虑一个有关 gamma 计算的数值例子. 我们使用本章前面曾用过的数据.

**例**

为了计算 gamma, 我们可以使用本章第一个例子里的表格. 求出 delta 关于 $S_t$ 的偏导数. 这给出了一个关于 $S_t, K, r, \sigma, (T-t)$ 的新函数, 它度量了 delta 关于标

的资产 $S_t$ 的敏感性. 然后用观测值来代换 $S_t, K, r, \sigma, (T-t)$ 从而得出在那个特定点上的 gamma 值.

对于表中所示的微软 12 月份看涨期权和看跌期权, gamma 可以基于下列参数值计算出

$$S_t = 60.0, \quad r = 0.025, \quad \sigma = 0.31\%, \quad T - t = 58/365, \quad k = 60, \tag{90}$$

这里 $\sigma$ 代表隐含波动率.

我们再一次使用了对应平价期权的隐含波动率来计算所有期权 (包括价内和价外) 的 delta 值.

| 看涨期权 | gamma |
|---|---|
| 12 月 55.00 | 0.034 |
| 12 月 60.00 | 0.053 |
| 12 月 65.00 | 0.050 |
| 12 月 70.00 | 0.032 |
| **看跌期权** | **delta** |
| 12 月 55.00 | 0.034 |
| 12 月 60.00 | 0.053 |
| 12 月 65.00 | 0.050 |
| 12 月 70.00 | 0.032 |

将观测值代入到 gamma 公式中得到了左列值:

可以得出下列观测结果:

(1) 与平价期权执行价有不同距离的看涨期权和看跌期权具有相似但不完全对称的 gamma 值;

(2) 当做市商是期权多头时, gamma 是正的, 否则, 它是负的.

从表中可以清楚地看出当我们处理的是平价期权时, gamma 达到最大.

最后, 我们应该提到, 随着时间的推移, 由于 gamma 函数变得更尖而尾部将趋近于 0, 平价期权的二阶曲率将增加.

### 市场用途

必须评价一下 gamma 在期权交易中发挥的作用. 我们已经看到 delta 多头寸的敞口可以用卖空标的资产来对冲. 但是, gamma敞口要如何对冲呢? 交易员发现有时这相当困难. 尤其是在非常短期内, 深度价外期权的 gamma 可以突然从 0 变到非常高的值, 从而导致相当大的损失 (或收益).

**例**

上周外汇期权市场里英镑/欧元的 gamma 空头寸遭受了损失. 上周末英镑的即期利率突然从 0.674 2 升到 0.697 3, 月波动率从 9.6%上升到 13.3%. 这个变化趋势迫使参与者购回他们的 gamma 头寸. (一个市场摘录)

这个例子说明市场专业人士使用 delta 和 gamma 的一种方式. 尤其是在外汇市场上, 具有不同价值特性特征的期权是根据它们的 delta 来分类的. 例如, 考虑 25 delta 先令看跌期权. 如果一个平价看跌期权的 delta 大约是 50, 这些看跌期权都是价外的. 做市商已经卖出这样的期权, 而且在对冲了 delta 敞口后持有 gamma

的空头寸. 这意味着, 随着先令/欧元汇率的波动, 对冲调整导致了高于期望的现金流出.

### 8.6.3 vega

另一个重要的希腊字母是 vega. 如果波动率参数 $\sigma$ 变化了一个无穷小量, 期权的价值将改变多少? 这个问题与期权关于隐含波动率变化的敏感性有关. vega 通过对价格函数对 $\sigma$ 求导得出:

$$\text{vega} = \frac{\partial C(S_t, t|r, \sigma, T, K)}{\partial \sigma}. \tag{91}$$

图 8-12 用看涨期权的 vega 作为 vega 的一个例子. 注意到它与此前图 8-11 里显示的 gamma 图线相似. 根据该图, 当期权是平价时, vega 达到最大. 这意味着如果使用平价期权作为从 $S_t$ 的波动中受益的工具, 我们也将具有隐含波动率变动的最大敞口. 考虑一些用真实数据计算 vega 的例子.

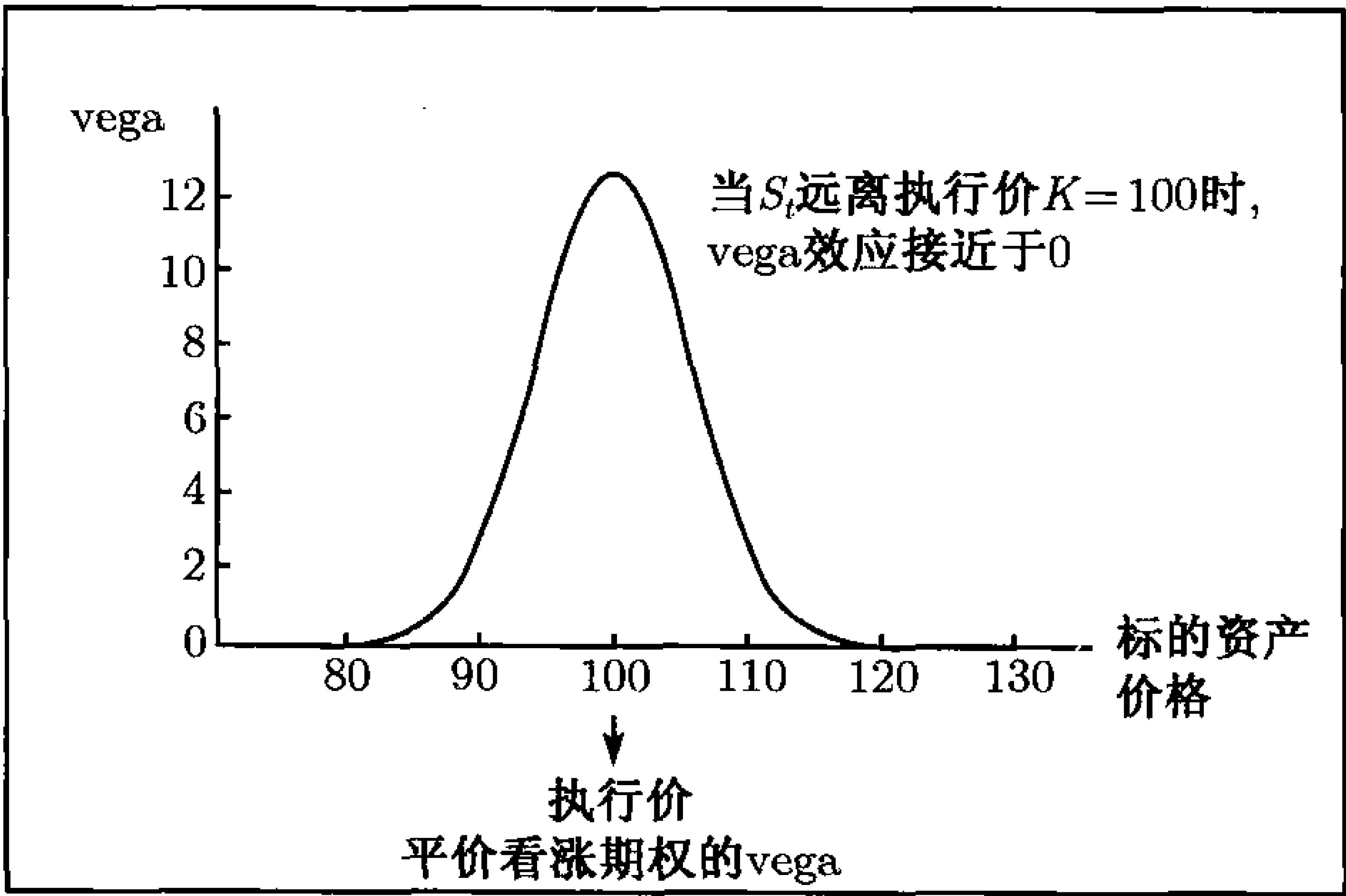



图 8-12

**例**

vega 是对期权百分比波动率参数 $\sigma$ 的敏感性. 根据惯例, 这是用 Black-Scholes 公式计算出的. 我们可以将该公式对波动率参数 $\sigma$ 进行求导. 求出导数然后代换

$$C(61.15, 0.025, 60, 58/365, \sigma) = \text{观察价格}, \tag{92}$$

我们得到了期权价格对 $\sigma$ 微小变动反应的度量.

由右面的表格, 我们得到了右列结果.

| 看涨期权 | vega($) |
|---|---|
| 12 月 55.00 | 6.02 |
| 12 月 60.00 | 9.4 |
| 12 月 65.00 | 8.9 |
| 12 月 70.00 | 5.6 |
| **看跌期权** | **delta** |
| 12 月 55.00 | 6.02 |
| 12 月 60.00 | 9.4 |
| 12 月 65.00 | 8.9 |
| 12 月 70.00 | 5.6 |

由此得出以下评论:

(1) 平价期权有最大的 vega 值;

(2) 随着隐含波动率的增加, 平价期权的 vega 在边际上发生改变, 而价外和价内期权的 vega 也在同一方向上发生改变.

期权交易员在隐含波动率改变了某一设定量的情形下, 可以利用 vega 来计算新的期权价格. 例如, 在前面的例子里, 如果隐含波动率增加了 2 个百分点, 其他条件不变, 那么 12 月份 60 看跌期权的价值大约增加 0.19.

1. 市场应用

vega 允许市场专业人士跟踪他们的敞口对隐含波动率的变化. 这一点很重要, 因为 Black-Scholes 公式是在假设波动率为常数的情况下推导出来的, 但却要在波动率参数 $\sigma$ 变化的环境里使用. 做市商通常对 $\sigma$ 直接报价, 而不是报出期权的 Black-Scholes 价值. 在这些条件下, vega 可以用来追踪期权账簿敞口对于 $\sigma$ 的变化. 用 vega 对冲就可以实现这一点.

下面是交易员使用 vega 的一个例子.

**例**

投机者上周在现货市场上倾销美元/日元波动率, 导致波动率大幅下跌. 一个投机者在一份 6 个月的美元/日元期权合约中卖出 10 亿美元. 这些交易的缔结是用来对冲 vega 敞口的. 波动率的下跌迫使做市商对冲他们此前卖出的奇异产品交易.

根据这段材料, 一些操作者是波动率的多头. 他们在美元/日元汇率波动率非常高时买入期权, 面临着 vega风险. 如果隐含波动率下降, 他们的头寸将发生损失, 损失的速度取决于头寸的 vega. 为了消除这些风险头寸, 他们卖出波动率, 从而导致后者的进一步下跌. vega 的大小在决定这些波动率多头寸或空头寸面临的风险时很有用.

2. vega 对冲

vega 是期权对于隐含波动率变动的反应. 在一个流动的市场里, 期权交易员报出隐含波动率, 它是连续变动的. 这意味着一个已经存在的期权头寸的价值将随着隐含波动率的改变而改变. 想消除这种敞口的交易员运用 vega对冲来使他们的资产组合是 vega 中性的. 实际 vega 对冲涉及买入和卖出期权, 因为只有这些工具才有凸度, 也就是有 vega.

### 8.6.4 theta

下面, 我们将考虑如果时间变动了一个微小量 $dt$, 期权的理论价格将改变多少? 我们可以利用价格函数对时间参数 $t$ 的偏导数, 称为 theta:

$$\text{theta} = \frac{\partial C(S_t, t|r, \sigma, T, K)}{\partial t}. \tag{93}$$

根据这个式子, theta 度量了期权时间价值的衰减. theta 的直观意义是简单的. 随着时间的推移, 一个从未来 $S_t$ 的波动中受益的时间少了, 期权的时间价值就减少了. 因此, 我们一定有 theta<0 .

如果 Black-Scholes 假设是正确的, 可以算出这个导数的解析式并且画出图来, 如图 8-13 所示. 我们可以看出, 在其他所有条件都一样时, 一个普通期权的时间价值随着到期日的临近将以越来越快的速率减少.

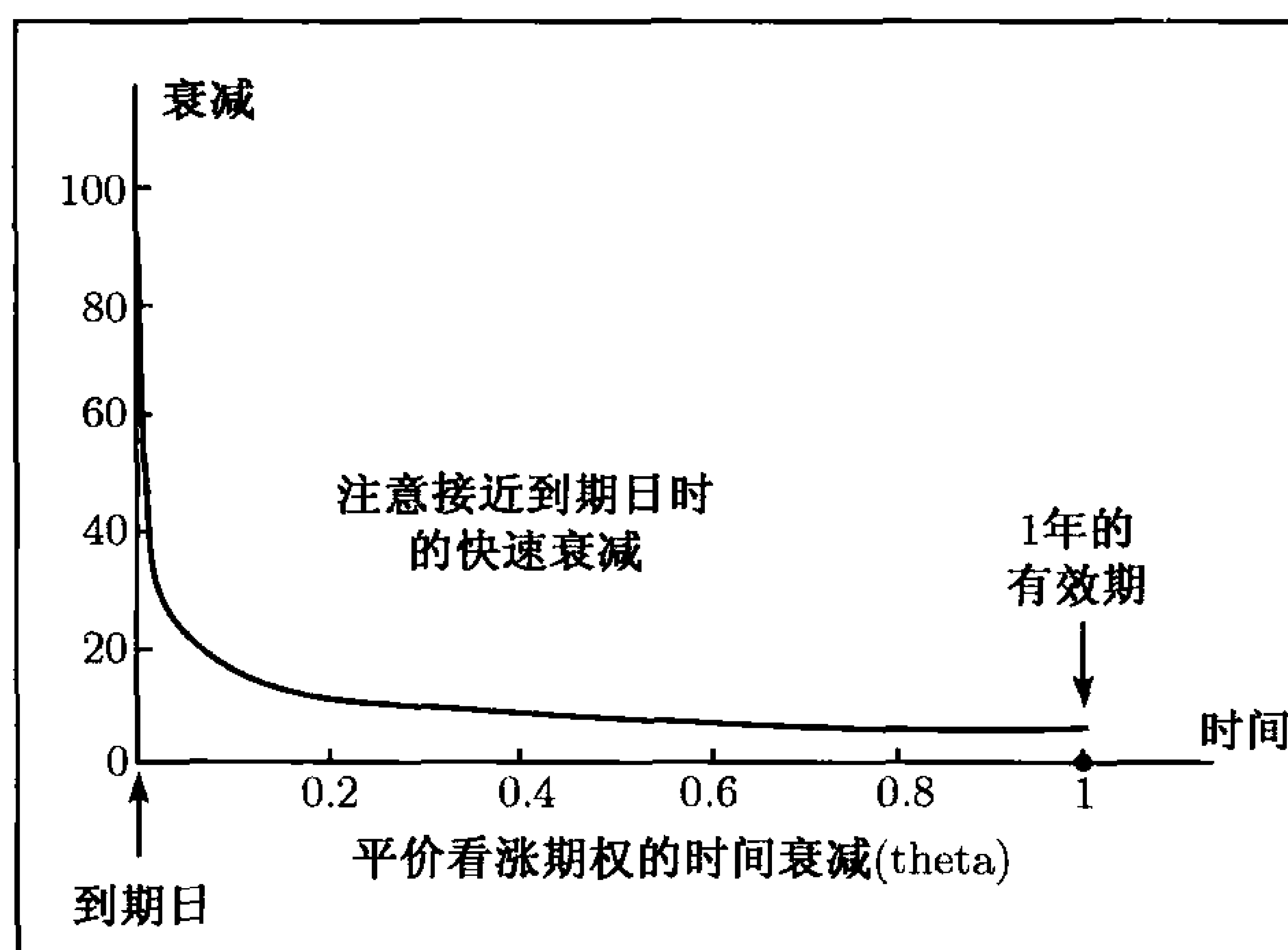



图 8-13

### 8.6.5 omega

这个希腊字母只与美式期权有关, 它是市场人士用来度量美式期权预期寿命的一个大致尺度.

### 8.6.6 高阶导数

迄今见到的希腊字母还不是人们感兴趣的所有敏感性. 可以设想出市场专业人士和投资者感兴趣的很多其他敏感性. 实际上, 我们能够计算出前面希腊字母本身对于 $S_t, \sigma, t$ 和 $r$ 的敏感性. 它们是高阶交叉偏导数, 而且在一定条件下将与交易员有关.

下面是两个例子. 考虑期权的 gamma. 这个希腊字母确定了当标的资产 $S_t$ 波动时可以挣得多少现金. 但是 gamma 的值也依赖于 $S_t$ 和 $\sigma$. 因此, 一个 gamma交易员将会对下面的敏感性感兴趣:

$$\frac{\partial \text{ gamma}}{\partial S_t}, \quad \frac{\partial \text{ gamma}}{\partial \sigma}, \tag{94}$$

这两个希腊字母分别称为 speed 和 volga. 显然, 这些偏导数的值对于确定 gamma 头寸的风险和收益是有用的. 奇异期权的 delta 和 gamma 可能有不连续点, 这样的高阶矩可能非常有价值.

另一个有趣的希腊字母是 vega 关于 $S_t$ 的导数

$$\frac{\partial Vega}{\partial S_t}. \tag{95}$$

**vega**交易员可能对这个导数感兴趣. 类似地, 所有重要的希腊字母对于时间参数的偏导数都提供了希腊字母随时间变化的信息.

### 8.6.7 希腊字母和偏微分方程

本章推导的 Black-Scholes 基本偏微分方程可以用刚刚定义的希腊字母来表示. 实际上, 我们可以将希腊字母代入 Black-Scholes 偏微分方程

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2 S_t^2 + rC_s S_t - rC + C_t = 0, \tag{96}$$

重新表示为

$$\frac{1}{2}\text{gamma } \sigma^2 S_t^2 + r \text{ delta } S_t - rC + \text{theta} = 0. \tag{97}$$

在这个表达式下, 期权的多头寸意味着: “获得”gamma 且 “支付” theta.

同样值得注意式 (94) 和式 (95) 提到的较高阶希腊字母在式 (97) 中没有出现. 这是因为它们是二阶希腊字母. 一阶希腊字母与标的风险的变化 $\Delta S_t$, $\Delta\sigma$ 或者时间变化 $\Delta$ 相关, 但是较高阶的希腊字母则与由乘积 $(\Delta S_t\ \Delta\sigma)$ 或者 $(\Delta\,\sigma\,\Delta)$ 给出的变化有关. 实际上, 当 $\Delta S_t$, $\Delta\sigma$, $\Delta$ 很小但是不可忽略时, 两个很小量的乘积如 $(\Delta S_t\ \Delta\sigma)$ 会更小且可以忽略, 这当然取决于$S_t$ 或者波动率增量的大小.[①]

在现实生活的某些应用中, 当波动率达到峰值时, 将会跟较高阶希腊字母有关. 但是, 在标准假设的理论模型下, 当 $\Delta \to 0$ 时, 它们从整个图中消失, 而且对式 (96) 的偏微分方程没有贡献.

1. gamma 交易

Black-Scholes 偏微分方程可以用来解释 gamma 交易员想要做的事情. 假设现实生活的 gamma 是通过为 $C(S_t, t|r, K, \sigma, T)$ 选择一个公式, 然后求导计算出的:

① Wiener 过程在无限小区间的方差为 $dt$, 因此 gamma 与一阶变化有关.

$$\text{gamma} = \frac{\partial^2 C(S_t, t|r, K, \sigma, T)}{\partial S_t^2}. \tag{98}$$

根据导出 Black-Scholes 偏微分方程的原理, gamma 交易员首先运用某个主观概率$P^*$ 来形成有关标的资产在时间 $t_0 < t$ 预期变化大小的主观看法. 此收益可以写成

$$\frac{1}{2}\text{gamma}\left[E_{t_0}^{P^*}[(\Delta S_t)^2]\right], \tag{99}$$

$S_t$ 的波动越大, 它就越大. 然后将这些收益将与利息支出和时间价值的损失相比, 如果 gamma 收益的期望比这些成本大, 那么交易员将做多gamma头寸. 相反的话, 即成本比较大, 交易员更愿意做空gamma头寸.

关于 gamma 交易至少需要说明两点.

2. gamma 交易与 vega

首先, 一个期权头寸的 gamma 依赖于隐含波动率参数 $\sigma$. 这个参数代表隐含波动率. 它不必与 gamma 交易员预期的 $S_t$ 的 (百分比) 波动值相同. 实际上, gamma 交易员主观 (预期) 的由 $S_t$ 的波动产生的收益为

$$\frac{1}{2}\text{gamma}\left[E_{t_0}^{P^*}[(\Delta S_t)^2]\right]. \tag{100}$$

无法保证隐含波动率满足下面的等式

$$\sigma^2 S_t^2 \Delta = E_{t_0}^{P^*}[(\Delta S_t)^2]. \tag{101}$$

即使交易员的预期正确. 表达式右边代表与主观概率分布有关的标的资产预期 (百分比) 波动, 而左边是波动率如下的值: 将其代入 Black-Scholes 公式中可得出期权的公平价格.

因此, gamma 交易员的收益和损失也依赖于隐含波动率的变化, 而且期权的 vega 也是其中一个因素. 例如, gamma 交易员可能预计到了现实世界的波动将增加, 但是如果隐含波动率$\sigma$ 同时下降的话, 他仍然可能受到损失. 这在下面情形将降低头寸的价值

$$\frac{\partial C_{ss}}{\partial \sigma} < 0. \tag{102}$$

下面这段材料告诉交易员或风险管理者对于 vega 和 gamma 风险可能采取的方法.

**例**

VOLX 合同是一种新型期货合约, 其标的是用基准现金指数收盘价来度量的三个参考市场的价格波动率. 三个市场是德国 (DAX) 市场, 英国 (FT-SE) 市场和瑞典 (OMX) 市场.

设计者认为, 通过创造一个可套利的波动率期限结构, VOLX 产品提供大量对冲和交易的机会. 这抵消了 vega 和 gamma 敞口, 它也增加了人们对那些很难用期权空头寸来对冲的远期期权头寸的兴趣.

持有净空头头寸因而暴露给波动率增大风险的期权经理, 可以通过做多 VOLX 合同来对冲这些头寸; 反之亦真. 作为一种纯 vega 形式, 这类合同为 vega 对冲带来了特别的好处. 它们的 vega 值不依赖于利率设定期前的即期利率水平, 而一旦 RSP 开始, 它将呈线性减少.

相比较, VOLX 期货的 gamma 与那些传统期权的 gamma 大不相同. 虽然风险管理者可以使用一个具有相似 gamma 值的产品用传统方式对冲期权头寸, 但是要对冲一系列拥有不同执行价的复合账簿的 gamma 可能比较困难. VOLX 的 gamma, 不管时间和标的点的水平, 都是均匀分布的. VOLX 对于传统上很难对冲的期权组合的价外部分将特别有用. (摘自 IFR, 1996 年 11 月 23 日)

3. 哪一个期望

用下述表达式来描述预期由交易 $S_t$ 的震荡所获得的收益

$$\frac{1}{2}\text{gamma}\left[E_{t_0}^{P^*}\left[(\Delta S_t)^2\right]\right], \tag{103}$$

这里 $E_{t_0}^{P^*}[(\Delta S_t)^2]$ 是关于主观概率分布 $P^*$ 计算的期望. gamma 交易员的行为依赖于他们的主观概率, 但是市场决定的无套利价格是客观的, 相应的期望必须是无套利的. 相应的价格公式将依赖于客观风险中性概率.

## 8.7　现实中的复杂性

在真正的市场上, 遇到本节讨论的问题时要小心, 因为它与理论 Black-Scholes 世界有显著的不同. 按照惯例, 交易员认为 Black-Scholes 世界可以用作一个基准, 虽然它有众所周知的缺陷.

Black-Scholes 世界里的每一个假设都可能不成立, 但有时, 这些背离并没有害处, 而且可以通过修正该公式使其容易应用. 这种修正有一些较小, 另一些则可能比较大, 但最后都通过适当的努力解决了问题.

有两种情形需要本质上的修正. 第一种情形是有关波动率行为的. 在金融市场上, 波动率不仅不是常数, 而且还有许多无法预料到的性质. 反常之一就是微笑效应.[①] 波动率也有一个期限结构.

第二种情形是当利率随机时, 标的资产是与利率有关的工具. 这里, 与 Black-Scholes 世界的背离再次导致了重大的变化.

① 微笑是指执行价改变时隐含波动率的变化, 将在第 15 章里介绍.

### 8.7.1 处理期权账簿

本章讨论了单个期权情形下的 gamma, delta 和 vega 风险. 但是, 做市商并不处理单个期权. 他们拥有期权账簿而且试图管理期权组合的 delta, gamma 和 vega 风险. 这使对冲和风险管理大大地复杂化了, 奇异期权的存在又增加了这些困难.

首先, 期权账簿包含的期权标的资产不同, 但有可能相关. 其次, 隐含波动率可能因执行价和到期日的不同而不同, 而且将 delta, gamma 和 vega 的概念直接应用到资产组合也不再行得通. 再次, 对于单个期权, delta, gamma 和 vega 有已知的形状和动态机理, 而对于期权组合, delta, gamma 和 vega 的形状会更加复杂, 它们随时间的变动特性可能更加难以追踪.

### 8.7.2 期货为标的的资产

本章讨论了以货币工具作为标的资产的期权. 如何分析那些以期货或者远期合同为标的资产的期权呢? 设计这样的期权合同有两步. 首先, 引入货币工具的期货或远期合同; 其次, 卖出期货期权. 期权持有者有权买入一个或者更多的期货合约.

为什么期权要以期货 (远期) 而不直接以货币工具作为标的资产呢?

实际上, 这种合同的优点有很多, 以期货和远期作为标的资产的期权合同流动性最好, 这并不是一个巧合. 首先, 如果一个人为了对冲期权头寸要买入或者卖出标的资产, 期货合约会更加方便. 它们更具流动性而且不需要先期的现金支付. 其次, 用货币工具对冲将意味着, 例如卖出或者买入成千上万桶油, 交易员将这么多的油存放在哪里? 他从哪里得到这么多油? 更糟糕的是, 动态对冲要求连续地调整这样的头寸, 买入和卖出标的货币工具将非常不方便. 而期货的多头寸和空头寸直到到期日才会产生交割. 因此, 交易员可以经常调整他的头寸, 而不必在每次重新调整对冲后储存很多桶油. 期货流动性更好, 其伴随的交易成本和对方违约风险也小得多.

因此, 以期货和远期代替货币工具作为标的资产, 实际上是一个聪明的合同设计. 但是, 我们必须记住期货将伴随每日盯市, 而远期合约可能在到期日之前不需要任何盯市操作.

#### 交割不匹配

注意到不匹配的可能性. 期权可能会需要一个期货合同在时间 $T$ 进行交割, 但是该期货合同可能此时还不到期, 而是在某个时间 $T+\Delta$ 到期, 而且此时可能导致现金商品的交割. 这样的时间不匹配带来了新的风险.

## 8.8 结论: 什么是期权

本章说明了期权本质上是一个波动率工具. 关键参数是标的风险在给定区间

内将有多大的波动. 我们也看到了还有很多其他的风险需要进行管理. 隐含波动率参数 $\sigma$ 可能发生变化, 利率可能波动, 期权的敏感性也可能出乎意料地变动. 这些风险也许并不是持有头寸的 "成本", 但是它们影响了定价而且在期权交易中起到重要作用.

## 参考文献

大部分教科书将期权处理为方向性工具, 但是也有一些非技术性资料将期权直接处理为波动率工具. 首先想到的 Natenberg (1994), 另一个这样的方法是在 Conolly (1999) 中. 偏好技术性方法的读者可以考虑更加抽象的处理, 例如 Musiela 和 Rutkowski(1998). 一些教科书讨论了 Black-Scholes 理论. 我们推荐 Duffie(2001). 对于技术性的细节读者应该参考 Wilmott(2000). 关于用 Mathematica 进行期权分析的有用组合, 读者可以参考 Stojanovic(2003). 有关风险的出版物中, 有一些书籍的内容与本章所用方法相同, Risk(1992) 是一个很好的例子, 读者在其中可以找到关于 Black-Scholes 公式的全面讨论. 希腊字母的例子摘自衍生产品周刊.

## 附　录　8-1

本附录给出 delta 和 gamma 公式的推导. delta 的推导相对较长.

**delta 的推导**

到期日为 $T$, 执行价为 $K$ 的普通欧式看涨期权的 Black-Scholes 公式由下式给出

$$C(S_t,t) = S_t\int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{S_t}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u - \mathrm{e}^{-r(T-t)}K\int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{S_t}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u, \tag{104}$$

重新整理并且令 $x_t = \frac{S_t}{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}}$, 得到

$$C(x_t,t) = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[x_t\int_{-\infty}^{\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \tag{105}$$

$$-\int_{-\infty}^{\frac{\log x_t-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\right], \tag{106}$$

对 $x_t$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}C(x_t,t)}{\mathrm{d}x_t} = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\int_{-\infty}^{\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\right] \tag{107}$$

$$+\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}\right] \tag{108}$$

$$-\left[\frac{1}{x_t\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_t-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}\right]. \tag{109}$$

现在我们来证明表达式中的后两项加起来的和为 0 且

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}\right] = \frac{1}{x_t\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_t-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}, \tag{110}$$

为了理解上式, 在右端使用代换

$$\frac{1}{x_t} = \mathrm{e}^{-\log x_t}, \tag{111}$$

然后重新整理指数函数里的指数.

因此, 我们有

$$\frac{\partial C(x_t,t)}{\partial x_t} = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\int_{-\infty}^{\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\right], \tag{112}$$

使用链式法则得到

$$\frac{\partial C(S_t,t)}{\partial S_t} = \left[\int_{-\infty}^{\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u\right] \tag{113}$$

$$= N(d_1). \tag{114}$$

**gamma 的推导**

一旦得到了欧式看涨期权的 delta, gamma 就是 delta 的导数, 因此

$$\frac{\partial^2 C(S_t,t)}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x_t+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}, \tag{115}$$

其中 $x_t = \frac{S_t}{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}}$.

# 附　录　8-2

在此附录里我们回顾随机积分的一些基本概念. 这个简短的回顾可以简要介绍后面章节中的相关概念. Oksendal(2003) 很好地提供了有关随机积分初步讨论的资料. 某些说明性的知识可以在 Neftci(2000) 中找到.

## 8.1　随机微分方程

一个由 Wiener过程$W_t$ 驱动的随机微分方程可以写为

$$\mathrm{d}S_t = a(S_t, t)\mathrm{d}t + b(S_t, t)\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{116}$$

这个方程描述了 $S_t$ 随时间变化的动态机理. Wiener 过程 $W_t$ 的增量 $\Delta W_t$ 具有期望为零, 方差为 $\Delta$ 的正态分布, 其中 $\Delta$ 是一个很小的时间间隔. 不同时间对应的增量不是不相关的. 因此, 如果只是已知时间 $t$ 时的信息 $I_t$, Wiener 过程在未来的增量是不可预测的.

$a(S_t, t)$ 和 $b(S_t, t)$ 称作*漂移*和*扩散*参数. 漂移参数模拟了 $S_t$ 变化的期望. 扩散因子模拟了相应的波动率. 当跳跃这种不可预测的变动发生时, 它将称为*跳跃因子*.

跳跃因子需要把例如 $\lambda(S_t, t)\mathrm{d}J_t$ 的项加入到上面所示的随机微分方程的右侧. 否则 $S_t$ 将称为*扩散过程*. 当带有跳跃因子时, 它变为*跳扩散*过程.

**例**

*最简单的随机微分方程是漂移和扩散系数独立于时变信息的情形*

$$\mathrm{d}S_t = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{117}$$

*这里, $W_t$ 是一个方差为 $t$ 的标准 Wiener 过程. 在这个随机微分方程里, 系数 $\mu$ 和 $\sigma$ 没有时间下标 $t$, 随着时间的推进, 它们不会改变.*

*用来模拟标的资产价格的标准随机微分方程是几何过程. 它是 Black-Scholes 世界里假设的模型*

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{118}$$

*这个模型隐含着漂移和扩散参数与 $S_t$ 成比例地改变.*

*在模拟利率时比较有用的随机微分方程是均值回归模型*

$$\mathrm{d}S_t = \lambda(\mu - S_t)\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{119}$$

*根据这个式子, 当 $S_t$ 下跌到 "长期均值"$\mu$ 以下时, $(\mu - S_t)$ 项将变成正的, 这将使 $\mathrm{d}S_t$ 很有可能为正, 因此, $S_t$ 将回到均值 $\mu$.*

## 8.2 Ito 引理

假设 $f(S_t)$ 是有如下动态机理的随机过程 $S_t$ 的函数:

$$\mathrm{d}S_t = a(S_t,t)\mathrm{d}t + b(S_t,t)\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,\infty). \tag{120}$$

我们想在 $S_t$ 的一个已知值比如说 $S_0$ 附近利用泰勒级数展开 $f(S_t)$, 展开式为

$$f(S_t) = f(S_0) + f_s(S_0)[S_t - S_0] + \frac{1}{2}f_{ss}(S_0)[S_t - S_0]^2 + R(S_t,S_0), \tag{121}$$

这里, $R(S_t,S_0)$ 代表泰勒级数展开式的所有余项.

首先注意到 $f(S_t)$ 可以写为 $f(S_0+\Delta S_t)$, 如果我们定义 $\Delta S_t$ 为

$$\Delta S_t = S_t - S_0. \tag{122}$$

然后, 泰勒级数近似将有下面的形式:

$$f(S_0+\Delta S_t) - f(S_0) \cong f_s\Delta S_t + \frac{1}{2}f_{ss}\Delta S_t^2, \tag{123}$$

$\Delta S_t$ 是随机变量 $S_t$ 的一个 "微小" 改变. 在近似右边时, 我们保留了 $f_s\Delta S_t$ 项.

考虑第二项 $\frac{1}{2}f_{ss}(\Delta S_t)^2$. 如果 $S_t$ 是确定的, 我们可以说 $(\Delta S_t)^2$ 项很小. 这可以通过让 $\Delta S_t$ 的数量不可忽略但足够小, 从而使得它的平方 $(\Delta S_t)^2$ 可以忽略获得证明. 但是这里 $S_t$ 的改变是随机的. 假设这个变化的均值是 0. 那么方差为

$$0 < E[\Delta S_t]^2 \cong b(S_t,t)^2\Delta. \tag{124}$$

这个等式意味着只要 $S_t$ 是随机的, (123) 式的右边在任何形式的泰勒级数近似中必须保留二阶项.

运用到无穷小的时间 $\mathrm{d}t$ 内, 这给出了 Ito 引理, 也就是随机形式的链式法则:

$$\mathrm{d}f(S_t) = f_s\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}f_{ss}b(S_t,t)^2\mathrm{d}t. \tag{125}$$

这个方程可以被认为是过程 $f(S_t)$ 的动态机理, 是由 $S_t$ 驱动的. 上述方程里的 $\mathrm{d}S_t$ 项可以运用 $S_t$ 的动态机理来代换.

## 8.3 Girsanov 定理

Girsanov 定理为一个概率测度转换为另一个 "等价的" 测度提供了基本框架, 它在定价中发挥重要作用.

我们以一种启发性的术语来叙述该定理. 如果已知一个 Wiener 过程 $W_t$, 然后将这个过程的概率分布乘以一个依赖于时间 $t$ 和时间 $t$ 时可获得的信息 $I_t$ 的函数

$\xi_t$. 这样我们可以得到一个在概率分布 $\tilde{P}$ 下新的 Wiener 过程 $\tilde{W}_t$. 这两个过程通过下面的关系式彼此相联系:

$$d\tilde{W}_t = dW_t - X_t dt. \tag{126}$$

这就是说, $\tilde{W}_t$ 是通过从 $\tilde{W}_t$ 中减去与依赖于 $I_t$ 的 $X_t$ 项.

Girsanov 定理通常在如下情形使用: (1) 要计算一个期望; (2) 将原始的概率测度进行变换, 使期望变得容易计算; (3) 计算新概率下的期望.

## 习 题

1. 下面是有关以欧元/美元汇率为标的资产的期权的评论.

*一些认为隐含波动率过高的交易商进行了新的交易. 一个例子就是卖出一年期价内欧元看跌期权, 其执行价在 1.10 美元附近; 同时买入一年平价欧元看跌期权. 如果到期时欧元高于 1.10 美元, 交易员创造一个了期权费差. 这些交易被描绘在曲线的两边. (摘自《衍生产品周刊》)*

(a) 分别画出每个期权在到期日的头寸益/损图.

(b) 到期日的总支付是多少?

(c) 到期日的净支付是多少?

(d) 当交易员买入和卖出期权时为什么他们买入了 "波动率"? 二者的波动率敞口不能彼此抵消吗?

2. 考虑下面的报价.

*隐含的美元/新西兰元的波动率在周二下跌到了 10.1%/11.1%. 交易员在这周初联邦储备局削减利率前买入了平价期权. 他们预期利率的削减将增加短期的波动率, 想做多 gamma. 交易是典型的一周到期, 平均本金是 1 000 万到 2 000 万美元. (摘自《衍生产品周刊》)*

(a) 说明为什么当波动率预期增加时, 交易员想要做多 gamma?

(b) 运用希腊字母的数值以及材料中的数据给出你的论据.

(c) 假设初始头寸为 3 000 万美元, 在这些条件下交易员将损失多少钱? 运用材料中提供的数据进行大致的计算.

3. 考虑下面一段文字.

*欧元/美元一个月的隐含波动率随着交易员用美元对冲欧元敞口, 并且随着欧元在现货市场上跳入历史低点后在周三下跌 2.7%后达到了 10%. 在欧洲中央银行将利率提高 25 个基点后, 欧元下跌却没有引起对欧元看跌期权的巨大需求. 欧元在周三触到 0.931 美元的低点 (摘自《衍生产品周刊》).*

(a) 在欧元/美元市场, 交易员通过买入短期执行价低于 0.88 美元的欧元看跌期权来迅速囤积 gamma, 从而达到对冲利率上涨的可能性. 在正常的情况下, 该货币将发生什么情况?

(b) 当欧元响应失败, 且相对主要货币再次下跌后, 交易员为什么迅速购买欧元看跌期权? 运用支付图进行解释.

(c) 如果是以欧元为标的的障碍期权, 交易员还会 "囤积" gamma 吗?

4. 已知下面的表格是满足所有 Black-Scholes 假设的看跌期权的价格. 执行价是 20 而且波动率是 30%. 无风险利率是 2.5%.

| 期权价格 | 标的资产价格 |
|---|---|
| 10 | 10 |
| 5 | 15 |
| 1.3 | 20 |
| 0.25 | 25 |
| 0.14 | 30 |

期权将在100天后到期. (为了方便)假设, 期权每月大约损失它价值的三分之一.

(a) 怎样才能够近似期权的 delta? 计算前面例子里 delta 的三种近似.

(b) 假设当标的资产的价格是 20 时, 你用借来的资金购买期权. 你已经用标准的方式对冲了这个头寸. 如果你观察到了下面顺序的价格序列, 你将在 4 个相等的时间段里得到或者损失多少?

$$10, 25, 25, 30. \tag{127}$$

(c) 现在假设标的资产的价格沿着下述轨迹运行

$$10, 30, 10, 30, \tag{128}$$

在到期日前你将获得或者损失多少?

(d) 解释收益与损失的区别.

5. 在因特网上搜索下列问题的答案.

(a) 希腊字母 volga 和 vanna 代表什么敏感性?

(b) 它们为什么与 vega 对冲有关?

# 第9章 凸性头寸

## 9.1 引 言

怎样才能交易波动率呢？可以通过股票，也可以通过债券. 但是波动率本身甚至不是一种资产，所以在确切定义波动率时会遇到一些问题. 比如说，从技术上来讲，我们应该将波动率定义为一种资产价格 $S_t$ 的条件标准方差的估计，

$$\sqrt{E_t[S_t - E_t[S_t]]^2}, \tag{1}$$

还是定义为平均绝对值偏差？

$$E_t[|S_t - E_t[S_t]|]. \tag{2}$$

对此没有明确的答案，这两种统计波动率的定义也将产生不同的值. 先撇开波动率的统计定义不谈，实际情况下交易员们会直接给出一种工具的波动率报价而不是这种工具的价值. 例如，在利率衍生品市场中会给出上限、下限和互换期权的波动率报价. 股票期权也提供了隐含波动率，这时交易商和做市商交易此报价波动率. 因此，一定存在某种方法将交易者称为波动率的东西分离出来，并对其进行定价.

期权的凸性会随着“波动率”的增加而变得更有价值，第 8 章给出了怎样构建策略使得我们能够以货币的形式量化并度量一种资产的波动率，这种方法就是通过具有不同凸性的资产构建 delta 中性 (delta-neutral) 组合. 本章将推广这种思想，将其运用到其他工具上，得到更一般的结果，进度安排如下.

首先，我们说明一个长期债券的凸性是怎样与收益率的波动率联系起来的，收益率的波动率越高，持有这支债券的价值也就越大. 然后，讨论确定凸性价值的机制，并将这些机制与期权的凸性交易进行比较，我们会发现一些差别，也会发现一些紧密的相似之处. 最后，我们将结果一般化，推广至任何一种具有不同凸性特征的金融工具. 因为关于波动率交易的讨论需要初等的无套利定价理论，所以这个问题的讨论不得不推迟至第 13 章.

## 9.2 一个难题

这里给出一个难题. 考虑一条 (假想) 的收益率曲线，如图 9-1 所示，一个 10 年期的零息债券的到期收益率是 5.2%，而一个 30 年期债券的到期收益率却只有

4.94%, 也就是说, 持有 30 年期的零息债券至到期日所产生的收益要低于持有 10 年期债券的收益.

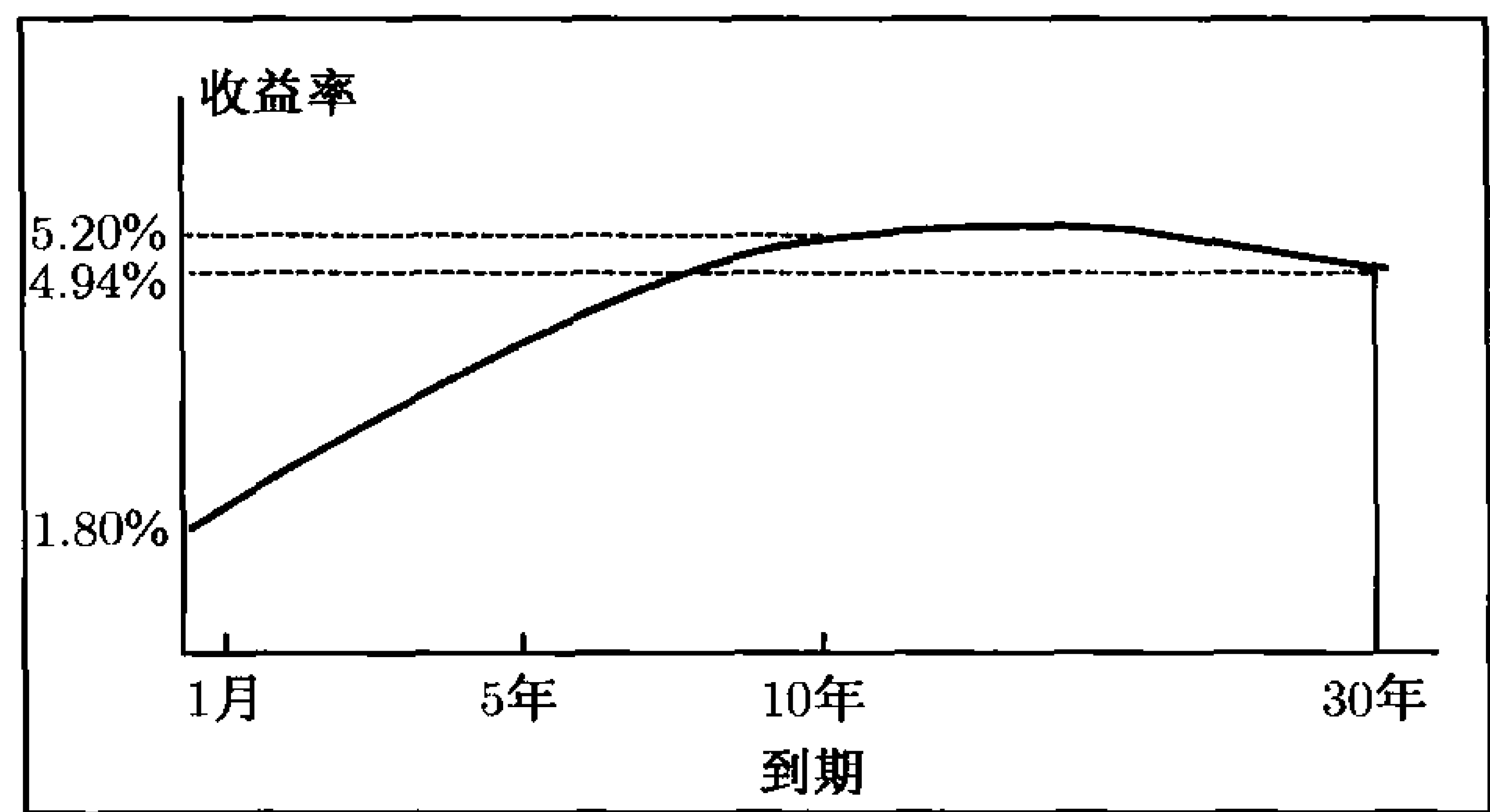



图 9-1

这看起来确实有点奇怪了, 到期日长的债券收益反而低. 当然, 有一些经济上的或者机构投资者的原因可以解释这种现象. 比方说, 人们预期未来 30 年中前 20 年的通货膨胀率要小于后 10 年的通货膨胀率, 或者由于某些机构对某种期限债券的特殊偏好而影响了相对的供求关系, 导致到期收益率与到期日之间呈现不一致性. 比如, 保险公司需要对冲其长期偿还合约上的头寸, 这种优先级可能会降低收益率, 抬高长期债券的价格.

但是, 这些解释很难完全说明我们所观察到的这个奇怪现象. 机构投资者方面的原因, 比如特别的偏好和国债偿还策略会减少 30 年债券的供应量, 这能够说明一些问题, 但是令人难以置信的是, 多出的 20 年的久期所获得的补偿是如此之少. 还有其他的解释吗?

实际上, 到期收益率并没有完全反应出持有长期债券实现的全部收益. 这个说法可能令人难以置信, 毕竟, 到期收益率的*定义*就是在债券持有至到期日时, 每年所产生的收益.

然而, 由于凸性的存在, 持有一个长期债券还会有一些额外收益, 这些额外的收益依赖于可以与这些债券进行交易的某种其他东西, 还依赖于标的波动率. 这些能够解释图 9-1 所示的奇怪现象. 这是因为 30 年期国债所支付的 4.94% 的到期收益, *加上*一些额外所得可能会超过 10 年期债券的全部回报. 实际上, 一个债券的到期收益率和债券的*总回报*是度量固定收益工具回报的两种不同方式, 所以这个说法是可信的.

## 9.3 债券的凸性交易

我们已经知道了关于一个普通期权的凸性交易. 简单的贴现债券, 特别是那些

具有很长到期日的贴现债券, 它们具有利率波动率的敞口, 可以用与期权的凸性交易相类似的方法进行分析. 实际上, 一个 "长期" 债券和一个普通期权都是凸性工具, 它们与线性或者凸性更小的工具共同存在. 因此, 可以把一个 delta 中性的投资组合与长期债券结合在一起, 从而从波动率的变化中获利[①]. 整体的思路与前一章考虑期权时的情形相似.

考虑一个无违约风险、价格为 $B(t,T)$ 的长期贴现债券, 其中 $t<T$. 债券在 $t$ 时刻的价格可以用相应时刻的到期收益率 $y_t^T$ 表示为

$$B(t,T)=\frac{1}{(1+y_t^T)^T}. \tag{3}$$

当 $t=0, T=30$ 时, 我们可以画出对于不同到期收益率的 30 年期债券的价格, 如图 9-2. 很显然, 价格是收益率的凸函数.

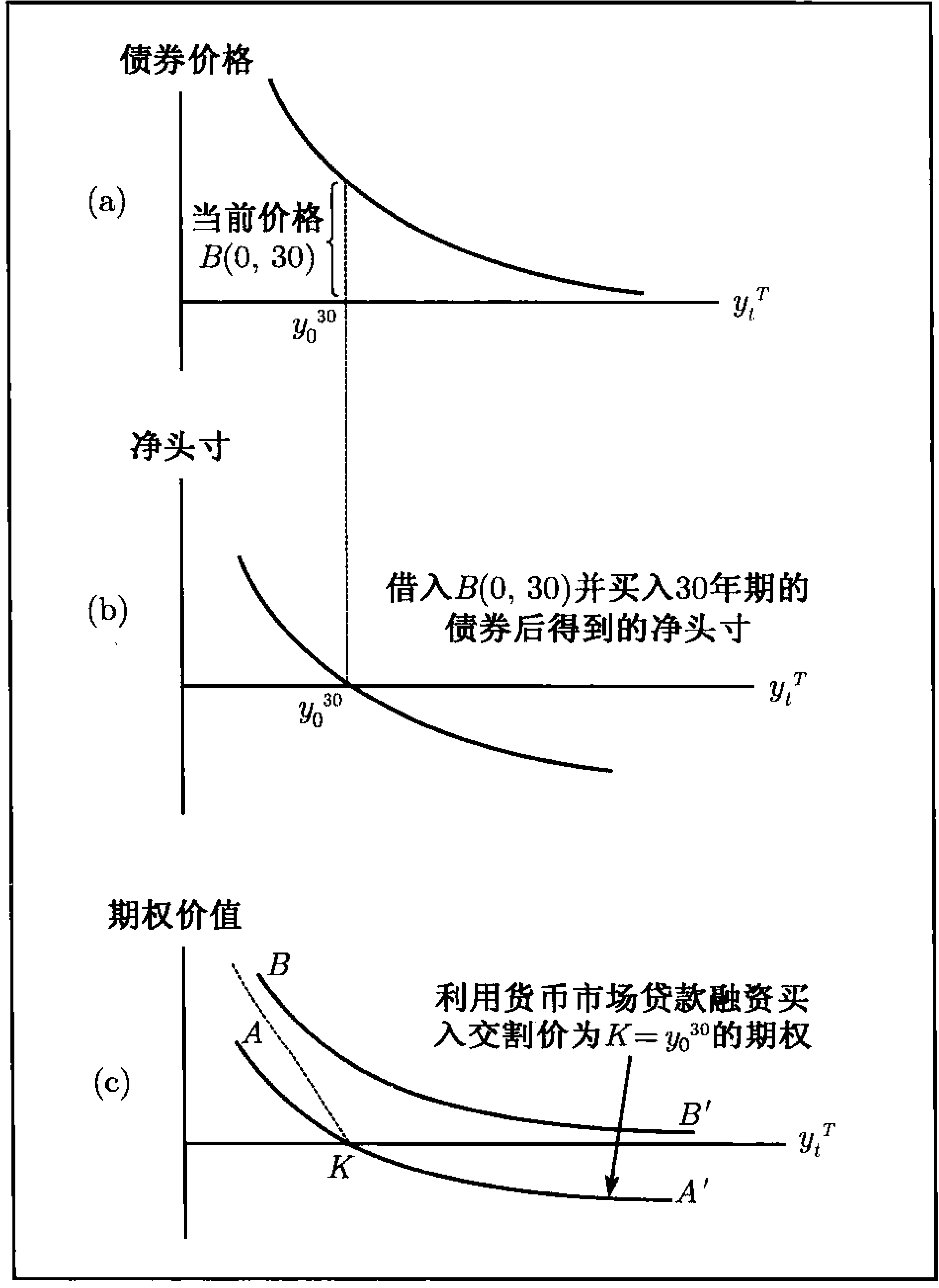



图 9-2

① 短期债券几乎是线性的. 以普通期权为例, 股票一类标的资产的头寸也是线性的.

另一方面, 对于一个短期债券, 价格收益可以表示成一条近似线性的曲线. 例如, 图 9-3 画出了一个 1 年期的债券价格 $B(0,1)$ 关于 1 年到期收益率 $y_0^1$ 的函数, 它们的关系基本上是线性的[①].

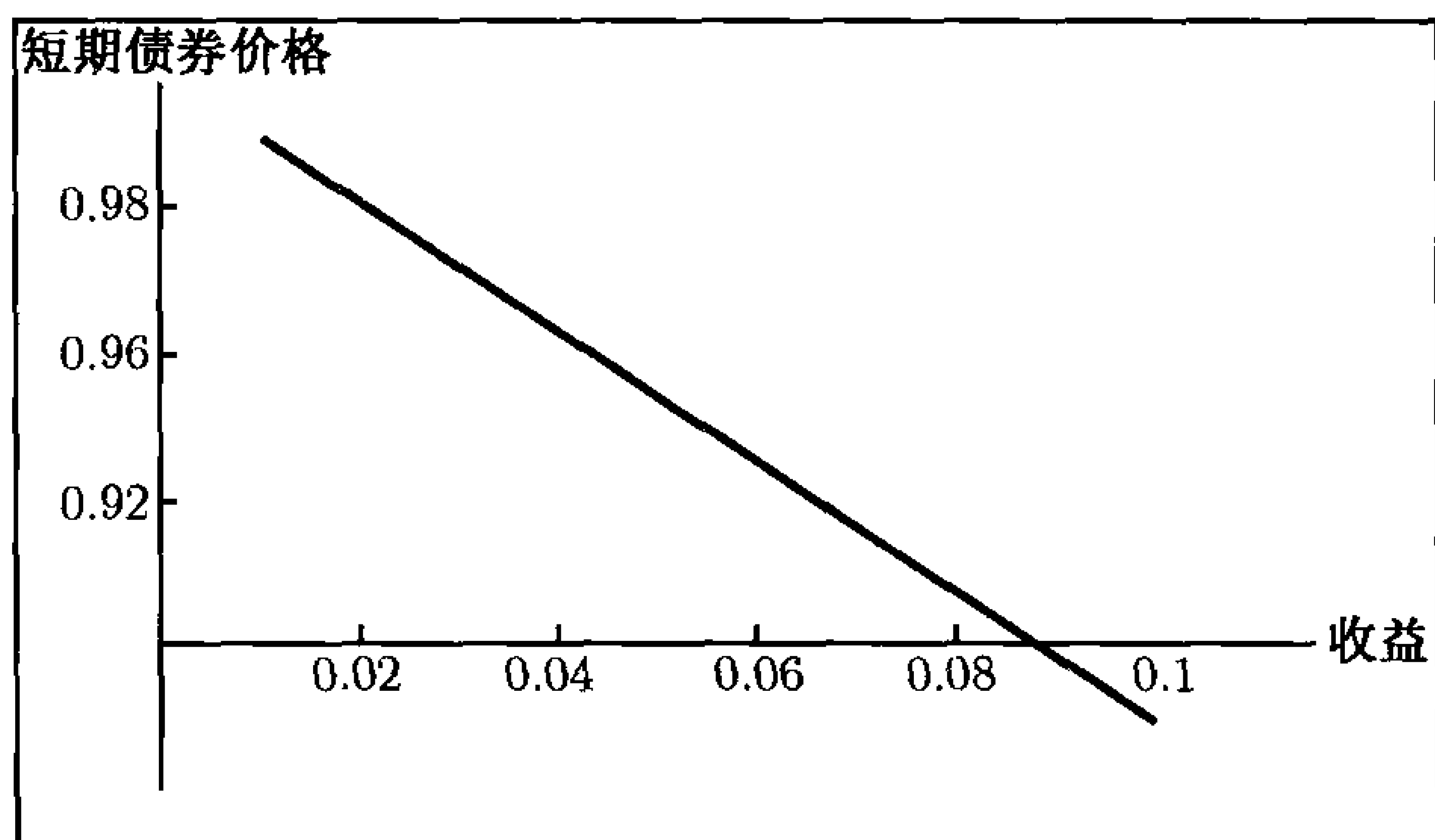



图 9-3

关键之处是在某些条件下, 可以利用这两种债券构成一个投资组合, 这个组合能够分离出债券的凸性收益, 它类似于期权动态对冲所产生的凸性收益. 因此, 可以假设 $y_t^1$ 和 $y_t^{30}$ 这两个收益率关于时间 $t$ 是完全相关的[②]. 接下来考虑一个交易员, 假如他想要复制第 8 章讨论的期权做市商的策略. 这个交易商借钱买入长期债券, 通过卖空一定数量的短期债券 delta 对冲一阶收益率的敞口.

这个交易员需要借 $B(0,30)$ 数量的美元, 并投资于长期债券头寸, 所以这个组合的回报是

$$\{\text{长期债券}, B(0,30)\text{美元的贷款}\}, \tag{6}$$

如图 9-2b 中所示的曲线 $BB'$. 现在与图 9-2 最底下的曲线进行比较, 这里我们给出一个做市商买入一个收益率为 $y_t^{30}$ 的平价卖出期权. 在到期日 $T$, 期权的支付为

$$P(T) = \max[y_0^{30} - y_T^{30}, 0]. \tag{7}$$

这个期权通过货币市场的贷款融资, 所以总的头寸如曲线 $AA'$ 所示[③]. 我们看到这两个头寸有很大的相似之处. 考虑到期权和债券的这种相似性, 我们也应该能

① 实际上, 如果 $y_0^1$ 很小, 那么由零点的一阶 Taylor 展式可得:

$$B(0,1) = \frac{1}{(1+y_0^1)} \tag{4}$$

$$\cong (1 - y_0^1). \tag{5}$$

② 此种简化假设意味着所有债券都受同一个不可料随机冲击的影响, 只是程度不同罢了, 这就是所说的单因素模型.

③ 期权的价格是曲线 $BB'$. 这条曲线向下移动的距离等于货币市场贷款金额, 它使得头寸 1 的成本为 0.

够分离出债券的凸性或者 gamma 收益. 事实上, 一旦分离成功的话, 利用无套利原则, 我们就能够得到一个无违约风险的贴现债券的价格过程所满足的偏微分方程 (PDE). 这个 PDE 和第 8 章得到的 Black - Scholes PDE 有紧密的相似之处.

下面的讨论是在某些简化和不合实际的假设下进行的, 其中用到了所谓的单因素模型. 我们的目的是理解有关债券的波动率交易机制, 并且这个假设将极大地简化问题. 我们所考虑的背景与实际不同, 在实际市场中影响固定收益工具的随机因素不止一个, 所以给出两个初始假设.

(1) 存在到期日分别为 $T^s$ 和 $T$ 的短期和长期无违约风险的贴现债券. 它们都是流动的, 并且不存在交易费用.

(2) 这两种债券的价格依赖相同的风险因素, 用 $r_t$ 表示, 这可以解释为一种包含了 $t$ 时刻所有随机信息的即期利率, 也就是前面提到的单因素.

第二条假设意味着这两个债券的价格是短期利率 $r_t$ 的函数, 可以写为

$$B(t,T^s) = S(r_t,t,T^s), \tag{8}$$

$$B(t,T) = B(r_t,t,T), \tag{9}$$

其中 $B(t,T^s)$ 是短期债券 $t$ 时刻的价格, $B(t,T)$ 是长期债券在 $t$ 时刻的价格, 我们假设到期日 $T^s$ 使得短期债券的价格 (几乎) 是 $r_t$ 的线性函数, 即 $B(t,T^s)$ 关于 $r_t$ 的二阶导数可忽略为 0.

这样就得到了一个单一标的风险, 这个风险因素引起凸性工具和拟线性工具的价格波动, 我们将讨论在这个背景下动态对冲债券组合所产生的现金流.

### 9.3.1 delta 对冲的债券组合

交易员用借来的钱投资于长期债券, 然后对冲图 9-4 中曲线 $AA'$ 所隐含的下行风险 (downside risk). 对冲下行风险的头寸应该在 $r_t$ 增加时赚钱, 而当 $r_t$ 减少时发生损失, 可以通过卖空适当数量的短期债券来建立此头寸.

实际上, 构造一个 delta 中性组合的技巧同第 8 章中一样. 对 $r_t$ 求 $S(r_t,t,T^s)$ 和 $B(r_t,t,T)$ 的偏导数, 并估计导数在 $r_{t_0}$ 时的值, 然后得到一个对冲比 $h_t$:

$$h_t = \frac{\left(\frac{\partial B(r_t,t,T)}{\partial r_t}\right)}{\left(\frac{\partial S(r_t,t,T^s)}{\partial r_t}\right)} \tag{10}$$

$$= \frac{B_r}{S_r}. \tag{11}$$

已知短期债券价格关于 $r_t$ 拟线性时, $S_r$ 是一个常数. $h_t$ 是 $r_t$ 的函数, 由于长期债券的凸性, $B_r$ 不是常数. 假设给定了 $r_{t_0}$ 的值, 那么就可以确定 $h_t$ 的值了. 于是我们得知在 $t_0$ 时必须卖空$h_{t_0}$ 单位的短期债券.

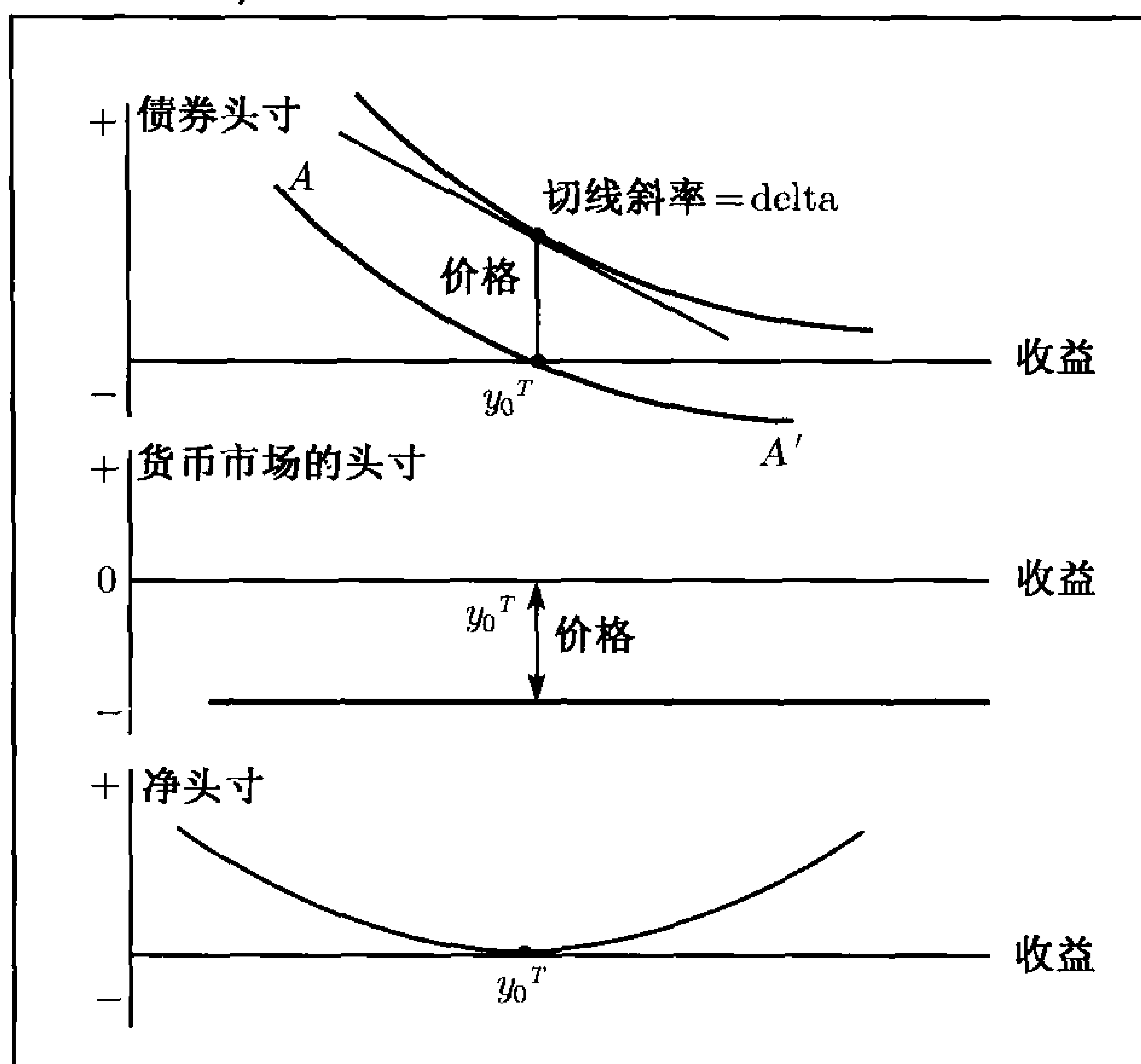



图 9-4

当即期利率发生一个微小改变量 $\Delta r_t$ 时, 组合的价值变化为

$$\Delta[B(r_t,t,T) - h_t S(r_t,t,T^s)] = B_r \Delta r_t - \frac{B_r}{S_r} S_r \Delta r_t + R \tag{12}$$

$$= R, \tag{13}$$

因为 $S_r$ 被抵消掉了. 其中 $R$ 是 Taylor 展式或 Ito 引理的高阶项, 这些项依赖于 $B(r_t,t,T)$ 的二阶导数 $B_{rr}$ 以及 $r_t$ 波动率. $S_r$ 近似为常量. 这意味着净头寸

$$\{借入\ B(t,T)\ 美元, 买一个 B(t,T), 卖空\ h_t\ 单位的\ B(t,T^s)\} \tag{14}$$

将具有图 9-4 底部所示的波动率头寸. 随着 $r_t$ 的波动, 通过买卖适当数量的非凸性资产来调整这个头寸. 每次调整时用到了 $h_t$ 的值, 如同第 8 章里那样, 我们可以"买低卖高". 通过这样的对冲调整, 持有这个长期债券的一方将得到 gamma 收益. 这些交易的所得随着波动率的增加而增加, 因此我们可以得到以下结论:

**其他因素保持不变时, $r_t$ 的波动率越大, 长期债券就越"值钱".**

这表明着随着波动率的增加, 如果其他条件相同, 那么凸性工具的到期收益相应地下降, 因为将会有更多的市场参与者进行这种交易, 从而导致了债券的价格上涨.

**例**

假设初始收益率曲线是 5%的水平直线, 一个 30 年期无违约风险的贴现债券

的价值为

$$B(0,30) = \frac{1}{(1+0.05)^{30}} \tag{15}$$

$$=0.23. \tag{16}$$

当 $r_{t_0} = 0.05$ 时, 债券的初始 delta $D_{t_0}$ 为

$$D_{t_0} = -\frac{30}{(1+r_{t_0})^{31}} \tag{17}$$

$$= -6.61. \tag{18}$$

一个 1 年期的短期债券假设近似为线性定价公式

$$B(t_0, T^s) = (1 - r_{t_0}) \tag{19}$$

$$=0.95. \tag{20}$$

做市商将贷款 0. 23 美元, 买入一个长期债券, 并且卖空

$$\frac{-6.61}{-1.0} \tag{21}$$

单位的短期债券对冲这个头寸 (假设近似线性的短期债券具有单位利率敏感性). 经过一个很小的时间 $\Delta$ 后, 所有利率会发生改变, $r_t$ 变为 6%, 这个组合的价值将变动

$$\Delta B(t,T) - h_t \Delta B(t,T^s) = \left[\frac{1}{(1+0.06)^{30}} - \frac{1}{(1+0.05)^{30}}\right]$$

$$- 6.61[(1-0.06) - (1-0.05)] \tag{22}$$

$$=0.009. \tag{23}$$

注意, 在计算此数值时, 我们假设时间变化很小, 因而只考虑了 $r_t$ 的变化. 从某种意义上说, 我们用了一种类似于偏导数的框架.

通过计算, 新的 delta 值为 $-4.9$, 于是调整后的组合应该卖空 4.9 单位的短期债券, 所以必须以每单位 0.94 的价格买入

$$(6.6 - 4.9) = 1.7 \tag{24}$$

单位短期债券, 部分偿还此前卖空所借的证券, 从而使组合头寸回到所期望的 delta 中性状态.

此交易利润为

$$1.7(0.95 - 0.94) = 0.017\text{美元}. \tag{25}$$

再过一个时期，随着 $r_t$ 的值下落到 $r_{t_2}=0.05$，这个循环又将重复进行. Delta 又将变化，组合再次进行调整，交易的利润不断累计.

本例的计算是近似的，因为没有考虑到头寸的所有成本. 例中首先假设了收益率曲线是平直的，但在后面此假设放宽了，收益开始波动，我们没提到该假设变动的原因. 原来，波动率为长期债券的持有者带来了附加收益，从而使得对长期债券的需求增加这样，如果其他条件相同，那么长期债券的收益率相对于短期债券降低了. 因此，波动率的引入改变了初始的收益率曲线.

### 9.3.2 成本

使用无违约风险贴现债券来构建一个长期波动率头寸的成本有哪些？首先是融资费用. 为了买进长期债券，必须以年利率 $r_t$ 贷款 $B(t,T)$ 的资金. 只要此头寸没有关闭，就会带来利息费用支出. 其次，随着时间的流逝，债券价格函数的凸性将越来越小，因此组合交易所得的变化对波动率变化的敏感程度变小. 最后，随着时间的变化，即使利率不回落，债券的价值也会自动地增加.

### 9.3.3 债券的偏微分方程

我们可以导出一个关于长期债券的凸性收益和维持这个波动率头寸成本的偏微分方程 (PDE)，在某些条件下，这个 PDE 有解析解，并用类似 Black-Scholes 的方法可以获得一个解析公式.

首先从形式上讨论这个 PDE，先来看看由于凸性带来的交易收益. 这些收益是由连续调整对冲比例 $h_t$ 而得到的. 前面我们已经看到，由于假设对冲工具关于 $r_t$ 是拟线性的，所以除了一个比例常数外，这个对冲比例本质上只依赖于 $B_r$. 随着 $r_t$ 的改变，其偏导数也会改变，它的改变量由二阶导数刻画. 这样，在一段很小的时间间隔 $\Delta$ 内，凸性收益是下面变量的函数

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\left(\sigma(r_t,t)r_t\sqrt{\Delta}\right)^2. \tag{26}$$

除了这里的 $\sigma(r,t_t)$ 是短期利率的波动率外，这跟普通期权情形很相似. 短期债券的利率敏感性被抵消掉了.

如果短期利率 $r_t$ 的模型具有风险中性动态机理：

$$\mathrm{d}r_t=\mu(r_t,t)\mathrm{d}t+\sigma r_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,T], \tag{27}$$

其中 $\sigma$ 为波动率百分比，是一个常数，这样在很小的一段时期 $\Delta$ 内[①]，gamma 收益

① 注意我们这里用的记号是：

$$\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}=B_{rr}. \tag{29}$$

简化为

$$\frac{1}{2}B_{rr}\sigma^2 r_t^2\Delta. \tag{28}$$

在这个 gamma 收益的基础上, 我们再加上 (减去) 头寸持有者的花费和收益. 在 Δ 时间内融资的利息支付为

$$r_t B(t,T)\Delta. \tag{30}$$

由于时间的推移, 债券得到累计利息, 凸性降低. 而卖空短期线性工具所得的利息正好和这个短期头寸的费用抵消. 因此, 其它损益为

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}\Delta = B_t\Delta. \tag{31}$$

这个头寸所承受的最后一个收益 (损失) 成分比普通期权的情形复杂很多. 在期权情形下, 标的股票是很好的 delta 对冲工具. 做市商卖出 $\frac{\partial}{\partial S_t}C(S_t,t)$ 单位的标的股票, 对冲这个期权头寸. 而现在这种情况下, 标的风险不是股票价格 $S_t$ 或某些期货合约, 标的风险是即期利率 $r_t$, 它本身甚至不是一种资产. 这也就是说, 对冲的不是 $r_t$ 本身, 而是一种间接影响 $r_t$ 的资产. 而且利率的随机性要求对未来的利息收入和费用进行筹划, 这些都将使得现金流分析复杂化.

这些复杂的问题可以通过引入适当的假设来处理. 在利率动态机理

$$\mathrm{d}r_t = \mu(r_t,t)\mathrm{d}t + \sigma r_t \mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T] \tag{32}$$

中, 假设波动模型中的**漂移项**$\mu(r_t,t)$① 表示即期利率在无穷小时段 d$t$ 内的**无风险期望变化**②. 利用这个漂移项, 我们可以将区间 Δ 内损益的最后一个成分表示为 (Vasicek(1997))

$$\mu(r_t,t)B_r\Delta. \tag{33}$$

将所有的收益和损失加在一起, 就得到这个凸组合的**净收益**

$$\frac{1}{2}B_{rr}\sigma^2 r_t^2\Delta + \mu(r_t,t)B_r\Delta - r_tB\Delta + B_t\Delta, \tag{34}$$

为了排除套利的存在, 这个和式必须等于 0. 消掉公共项 Δ, 就得到了债券的 PDE

$$\frac{1}{2}B_{rr}\sigma^2 r_t^2 + \mu(r_t,t)B_r - r_tB + B_t = 0. \tag{35}$$

PDE 的边界条件比普通期权的边界条件更简单, 它是

$$B(T,T) = 1, \tag{36}$$

即无违约风险债券在到期日 $T$ 时的面值.

① SDE 的定义请参考第 8 章附录.

② 第 11 章将深入讨论风险中性测度.

### 9.3.4 PDE 和条件期望

在这个 PDE 中, 未知量仍然是一个函数$B(t,T)$, 这个函数由随机过程 $r_t$、时间 $t$ 以及模型中的其他一些参数决定, 这些参数中最重要的就是短期利率的波动率 $\sigma$. 如果 $r_t$ 是连续复利的短期利率, 则 $B(t,T)$ 的解为下面的条件期望

$$B(t,T) = E_t^{\tilde{P}}[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u}], \tag{37}$$

其中 $\tilde{P}$ 是一个适当的测度. 换句话说, 对上面表达式的右边求偏导数, 然后代入 PDE 就能够使方程 (35) 的左边的和等于 0[①].

将它与期权作平行比较会很有意思. PDE 方程的解 $B(t,T)$ 基于一个特定的条件期望. 在普通期权的情形下, 如果期权的标的是股票价格 $S_t$, 并且满足 Black-Scholes 方程, 则期权的价格 $C(S_t,t)$ 也由一个类似的条件期望给出

$$C(S_t,t) = E_t^{\tilde{P}}[\mathrm{e}^{-r(T-t)}C(S_T,T)], \tag{38}$$

其中 $T$ 是到期日, $\tilde{P}$ 是某个适当的测度, 如果这个条件期望关于 $S_t$ 和 $t$ 是可微的, 并且偏导数满足相应边界条件的 Black-Scholes PDE 方程. 主要的区别就是 Black-Scholes 假设短期利率 $r_t$ 是常数, 而在债券中, 它是一个随机的过程.

这些讨论使得在第 8 章中关于期权的两种观点相一致. 如果我们将期权理解为一种方向性工具, 则等式 (38) 给出了在一个适当的测度下, 到期日时期权的期望收益. 上面的分析又表明这个条件期望是将 gamma 收益和头寸调整费用联系起来的 PDE 的解. 这两种解释是等价的.

### 9.3.5 从 Black-Scholes 到债券的 PDE

将债券凸性交易的结果与我们在普通期权中得到的结果进行比较, 可以更深入地理解金融中普遍使用的 PDE 方法.

在第 8 章中, 我们利用凸性交易得到了关于普通期权价格 $C(t)$ 的 PDE. 而本章讨论了无违约风险的贴现债券价格 $B(t,T)$ 所满足的 PDE, 得到的结果如下.

(1) 对一个标的资产是不分红的股票 (股票价格过程为 $S_t$)、交割价是 $K$、到期日是 $T$ 的普通期权, 我们已证明它的价格满足下面 "套利" 等式

$$\frac{1}{2}C_{ss}(\sigma(S_t,t)S_t)^2\Delta = (rC - rC_sS_t)\Delta - C_t\Delta, \tag{39}$$

其中 $\sigma(t,S_t)$ 是一年中的波动百分比, 波动率的这种写法表明它可能依赖于时间和 $S_t$.

① 这里主要应满足的条件是 $BB'$ 的 Markov 性.

根据这个方程, 为了排除任何套利机会, 在一段时间内 $\sigma$ 的动态对冲收益, 应该等于净融资费用加上时间价值的损失, 这样消掉公共项, 并引入边界条件后就得到了普通期权的 Black-Scholes PDE:

$$\frac{1}{2}C_{ss}(\sigma(S_t,t)S_t)^2 + rC_sS_t - rC + C_t = 0 \tag{40}$$

$$C(T) = \max[S_T - K, 0]. \tag{41}$$

如果假设 $\sigma(t,S_t)S_t$ 与 $S_t$ 成正比, 并且比例因子为 $\sigma$, 则

$$\sigma(S_t,t)S_t = \sigma S_t, \tag{42}$$

这个 PDE 就可以用解析的方法求解, 并且可以得到关于 $C(t)$ 的显示公式——Black-Scholes 方程:

$$C(t) = S_tN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{43}$$

$$d_{1,2} = \frac{\log\frac{S_t}{K} + r(T-t) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{44}$$

$C(t)$ 的偏导数满足前面的 PDE.

(2) 一个无违约风险的贴现债券 $B(t,T)$ 遵循类似的步骤, 但是有一些区别值得注意. 假设连续复利短期利率 $r_t$ 是唯一决定债券价格的因素, 则我们可以分离出由于 $r_t$ 的震荡和动态对冲所产生的凸性收益, 同样根据 “套利关系” 得到

$$\frac{1}{2}B_{rr}(\sigma(r_t,t)r_t)^2\Delta = (r_tB - \mu(r_t,t)B_r)\Delta - B_t\Delta, \tag{45}$$

这里的 $\sigma(r_t,t)$ 是短期利率 $r_t$ 一年内的波动百分比.

消掉公共项, 并加上边界条件, 我们就得到了债券的 PDE

$$\frac{1}{2}B_{rr}\sigma^2r_t^2 + \mu(r_t,t)B_r - r_tB + B_t = 0, \tag{46}$$

$$B(T,T) = 1. \tag{47}$$

在一些关于 $r_t$ 的特殊假设下, 这个 PDE 是可以解析求解的, 并且可以得到一个显示公式.

现在, 总节一下这两种分析过程之间的重要区别. 第一, 注意到普通期权 PDE 的前提是: 风险来自唯一地来自标的资产价格 $S_t$, 而对债券而言, 唯一的风险是利率 $r_t$, 但它本身不是一种资产. 第二, 前面提到的区别可以解释在债券的 PDE 中出现的 $\mu(r_t,t)$, 而在看涨期权的 PDE 中, 却没有类似漂移率的出现. $\mu(r_t,t)$ 表示在

不考虑利率风险因素的情况下, $\mathrm{d}t$ 时间内即期利率的期望变化值. 第三, $\mu(r_t,t)$ 本身可能依赖于其他的一些影响利率变化的参数. 很显然, 在这些条件下 $B(t,T)$ 的显示解会依赖于这些相同的参数. 相反对于一个普通期权来说, 并不存在上述问题, 其唯一的有关参数是 $\sigma$, 这一点很重要, 因为它可能会使得债券的价格公式依赖于标的随机过程的所有参数, 而在普通期权中, Black-Scholes 公式只跟波动率参数有关.

在结束本节前, 还有最后一个问题, 就是在某些关于 $S_t$ 的波动率的假设下, 从一个期权的 PDE 中我们得到了显示的 Black-Scholes 公式, 于是同样会问, 债券的 PDE 也有类似的解析解吗? 答案是肯定的.

### 9.3.6 债券的显示定价公式

在某些利率模型的假设下, 我们可以求解债券的 PDE 并得到显示解. 考虑三种复杂程度递增的情况.

每种情况所假设的利率模型不同.

1. 情形 1

第一种情况很简单, 假设 $r_t$ 为常数 $r$, 这种模型是平凡的,

$$\mathrm{d}r_t = 0, \tag{48}$$

其中 $\mu(r_t,t)$ 和 $\sigma$ 都是 0, 方程 (46) 中的债券 PDE 简化为

$$-rB + B_t = 0, \tag{49}$$

$$B(T,T) = 1. \tag{50}$$

这就是简单的普通微分方程, 方程的解为

$$B(t,T) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}. \tag{51}$$

2. 情形 2

第二种情况又叫做 Vasicek 模型[①]. 假设即期利率的风险调整动态机理服从一个均值回转过程[②]:

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(\kappa - r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,T], \tag{52}$$

其中 $W_t$ 是风险调整概率测度下的 Wiener 过程[③].

---

① 见 Vasicek(1977).

② 动态机理经过了风险调整这个事实并不平凡. 在风险中性测度下的这种动态机理可能会明显地与实际不同, 这个问题将在第 11 章中讨论.

③ 风险的调整以及相关的测度将在第 11 章中讨论.

注意波动率结构限定于常数绝对波动率, 表示为 $\sigma$. 假设参数 $\alpha, k, \sigma$ 是已知的, 那么 $B(t,T)$ 的 PDE 变为

$$B_r\alpha(\kappa - r_t) + B_t + \frac{1}{2}B_{rr}\sigma^2 - r_tB = 0. \tag{53}$$

利用边界条件 $B(T,T) = 1$, 这个 PDE 可以解析求解, 从而得到 $B(t,T)$ 的下述显示表达式

$$B(t,T) = A(t,T)\mathrm{e}^{-C(t,T)r_t}, \tag{54}$$

其中

$$C(t,T) = \frac{(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{\alpha}, \tag{55}$$

$$A(t,T) = \mathrm{e}^{\frac{(C(t,T)-(T-t))(\alpha^2\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2 C(t,T)^2}{4\alpha}}, \tag{56}$$

这里 $r_t$ 是 “当前” 即期利率的观察值.

3. 情形 3

第三种可以得到显示解的模型就是有名的 Cox-Ingersoll-Ross(CIR) 模型. 在 CIR 模型中, 假设即期利率服从稍微不同的均值回转型的随机偏微分方程

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(\kappa - r_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,T], \tag{57}$$

它又称为利率波动率的平方根模型. 这里的 $W_t$ 是在风险中性测度下的 Wiener 过程.

这个方程的显示解比 Vasicek 模型中的显示解形式上复杂许多, 它的表示如下

$$B(t,T) = A(t,T)\mathrm{e}^{-C(t,T)r_t}, \tag{58}$$

其中函数 $A(t,T)$ 和 $C(t,T)$ 为

$$A(t,T) = \left(2\frac{\gamma\mathrm{e}^{1/2(\alpha+\gamma)(T-t)}}{(\alpha+\gamma)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right)^{2\frac{\alpha\kappa}{\sigma^2}}, \tag{59}$$

$$C(t,T) = 2\frac{\mathrm{e}^{\gamma(T-t)} - 1}{(\alpha+\gamma)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}, \tag{60}$$

$\gamma$ 定义为

$$\gamma = \sqrt{(\alpha)^2 + 2\sigma^2}. \tag{61}$$

债券的波动率 $\sigma$ 决定了贴现债券期望收益中的风险溢价.

### 9.3.7 一般化

前面几节表明, 依赖于相同风险因素的两种工具, 只要呈现不同程度的凸性, 原则上就能够构建一个类似于第 8 章中期权的 delta 对冲的对冲策略. 但是否值得样做还得看波动率相对于交易费用和买卖价差的水平.

当一个市场参与者买进一个凸性工具并卖空一定数量的线性 (凸性较低) 工具时, 他会从更高的波动率中获利, 这时可以说这个头寸是波动率多头或者 gamma 多头, 这个交易商购买了 gamma. 相反, 如果凸性工具被卖空而买入一定比例的线性工具, 这样头寸会从标的波动率的下降中获利.

正如长期债券所表明的, 在某种程度上分离波动率的思想可以用在任何两种依赖于相同风险并具有不同凸性的工具中. 当然, 由于交易费用和买卖价差的影响, 可能使得波动率交易变得不可行, 但这是另外一个问题. 更重要的是, 如果收益率曲线由于第二个因素的存在而发生改变, 前面几节里提供的方法就不能保证获得凸性收益了.

## 9.4 凸性的来源

产生定价函数凸性的原因不止一种, 下面简略地讨论一些简单的情形, 我们将使用更一般的凸性定义.

### 9.4.1 盯市

首先考虑由于逐日盯市要求带来的一个小问题. 设 $f_t$ 表示期货每天的交割价格, 标的资产为 $S_t$, $F_t$ 为相应的远期价格, $r_t$ 为隔夜利率. 盯市意味着期货头寸随着期货交的改变每天都会发生盈利或亏损,

$$\Delta f_t = f_t - f_{t-1}, \tag{62}$$

其中 $t$ 的单位是天, 这里时间是离散的.

假设隔夜利率 $r_t$ 是随机的, 这时如果交易者接受 (支付) 盯市收益, 他就可以以更高 (或更低) 的隔夜利率借出 (或借入) 这笔资金, 如果 $\Delta f_t$ 与利率的变化不相关, 有

$$\Delta r_t = r_t - r_{t-1}, \tag{63}$$

盯市与不盯市没有什么区别.

但是, 当 $S_t$ 本身是一个利率产品或者一个价格与利率相关的资产时, $\Delta f$ 和 $\Delta r_t$ 这两个随机变量在一般情况下都是相关的. 比如说, 假设 $\Delta f$ 和 $\Delta r_t$ 的相关系数为正, 则当 $f_t$ 增加时, $r_t$ 也极有可能增加, 这意味着盯市的收益可以投资于更高

的隔夜利率. 如果 $\Delta f$ 和 $\Delta r_t$ 之间的协方差是负数, 情况正好相反. 远期合约则一般不要求盯市, 只是在到期日进行结算, 这使得每天账面上的得失不能以更高或更低的利率再投资或借入.

因此, 对于一份期货合约, 如果它的标的资产 $S_t$ 与 $r_t$ 是负相关的, 则期货的价格会比相应的远期便宜些. 如果 $S_t$ 与 $r_t$ 是正相关的, 则期货合约将会更贵些. 如果 $S_t$ 与 $r_t$ 不相关, 其他条件相同时, 期货合约和远期合约的价格是一样的.

**例**

考虑一个欧元期货. 我们在第 4 章中已经看到一个交割日在 $t+1$ 的一年期欧洲美元期货的价格是线性函数

$$V_t = 100(1 - f_t). \tag{64}$$

通常, 预期的隔夜利率 $r_t$ 与期货价格 $f_t$ 是正相关的. 因此, 本身非凸的价格函数 $V_t$ 与 $r_t$ 是负相关的, 这意味着欧洲美元期货将比相应的远期合约便宜, 也就是期货利率比远期利率更高.

盯市是期货利率和远期利率不同的一个原因.

### 9.4.2 设计凸性

有些产品设计出来就有凸性, 设计的合约明确规定了支付和潜在的风险, 这些规定可能会使得合约价格是标的风险的非线性函数. 存在凸性收益的最重要工具类当然是期权.

我们还讨论了债券的凸性收益, 对长期无违约贴现债券, 其价格若用到期收益率来表示时, 是简单的非线性函数

$$B(t,T) = \frac{100}{(1+y_t)^T}. \tag{65}$$

付息债券的价格也可以表示成类似到期收益率的函数. 假如付息债券的票息率是 $c$, 到期日为 $T$, 则其价格可以写为

$$P(t,T) = \left(\sum_{i=1}^{T} \frac{100c}{(1+y_t)^i}\right) + \frac{100}{(1+y_t)^T}. \tag{66}$$

可以证明无违约纯贴现债券或剥离 (strips), 比到期日相同的付息债券有更大的凸性.

1. 互换

考虑一个固定支付的普通利率互换, 起始日为 $t = t_0$, 结束日为 $t_n = T$. 根据市场惯例, $t_i$ 时设定的浮动利率在 $t_{i+1}$ 时支付. 为简单起见, 假设浮动利率是 12 个月的 USD Libor, 这意味着 $\delta = 1$. 在 $t = t_0$ 时互换利率记为 $s$, 名义本金 $N$ 为 1.

这样, 在时间 $t_0$ 时互换的价值为

$$V_{t_0} = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{L_{t_0}-s}{(1+L_{t_0})}+\frac{L_{t_1}-s}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}+\cdots+\frac{L_{t_{n-1}}-s}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+L_{t_i})}\right], \tag{67}$$

其中 $\{L_{t_0},\cdots,L_{t_{n-1}}\}$ 分别为在时间 $t_0,\cdots,t_{n-1}$ 时的随机 Libor 利率, $\tilde{P}$ 是某个适当的测度, 正确地选择这个测度, 使得我们可以用一个远期Libor 利率 $F(t_0,t_i)$ 来代替未来的即期 Libor$L_{t_i}$[①], 因此可以将前面定价公式写为

$$\begin{aligned}V_{t_0} =&\frac{L_{t_0}-s}{(1+L_{t_0})}+\frac{F(t_0,t_1)-s}{(1+L_{t_0})(1+F(t_0,t_1))}\\&+\frac{F(t_0,t_2)-s}{(1+L_{t_0})(1+F(t_0,t_1))(1+F(t_0,t_2))}+\cdots+\frac{F(t_0,t_{n-1})-s}{\prod_{i=0}^{n-1}(1+F(t_0,t_i))},\end{aligned} \tag{68}$$

其中 $F(t_0,t_0)=L_{t_0}$. 随着远期利率的改变, $V_{t_0}$ 非线性地变化.

如果假设收益率曲线是水平的, 并且所有的到期收益率都平行移动, 结果更显然. 在这些不真实的假设下, 我们有

$$L_{t_0}=F(t_0,t_0)=F(t_0,t_1)=\cdots=F(t_0,t_{n-1})=F_{t_0}. \tag{69}$$

互换公式变为

$$V_{t_0}=\frac{F_{t_0}-s}{(1+F_{t_0})}+\frac{F_{t_0}-s}{(1+F_{t_0})^2}+\cdots+\frac{F_{t_0}-s}{(1+F_{t_0})^T}, \tag{70}$$

化简得[②]

$$V_{t_0}=(F_{t_0}-s)\frac{((1+F_{t_0})^T-1)}{F_{t_0}(1+F_{t_0})^T}, \tag{72}$$

这个表达式关于 $F_{t_0}$ 的二阶导数对所有的 $F_{t_0}>0$ 是负数.

正如此特殊情形所表明的那样, 固定支付互换是标的远期利率的非线性工具, 它的二阶导数为负, 并且函数是关于一种 “典型” 的远期利率的凹函数. 这并不奇怪, 因为固定支付的互换所面临的风险和发行 3 年期债券的风险类似, 这意味着固定收入互换的定价公式是凸的, 并且与一个 30 年期付息债券的多头头寸具有类似的性质.

---

① 这种替换很微妙, 它依赖于很多条件, 其中一个是重置期 $i$ 决定的 Libor 实际上是在 $i+1$ 时交割的.

② 分子因式分解, 并利用等比数列求和公式:

$$1+a+a^2+\cdots+a^T=\frac{1-a^{T+1}}{1-a}. \tag{71}$$

**例**

图 9-5 描述了在收益率曲线水平且本身只能平行移动情况下得到的固定支付互换价值. 参数如下所示:

$$t = 0; \tag{73}$$

$$s = 7\%; \tag{74}$$

$$T = 30; \tag{75}$$

$$F_{t_0} = 0.06\%. \tag{76}$$

可以看到这个函数是非线性,, 凹的.

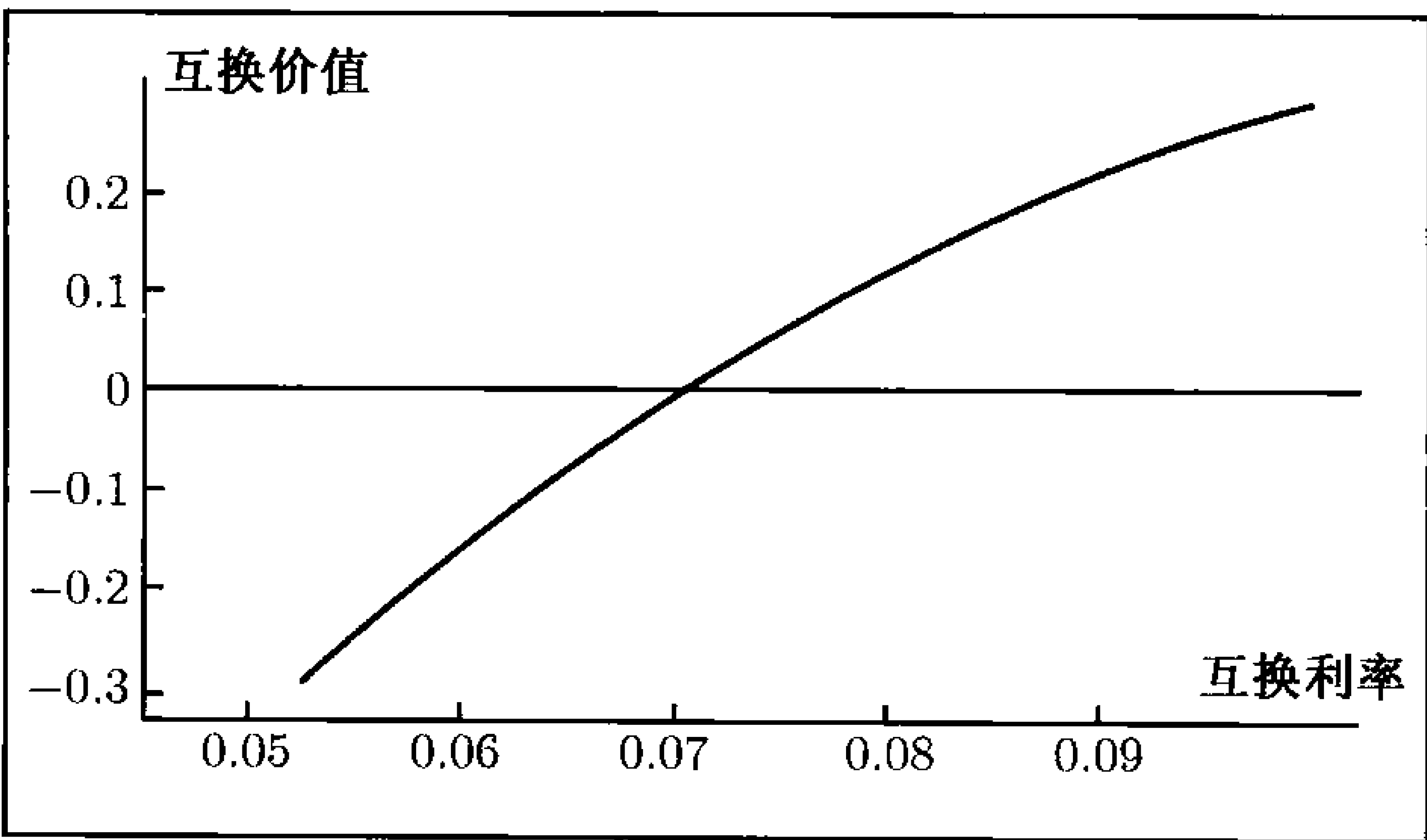



图　9-5

在第 15 章中, 我们将考虑另一类具有固定到期日的互换, 这种固定到期日互换的凸性是由它的结构决定的.

金融工具的凸性特征在考虑问题时显得非常重要, 从芝加哥交易委员会 (CBOT) 新发行的工具中, 我们就可以更好地理解这一点, 这种新发行的合约具有适当的凸性特征.

**例**

芝加哥交易委员会的董事们于上周批准了一项关于发行 5 年期和 10 年期利率互换期货和期权合约的决定.

据交易所称, 与柜台交易市场比较, 互换期货的交易可以减少管理费用, 消除对手违约风险.

一位 CBOT 的资深经济学家说, CBOT 的举动是交易所为成功发行互换期货合约所做的第二次尝试. 财政债券 (treasury) 早在十年前就成为无可争议的基准, 但是现在它们不再被视为定价的基准, 取而代之的是利用互换曲线.

新合约与 CBOT 在 90 年代中期退市合约的主要区别在于前者形式上是凸性的. 这位经济学家说, 注意到互换头寸是以凸性基础盯市, 所以终端使用者对之担忧较少. 旧合约的另一个严重缺陷是它每 3 年或 5 年发行一次, 而不是 5 年或 10 年的到期日, 而大多数交易的期限正好是 5 年或者 10 年.

交易所称, 新的互换合约将为诸如银行财务总管、抵押过手债券交易者、合约创立者、中介经理、资产组合经理这样的机构投资者以及其他 OTC 市场参与者提供一种对冲信用风险和利率敞口的载体. (IFR, 第 1393 期, 2001 年 7 月 21 日)

上述例子很好地说明了凸性在设计一个合约过程中的重要性. 交易商们用期货合约进行对冲, 如果对冲工具的凸性与所要对冲风险的凸性不同, 则对冲的效果就会因波动率的变动而恶化. 实际上, 随着波动率的增加, 工具的凸性越大, 产生的 gamma 收益也就越大, 这会影响到工具的价格.

2. FRA 的凸性

现在来考虑远期利率协议 (FRA). 正如第 4 章中所讨论的, 利用 FRA 可以在时间 $t_0$ 锁定与 Libor 利率 $L_{t_i}$ 有关的风险, 后者要在 $t_i$ 时才能观察到, 且其到期日用天数表达[①]. 问题是 FRA 在什么时候结算. 对此存在几种不同的方法, 因此导致稍微不同的工具. 下面介绍了三种类型的 FRA.

一种方法是在时间 $t_i$ 设置 $L_{t_i}$, 但是在 $t_i+\delta$ 结算, 这符合金融市场很 "自然" 的利息支付方法. 因此, 在时间 $t_0$, FRA 的价值将为 0, 在时间 $t_i+\delta$, FRA 的买方将视下面差值的正负号接受或支付

$$[L_{t_i} - F_{t_0}]N\delta. \tag{77}$$

FRA 的卖方则获得相反的现金流.

第二种 FRA 交易方法在金融市场中更常用, 与第一种合约唯一的区别在于这种合约在时间 $t_i$ 而不是 $t_i+\delta$ 时结算. 在时间 $t_i$, 当观察到 Libor 利率 $L_{t_i}$ 之后, FRA 的买方将接受 (支付)

$$\frac{[L_{t_i} - F_{t_0}]\delta}{1 + L_{t_i}\delta}N, \tag{78}$$

它等于第一种方法中获得金额按 $L_{t_i}$ 从时间 $t_i+\delta$ 到 $t_i$ 的贴现值. 图 9-6 给出的是一个 12 个月期的 FRA 的支付.

我们更感兴趣的是 FRA 合约的第三种交割方法, 也就是通常所说的 Libor 后付 FRA, 此时按 $t_i$ 时观察到的 Libor 在同一时刻按下式交割合约

$$[L_{t_i} - f_{t_0}]\delta N, \tag{79}$$

① 假设一年为 360 天.

这里 $f_{t_0}$ 是适用于这种特殊类型 FRA 的 FRA 利率[①]. 注意我们在这里没有使用记号 $F_{t_0}$, 因为由于凸性差异, 两种 FRA 利率一般是不同的.

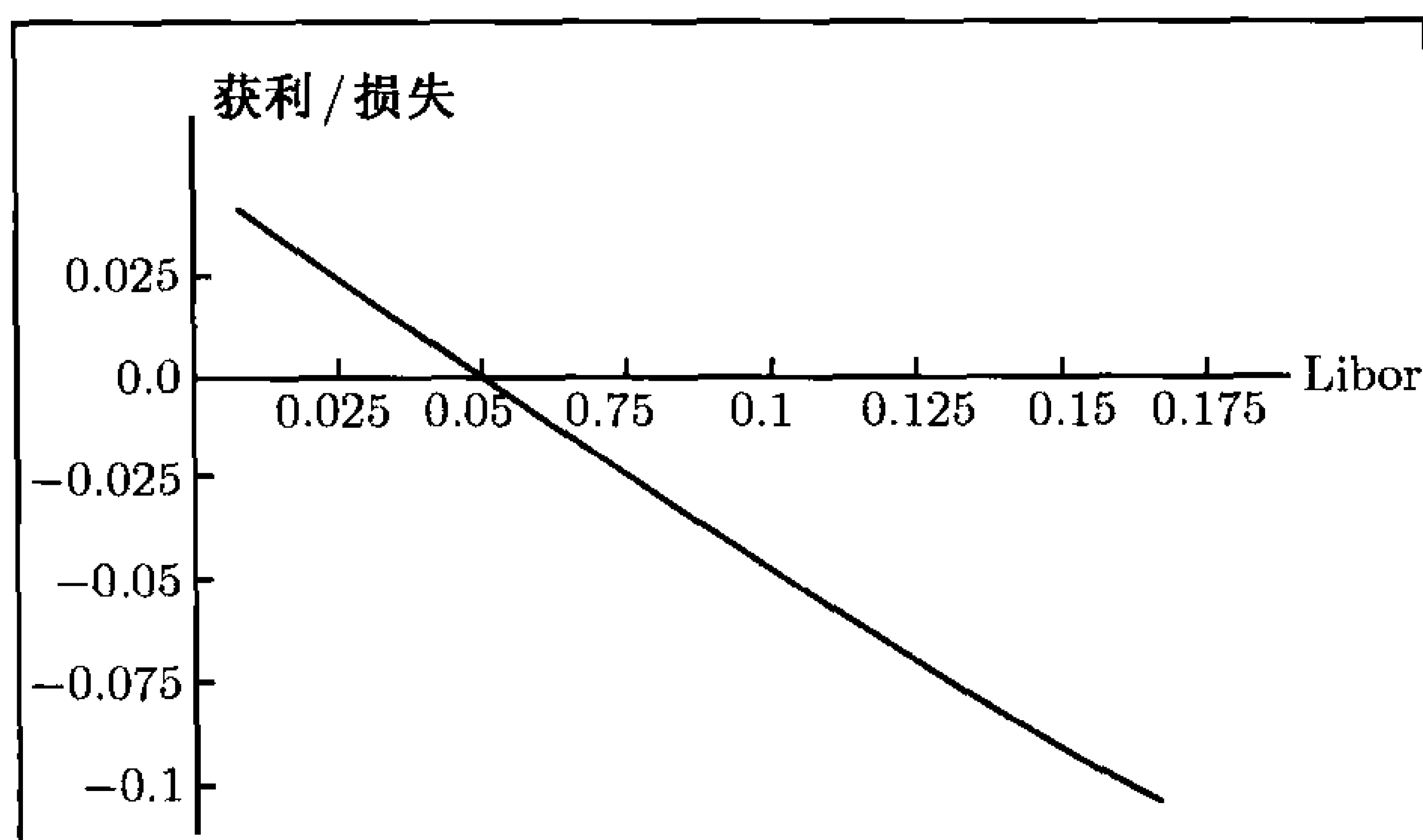



图 9-6

现在的问题是在什么条件下 $F_{t_0}$ 和 $f_{t_0}$ 不相同? 答案依赖于标的合约的凸性特征. 事实上, 市场参与者通过**凸性调整**因子来近似这些差别.

3. FRA 的凸性调整

正如前面所提到的, 存在着三类 FRA, 非流动性的后付 Libor FRA 在时间 $t_i$ 支付的现金流是

$$V_{t_i} = [L_{t_i} - f_{t_0}]\delta N, \tag{80}$$

其中 $\delta$ 是时间间隔, $N$ 是名义本金, $f_{t_0}$ 是此后付 LiborFRA 相关的远期利率. 注意, 估值公式是在 $t_i$ 时刻观察到的利率的线性函数.

在市场交易的 FRA 中, 将时间 $t_i$ 时的交割现金流进行贴现, 它们由下面式子给出

$$V^*_{t_i} = \frac{[L_{t_i} - F_{t_0}]\delta}{(1 + L_{t_i}\delta)}N. \tag{81}$$

这里, $F_{t_0}$ 是在第 4 章中讨论过的远期利率. 注意在将时间 $t_{i+1}$ 时收入的现金流进行贴现后, 在 $t_i$ 时观察到的利率也被用来计算同一时刻的支付额. 该公式关于此利率是非线性的.

可以使用第 8 章类似的论述证明远期利率 $f_{t_0}$ 和 $F_{t_0}$ 不可能相同. 如果这两个 FRA 利率一样, 由于等式 (80) 和 (81) 中的两个支付额具有不同的凸性特征, 市场参与者很有可能通过买进其中一种 FRA 并卖出 "恰好" 比例的另一种 FRA 获得额外的 (凸性) 收益[②]. 所以, 这两种 FRA 的利率报价会因为补偿这种凸性差异而有所不同.

---

① 类似地, 可以考虑这类 FRA 合约的后付 Libor 互换.

② 这是假设波动率足够高, 使得连续交易是有利可图的.

4. 互换利率调整

一般普通互换是凸性工具, 并且是后付的. 此外, 还有一种所谓的后付 Libor 互换, 这类互换将 $t_i$ 时刻的 Libor 利率用于 $t_i$ 时刻的交割, 它和普通互换的远期互换利率可以通过类似的凸性调整项彼此联系.

### 9.4.3 提前偿还期权

具有设计凸性的一类主要工具是与抵押贷款相关的证券. 抵押贷款是住宅或商业财产购买者所获得的贷款. 绝大多数固定利率的抵押贷款有一个很关键的属性, 它包含提前偿还 (Prepayment) 贷款的权利. 抵押贷款者有权利在任何时刻偿还剩余贷款, 并且只需要很小的交易费用, 这称为提前偿还期权. 它给抵押贷款相关的证券带来了负的凸性. 实际上, 提前偿还期权等价于标的资产是抵押贷款利率 $R_t$ 的美式看跌期权. 如果抵押贷款利率 $R_t$ 降到一个限度 $R^K$ 下, 则获得抵押贷款的人将通过以新利率 $R_t$ 再融资来偿还 (用 $N$ 表示的) 初始贷款余额. 这样一来, 抵押贷款人不会按照固定年利息 $R_{t_0}N$ 的支付流来偿还贷款, 因为他有权利 (而不是义务) 在某个时间 $t_i$ 偿还年利息 $R_{t_i}N$. 如果 $R_{t_i} < R_{t_0}$, 抵押贷款人可能会执行这个期权, 而对抵押贷款发行者来说, 情形正好相反.

提前偿还期权的存在为抵押贷款支持证券 (MBS) 和其他相关的资产种类创造了负凸性. 因为提前偿还期权包括了一列固定支付流和另一列固定现金流的交换, 所以很显然, 利率互换在这些期权的对冲和风险管理中起着关键作用. 我们将在第 18 章中讨论这个问题.

## 9.5 一种特殊的工具: 交叉货币工具

交叉货币型金融产品形成了一类主要的金融工具, 其中它们的价格依赖于相关性. 本章结束前, 我们通过讨论它们的凸性特征和其他问题详细考察和研究这类金融工具. 交叉货币工具可作为在第 8 章和第 9 章中所介绍方法的另一个实例. 关于交叉货币工具的定价将在第 12 章中讨论.

### 9.5.1 一个简单的例子

图 9-7 所示的是一个标准货币互换, 互换中有两列现金流, 分别是用美元和欧元支付的现金流, 互换的名义本金在初始时候交换, 并在结束日将再次交换. 在这个互换的有效期内, 基于美元 Libor 的浮动支付和基于欧元 Libor 的浮动支付相互交换. 当然, 在这些交换中存在着已知的小利差.

现在我们将图 9-7 所示的标准货币互换以一种有趣的方式进行一些修改, 让两个浮动 Libor 保持一样, 但要求所有的支付都用同一种货币, 比如说美元. 换句话

说, 以欧元 Libor 标度的现金流将用美元支付, 这个工具就被称为*交叉互换*, 或称*差别互换*. 在这样的互换中, 名义本金是相同的货币, 因此就没有必要对名义本金进行交换了, 只有净利率现金流的交换.

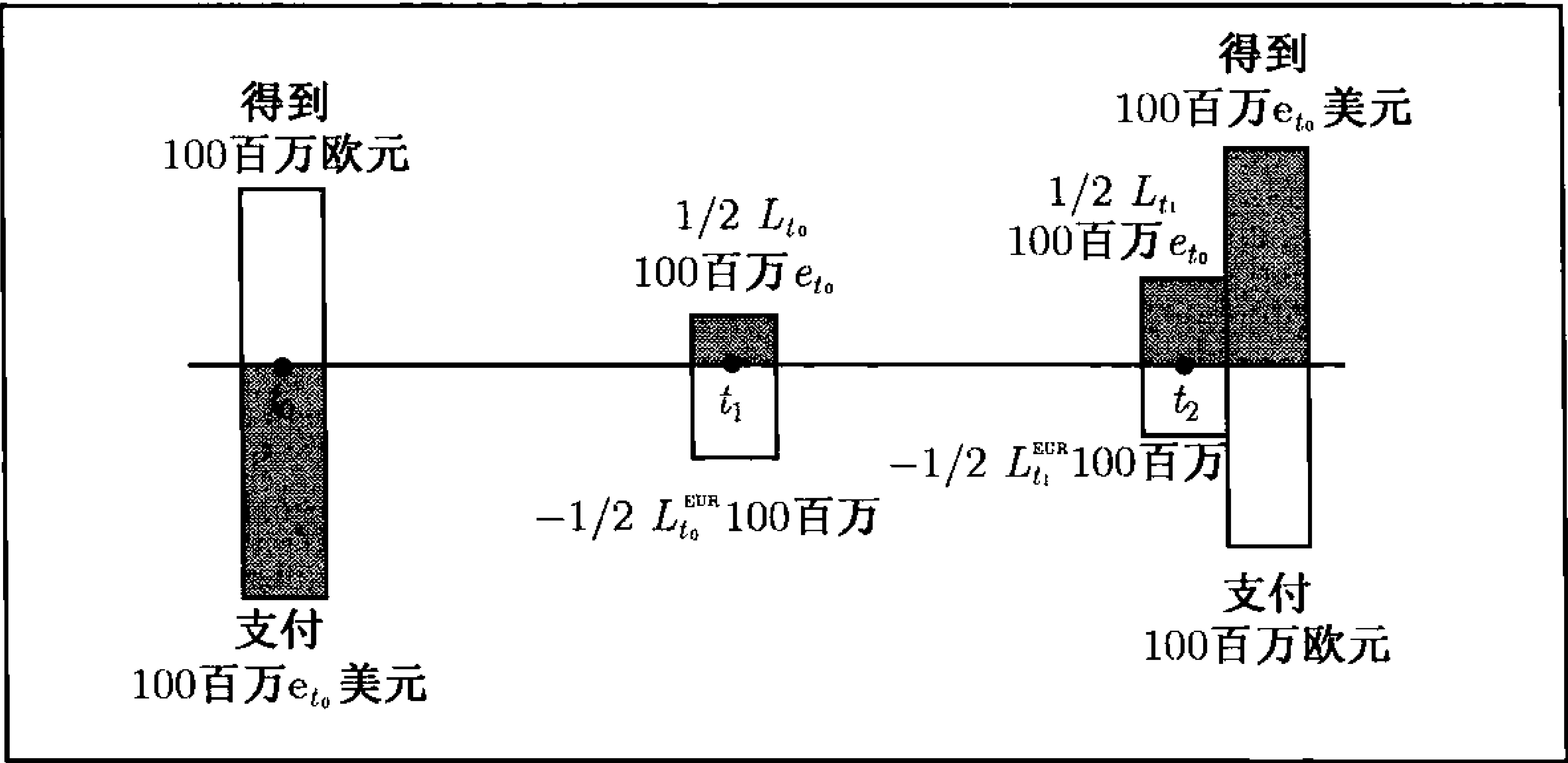



图 9-7

**例**

*假设名义本金为 3 千万美元, Libor 的报价如下所示:*

| TENOR | 日元 Libor | 美元 Libor |
|---|---|---|
| 3 个月 | 0.055 | 1.71 |
| 6 个月 | 0.185 | 1.64 |
| 12 个月 | 0.065 | 1.73 |

*在一个交叉互换中, 一方愿意在一年内得到 6 个月美元 Libor, 并支付 6 个月日元 Libor, 但是, 所有的支付都以美元进行, 比如说, 如果第一次交割是按照上表给出的 Libor 进行, 在 6 个月后这一方将得到*

$$30\,000\,000(0.016\,4)\left(\frac{1}{2}\right)-30\,000\,000(0.001\,85)\left(\frac{1}{2}\right)-30\,000\,000\left(\frac{1}{2}\right)c, \quad (82)$$

*其中 $c$ 表示固定的利差, 它将在交叉互换的定价中决定注意日元利率应用于了一个美元占优原则上.*

在这种类型的互换中双方都有利率差价风险敞口, 但是至少有一方消除了汇率风险敞口.

为什么人们对交叉互换感兴趣呢? 即使包括了利差 $c$, 用美元支付的利息,

$$日元\text{Libor}+c \quad (83)$$

也将明显小于美元 Libor 利率. 这样, 得到美元 Libor、支付日元 Libor(用美元) 的一方就有可能极大地降低融资费用. 相应地, 当两种主要货币的收益率曲线的近端

明显不同时, 市场也会从交叉互换中获利. 银行会将这些工具作为减少费用的方法推荐给他们的用户. 当然, 从客户的观点来看, 交叉互换仍然包含了利率风险, 并且有可能还存在汇率风险. 如果标的收益率曲线发生了非预期移动, 这时就会发生损失.

下面是一个关于英国英镑和瑞士法郎的交叉货币工具的例子.

**例**

由于欧洲经济处于交易周期中的一个异常点, 公司寻求将他们的债务转向融资费用最低的市场. 但是由于很多公司慑于国外的交换风险而影响市场的选择. 交叉货币工具的出现使得他们可以充分利用国内和国外两个市场.

利用交叉货币互换, 利息用另一种不同的货币支付, 并且汇率在互换的初始时间已经确定. 结果交叉货币工具在没有汇率风险的情况下提供了一种非国内收益率曲线的敞口.

最近几周里, 这类产品已经被证明对英国公司很有吸引力, 这些公司已进入了互换市场, 并在互换中作为支付方以瑞士 Libor 为参照利率而以英镑进行支付. 瑞士法郎 Libor 仍然相对低于英镑 Libor, 并且, 尽管公司最后将支付瑞士 Libor 加上一个利差, 融资的成本一般仍会低于普通的英镑融资. 交易可参考的还有德国 Libor 或日本 Libor.

但是, 衍生品的官员们也指出交叉产品远不是无风险的. 其中一位说到: "考虑到互换持有者要支付瑞士 Libor 和一个利差, 曲线不用收敛太多就可能使交易无法盈利. "(IFR, 第 1190 期, 1997 年 7 月 5 日)

权益交叉

一种交叉货币工具的概念也适用于其他的金融市场, 比如说, 一个国外投资者可能想要在不产生汇率风险的情况下获得日本股票市场的敞口. 此时, 交叉货币合约可以设计为关于日本股票指数益损以外国投资者的国内货币, 而不是以日元的形式每年支付给投资者.

### 9.5.2 定价

交叉合约的定价提出了有趣的金融工程问题[①]. 我们讨论一个简单的情况来说明. 首先, 固定标的资产. 假设我们所面对的是一种特定的国外股票 $S_t^*$, 不失一般性, 我们假设国内货币是美元, 国外货币是欧元, 股票是欧洲的.

一个基于美元的投资者可能会想买这种股票, 并且希望从欧洲市场潜在上涨中获利, 但不愿意持有欧元敞口. 为了满足他的要求, 银行会建议他通过一个交叉货币远期来购买这支股票. 选定到期日 $T$, 当时的美元/欧元的兑换比例 $e_t$ 用来计算

① 这是将在第 13 章中讨论的度量转换方法的一个例子.

时间 $T$ 的交割. 这个远期合约的美元价格是 $F_t$, 根据下式交割

$$V_T = (e_t S_T^* - F_t), \tag{84}$$

这里的 $V_T$ 是 $T$ 时刻合约的价值, 它是以国内货币度量的, 并且如果股票经过了充分估值后, 将为正, 否则的话, 将为负. $F_t$ 是关于 $S_t^*$ 的交叉合约的远期价格, 它要经过适当的定价策略确定.

### 9.5.3 定价的机制

假设当前时刻为 $t$, 关于 $S_t^*$ 的远期交叉货币合约的到期日是 $T = t + \Delta$, 还假设在时间 $T$ 只有三种可能的状态 $\{w^1, w^2, w^3\}$. 下面的表格给出了四种工具的可能值: 外国股票, 国外存款, 国内存款以及一个关于汇率 $e_t$ 的 FX 远期合约.

| 时间 $t$ 时的价格 | 状态 $\omega^1$ 下的价值 | 状态 $\omega^2$ 下的价值 | 状态 $\omega^3$ 下的价值 |
|---|---|---|---|
| $S_t^*$ | $S_{t+\Delta}^{*1}$ | $S_{t+\Delta}^{*2}$ | $S_{t+\Delta}^{*3}$ |
| 1 美元 | $(1+r\Delta)$ | $(1+r\Delta)$ | $(1+r\Delta)$ |
| $1e_t$ | $e_{t+\Delta}^1(1+r^*\Delta)$ | $e_{t+\Delta}^2(1+r^*\Delta)$ | $e_{t+\Delta}^3(1+r^*\Delta)$ |
| 0 | $f_t - e_{t+\Delta}^1$ | $f_t - e_{t+\Delta}^2$ | $f_t - e_{t+\Delta}^3$ |

表格的第一行给出了外国股票在未来的三种状态下的价值, 这些都以国外货币度量. 第二行代表了投资于国内储蓄账户的三种可能结果. 第三行给出的用 $e_t$ 单位美元购买 1 单位的国外货币, 然后再将单位货币以国外利率 $r^*$ 再投资的各种结果.

远期汇率的定价为

$$f_t = e_t \frac{1 + r\Delta}{1 + r^*\Delta}, \tag{85}$$

其中 $e_t$ 是当时的兑换率. 在此例子中, 我们假设国内和国外市场的利率分别是常数 $r$ 和 $r^*$. 现在考虑前面提到的现价为 $F_t$ 的交叉远期合约, 合约在 $T = t + \Delta$ 时交割. 根据不同的状态, 交割的数量是下面中的一个:

$$\{(S_{t+\Delta}^{*1} e_t - F_t), (S_{t+\Delta}^{*2} e_t - F_t), (S_{t+\Delta}^{*3} e_t - F_t)\}, \tag{86}$$

这些数额都是美元计量的. 那么 $F_t$ 的无套利价值是多少呢?

我们可以从所列出的四种工具中选出三种来构成一个投资组合, 使它复制 $e_t S_{t+\Delta}^*$ 在每种状态下的值, 组合中工具权重为 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, 这与第 7 章中的讨论类似. 例如, 使用前面三种工具, 在每个状态, 我们可以写出

$$\text{状态}\omega^1 \quad \lambda_1 S_{t+\Delta}^{*1} e_{t+\Delta}^1 + \lambda_2(1 + r\Delta) + \lambda_3 e_{t+\Delta}^1 (1 + r^*\Delta) = S_{t+\Delta}^{*1} e_t, \tag{87}$$

$$\text{状态}\omega^2 \quad \lambda_1 S^{*2}_{t+\Delta} e^2_{t+\Delta} + \lambda_2(1+r\Delta) + \lambda_3 e^2_{t+\Delta}(1+r^*\Delta) = S^{*2}_{t+\Delta} e_t, \tag{88}$$

$$\text{状态}\omega^3 \quad \lambda_1 S^{*3}_{t+\Delta} e^3_{t+\Delta} + \lambda_2(1+r\Delta) + \lambda_3 e^3_{t+\Delta}(1+r^*\Delta) = S^{*3}_{t+\Delta} e_t. \tag{89}$$

这些等式的右边是以当时的汇率计算外国股票的未来价值, 左边是复制投资组合在某个状态时的价值.

三个方程三个未知数, 一般情况下, 可以解出 $\lambda_i$ 的值. 一旦组合的权重确定以后, 构建组合的当前成本给出了这个交叉合约的价格

$$\lambda_1 S^*_t e_t + \lambda_2 + \lambda_3 e_t. \tag{90}$$

此美元表示的金额是 $T$ 时的值, 因为合约的交割是在 $T$ 时刻进行, 所以我们有

$$F_t = [\lambda_1 S^*_t e_t + \lambda_2 + \lambda_3 e_t](1+r\Delta). \tag{91}$$

**例**

假设前面表格前三行的数据如下表:

| 时间 $t$ 时的价格 | 状态 $\omega^1$ 下的价值 | 状态 $\omega^2$ 下的价值 | 状态 $\omega^3$ 下的价值 |
|---|---|---|---|
| 100 | 115 | 100 | 90 |
| 1 美元 | (1+0.05Δ) | (1+0.05Δ) | (1+0.05Δ) |
| 1 欧元 ×0.98 | (1+0.03Δ)1.05 | (1+0.03Δ)0.98 | (1+0.03Δ)0.90 |

那么交叉远期的价格是多少?

建立三个方程

$$\lambda_1(1.05)115 + \lambda_2(1+0.05\Delta) + \lambda_3 1.05(1+0.03\Delta) = 0.98(115), \tag{92}$$

$$\lambda_1(0.98)100 + \lambda_2(1+0.05\Delta) + \lambda_3 0.98(1+0.03\Delta) = 0.98(100), \tag{93}$$

$$\lambda_1(0.90)90 + \lambda_2(1+0.05\Delta) + \lambda_3 0.90(1+0.03\Delta) = 0.98(90). \tag{94}$$

为了简单起见, 我们选择 $\Delta = 1$, 于是

$$\lambda_1 = 0.78, \tag{95}$$

$$\lambda_2 = 60.67, \tag{96}$$

$$\lambda_3 = -41.53. \tag{97}$$

借入 42 单位的国外货币, 借出 61 单位的国内货币, 买进 0.78 单位的国外股票就能够复制 $t+1$ 时刻的交叉合约的价值. 这个组合的价格为

$$100\lambda_1 0.98 + \lambda_2 + 0.98\lambda_3 = 96.41. \tag{98}$$

如果此金额在 $t+\Delta$ 支付, 则它正好等于 $F_t$ 的无套利值

$$F_t = (1.05)96.41 = 101.23. \tag{99}$$

这个例子表明交叉工具的价值与汇率和国外股票运动的相关系数有关. 如果相关系数为 0, 则此交叉远期与标准的远期有相同价值; 如果相关系数是正 (负) 的, 则交叉远期将比标准远期的价值少 (多). 上面的例子中, 汇率和外国股票是正相关的, 所以交叉工具比国外股票的初始价值小.

### 9.5.4 凸性的作用

前一节的讨论已经证明了, 在单周期和三状态情形, 我们可以构造一个投资组合来复制交叉货币工具在未来某个日期的支付. 但是当状态数增加和时间连续时, 这种类型的复制组合需要进行再调整. 但投资组合的调整会因此视相关系数符号产生正或负的收益, 就像期权那样. 这就是波动率起作用的地方. 在交叉货币工具情形, 至少涉及两种风险, 就是汇率风险和外国股票或外国利率风险, 它们之间的协方差同样也影响着定价.

由于再平衡过程中所实现的交易收益, 这种交叉货币产品在 $t_0$ 时刻具有正或负的价值. 于是交叉产品形成了具有以下特征的另一类资产: 这些资产的二阶敏感性是不能忽略的, 由此导致它们的价格依赖于方差和斜方差.

### 9.5.5 实际中的考虑

初看交叉资产, 它似乎对投资者和组合管理经理很有吸引力, 毕竟它使得关于国外资产的合约在购买该外国资产时消除了所有的货币风险. 但这是否意味着我们可以无限制地使用交叉工具呢?

实际中关于这种工具的问题很复杂. 首先, 购买一份交叉工具可能需要前期支付, 而且交叉工具的性质依赖于标的资产和标的外币汇率的风险溢价, 询价差和交易费用. 它们可能会很高, 以至于最终使用一份外国货币的远期来近似地对冲更合算.

其次, 交叉资产具有有效期. 如果因为某些不可预见的原因, 合约在到期之前失效了的话, 就有可能产生更多的费用. 更重要的是, 如果持有外国资产超过了有效期, 这种交叉特性就不起作用了.

最后, 交叉合约依赖于两种风险因素间的相关性, 这种相关性可能并不稳定. 在某些条件下, 建立这种交叉资产头寸的一方可能会暴露给相关性参数的敞口, 因而会极大地影响交叉合约的盯市价值.

## 9.6 结　论

定价方程依赖于一个或多个风险因素. 当定价函数是非线性的, 复制策略使用线性资产并且复制组合中的各个工具的权重将进行周期性调整, 这样, 在对冲的过程中, 就会产生正的或负的现金流. 如果标的波动率和相关系数是显著的, 从这些对冲所获得的交易收益会超过定期调整所带来的交易费用, 并且隐含的非线性性可以用于交易.

在本章中, 我们看到了两个基本的例子. 第一个来自固定收入工具, 它使得具有凸性的债券更有价值. 第二个是交叉工具, 同时引入的还有风险的协方差, 关于交叉工具的这个例子是期限结构涉及多个因素时的很好实例, 在这样的条件下, 波动率以及标的风险之间的协方差可能变得至关重要.

## 参考文献

Tuckman(2002)与Jegadeesh, Tuckman(1999) 介绍了如何从固定收益工具中分离出凸性收益. 在 Hull(2002) 中, 研究了期货和远期之间的凸性差别. 本章所用到的交叉性讨论出自 Piros(1998), 它收录在 DeRosa(1998), Wilmott(2000) 中关于交叉资产的讨论也很精彩. Hart(1997) 也是本章很好的参考资料.

## 习　题

1. 假设给定如下的无违约风险长期债券:
   面值: 100,
   发行价: 100,
   货币类型: 美元,
   期限: 30 年,
   息票率: 6%,
   没有隐含期权.

此外这个市场没有询价差和交易佣金. 最后, 收益率曲线是平直的, 并只能平行移动.
有一种 1 年 Libor 利率的期货合约, 合约的价格由下式决定:

$$V_t = 100(1 - f_t), \tag{100}$$

其中 $f_t$ 是关于 1 年 Libor 的 "远期利率".

(a) 证明: 如果这个 30 年期债券的收益率是 $y_t$, 则在所有时刻有

$$y_t = f_t. \tag{101}$$

(b) 描绘出债券和期货合约的价格函数.

(c) 假设现在的收益率 $y_0$ 是 7%, 构建一个关于收益率曲线的运动是 delta 中性且成本为 0 的投资组合.

(d) 考虑下面 1 年期收益率的变化:

$$9\%, 7\%, 9\%, 7\%, 9\%, 7\%, \tag{102}$$

那么这段时间的凸性收益是多少?

(e) 其他的费用是什么?

2. 给定一个收益率为 $y$ 的 30 年期债券, 收益率曲线是平直的, 并且只平行移动. 还有一种流动性的 3 个月欧洲美元合约. 初始时, 可以按 5% 的利率借贷.

(a) 使用这个长期债券和欧洲美元合约构造一个对利率变化免疫的 delta 对冲组合.

(b) 假设在一年内观察到了下面的利率变化:

$$\{0.06, 0.04, 0.06, 0.04, 0.06, 0.04\} \tag{103}$$

这些观察每两个月进行一次. 从一个波动率的多头头寸中获得的凸性收益是多少?

3. 考虑前面问题中所给的数据.

假设预期的运动与前面的问题一样, 市场参与者突然移动到一个预期的轨道, 比如

$$\{0.08, 0.02, 0.08, 0.02, 0.08, 0.02\}. \tag{104}$$

并假设这是市场唯一的外生变化, 那么你认为 30 年期债券的收益率会发生什么样变化?

4. 假设收益率曲线时平直的, 并且只能平行移动, 如果 FRA 利率预期围绕以下初始利率波动, 计算 Libor 后付 FRA 与市场交易线性 FRA 之间的利差:

$$\{+0.02, -0.02, +0.02, -0.02, +0.02, -0.02, \} \tag{105}$$

# 案例分析

## 长期债券、互换的凸性和套利

一个长期债券的收益率就是你持有债券所能获得的收益. 这句话对不对呢? 错. 你可以获得更多.

原因是因为债券和互换具有凸性. 如果存在着两种工具, 一种是线性的另一种是非线性的, 并且它们的价格是相同风险因素的函数, 我们就可以构造一个组合, 这个组合是 delta 中性的, 并且能够保证一定的正回报.

这是一个很复杂也很令人迷惑的概念, 我们的目的是希望通过这个案例分析使问题变得明朗一点.

这个案例初看起来很简单. 仔细阅读市场专业人士所建立的套利头寸, 然后回答下列问题.

## 问题

1. 长期债券的凸性是什么意思?
2. 长期利率互换的凸性又是什么意思?
3. 通过一个图表解释凸性的概念.
4. 如果债券是凸性的, 那么哪种固定收入工具不是凸性的呢?
5. 描述 FRA 的现金流. 市场中的 FAR 什么时候交割?
6. FRA 的凸性调整是什么?
7. 什么是上限? 通过上限, 买卖的是什么波动率?
8. 回到实际问题, 解释这些专业人士所建立的头寸.
9. 特别地, 这个头寸是建立在利率或其他某种东西的方向上吗? 你能解释为什么这些专业人士用上限和下限对冲他们的头寸吗?
10. 他们是不是只能用上限来对冲? 下限是不是同样可行呢? 用图表解释你的答案.
11. 这是不是一个真的套利? 存在风险吗?

互换市场上一些老练的交易者 (至少是那些一直愿意在数量分析家们身旁工作的人) 直到最近还一直玩着一种胜人一筹的游戏, 这些游戏对他们那些幼稚得多的银行对手是不利的. 通过考虑长期互换的凸性影响, 他们利用对手的无知来获利, 这些对手不明白有什么理由要改变自己的估值方法.

更特别地几个月前, 一些华尔街美元互换交易商, 据说包括 JP 摩根和高盛, 意识到当对后付 Libor 互换定价时, 它们的互换价值比人们眼见的更高. 根据伦敦交易商们说, 他们已开始从自己的定价模型与那些依靠简单传统方法定价的交易商所使用的模型之间进行套利了. 交易是这样的: 这些交易商们接收后付 Libor, 而在开始时支付 Libor, 交换的本金通常是 1 亿美元.

根据互换的长度以及 Libor 的重置间隔, 无论收益率曲线的形状怎样, 他们都可以从交易中得到附加的 8bp 至 10bp 的收益, 而对方, 援引一位交易商的话说, 则 “眼看着在互换的生存过程中, 钱滴滴答答地流淌干净, 即使他们认为自己已进行了很好的对冲”.

这个额外的价值只是在长期互换中表现得很明显, 它们的期限通常是 5 年或 10 年, 尤其是那些基于 12 个月 Libor 而不是更传统的 6 个月 Libor. 这个价值是由于收益率和固定收益工具之间共同的凸性效用产生的.

因此支付长期凸性, 并且在将其运用于后付 Libor 结构时我们已在该年早些时候证明了这是有利可图的. 第一批交易发生在纽约, 并且被局限于美元市场, 但是在五月初, 一些其他投资者知道了这些市场的信息, 他们也决定在伦敦运用同样的方法. 一个交易商对不同银行间交易商之间交流的缺乏感到吃惊, 同时这样是允许这种套利在银行之间以及通过互换经纪人继续存在.

这位交易商还说: “没有一个美国银行主动利用其他货币中这种机会.” 他表示: “你可以在英镑中运用同样的策略, 因为凸性对所有的货币都存在.”

实际上, 五月份中的一天英镑市场里充满了这样的交易, 据一个英镑互换交易商说, 交易 “持续了好几天, 直到每个人都变动自己的报价, 有效地减少了进一步的套利机会, 同时也使这种套利难于建立头寸”.

这类交易结构的成功离不开上限波动率, 因为额外价值的获得, 除了要 delta 对冲互换外, 还要卖出一定数量的上限, 这样才能在任何性质的收益率曲线下分离出这个价值.

一个交易商说: “在某些上限市场, 如日元, 波动率的水平不足以用来完成这项交易.” 最近, 大多数的这类银行间活动都发生在美元、英镑或澳洲美元市场中.

随着银行逐渐认识到这种套利的存在, 使得至少在同业银行之间的这类市场中, 套利的机会变得越来越小, 但是正如一位交易商评论到: “这种结构成功的原因是因为互换交易商认为他们知道怎样用过去的方式定价后付 Libor 互换, 并且坚持使用这些方法. ”

他补充道: “后付 Libor 时不考虑凸性效应, 如同免费卖出期权, 只要交易商仍然使用旧的定价方法, 套利的机会就会存在. ”

尽管伦敦的 BZW(它在市场上一直存在) 承认它将这样的套利视为向其客户分发额外收益的一个途径, 但是很多大的互换交易商拒绝对此发表评论, 这表明这样的市场仍然存在. (IFR, 第 1092 期, 1995 年 7 月 29 日)

# 第 10 章　期权工程及其应用

## 10.1　引　　言

本章从金融工程角度讨论传统的期权策略, 并列举了一些基于市场的案例, 然后讨论奇异期权 (exotic option). 通常我们关心的是这样的组合或头寸: 在建立这些组合或头寸时清楚地知道有关它们的赢–亏情况. 市场参与者有意识地承担风险, 目的是想从市场上某种风险因素的预期变化中获益, 或当此因素向不期望的方向变动时得到保护. 绝大多数投资者的行为都是这种类型. 譬如, 投资者以较高的 (系统) 风险买入一种股票, 就是希望获得更高的回报. 一个高收益的债券往往有较高的违约概率, 而债券持有者为了获得债券的高收益就愿意承担这种高风险. 对所有不同的金融工具来说, 影响投资者持有头寸的收益或损失的风险因素往往有一个或多个. 投资者把这些风险因素潜在变化所带来的风险与收益进行权衡, 当然前提是投资者对这些风险因素变化趋势的预测是准确的. 有些对冲行为也可以类似地解释. 本章主要研究运用期权实现这些目的的技术和策略. 我们将考虑经典 (普通) 期权和现代 (奇异) 期权.

根据现代金融学的一个重要理论, 如果所有到期日的期权都存在, 那么通过精心挑选的期权投资组合可以复制投资者或对冲者所期望的任何赢–亏组合. 我们也可以利用仔细选择的期权的 (静态) 组合来构造合成资产.[①] 投资者持有一项金融头寸时总是会关心它的支付, 所以我们从支付图表开始讨论.

**支付图表**

令 $x_t$ 为一个随机变量, 表示某一风险因素在 $t$ 时的值, 并令 $f(x_T)$ 为一函数, 若已知 $x_T$ 在 $T > t$ 时的值, 那么它表示任意给定的金融工具在到期日 $T$ 时的支付. 我们把 $f(x_T)$ 称为一个支付函数. 如果合约订好了, 那么支付函数 $f(\cdot)$ 的形式就是已知的.[②] 在教科书中习惯用图 10-1 或图 10-1b 来表示 $\{f(x_T), x_T\}$ 这一对变量的关系. 注意到这里我们得到了一个只取决于 $x_T$ 值的非线性上升的**支付函数**. 虽然图 10-1 中的支付函数图是任意画出来的, 然而它还是揭示了金融敞口的某些一般原理. 下面我们就来回顾一下这些基本原理.

---

① 这只是理论结果, 它的条件是所有到期日的期权均存在. 实际上这是不能实现的, 但该结果还是近似成立的.

② $x_t$ 可以看成一个 $k \times l$ 的风险因素向量. 为了简化讨论, 我们把它当成单个的风险因素, 并假设 $x_t$ 是一个标量随机变量, 即只考虑大小不考虑方向.

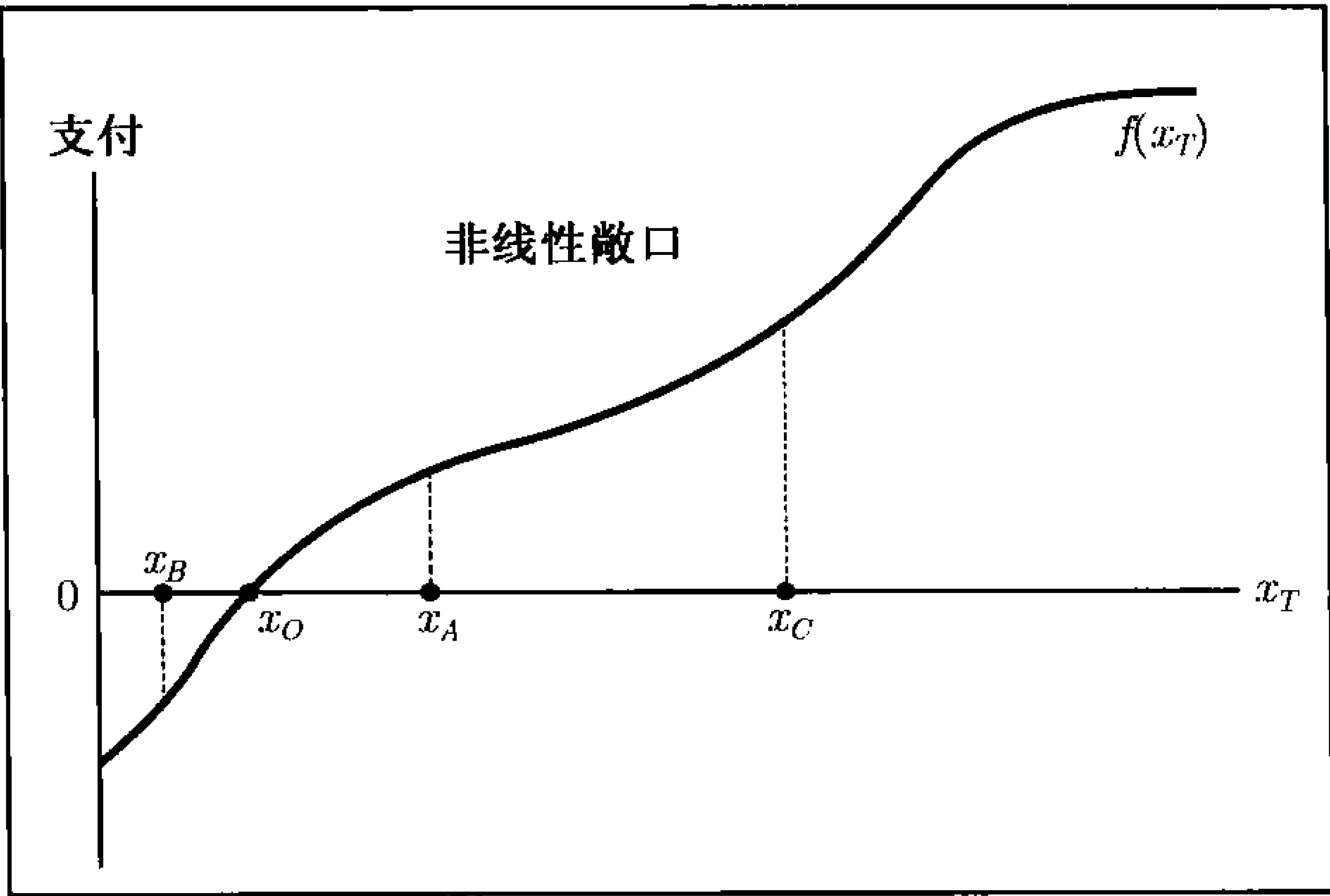



图 10-1

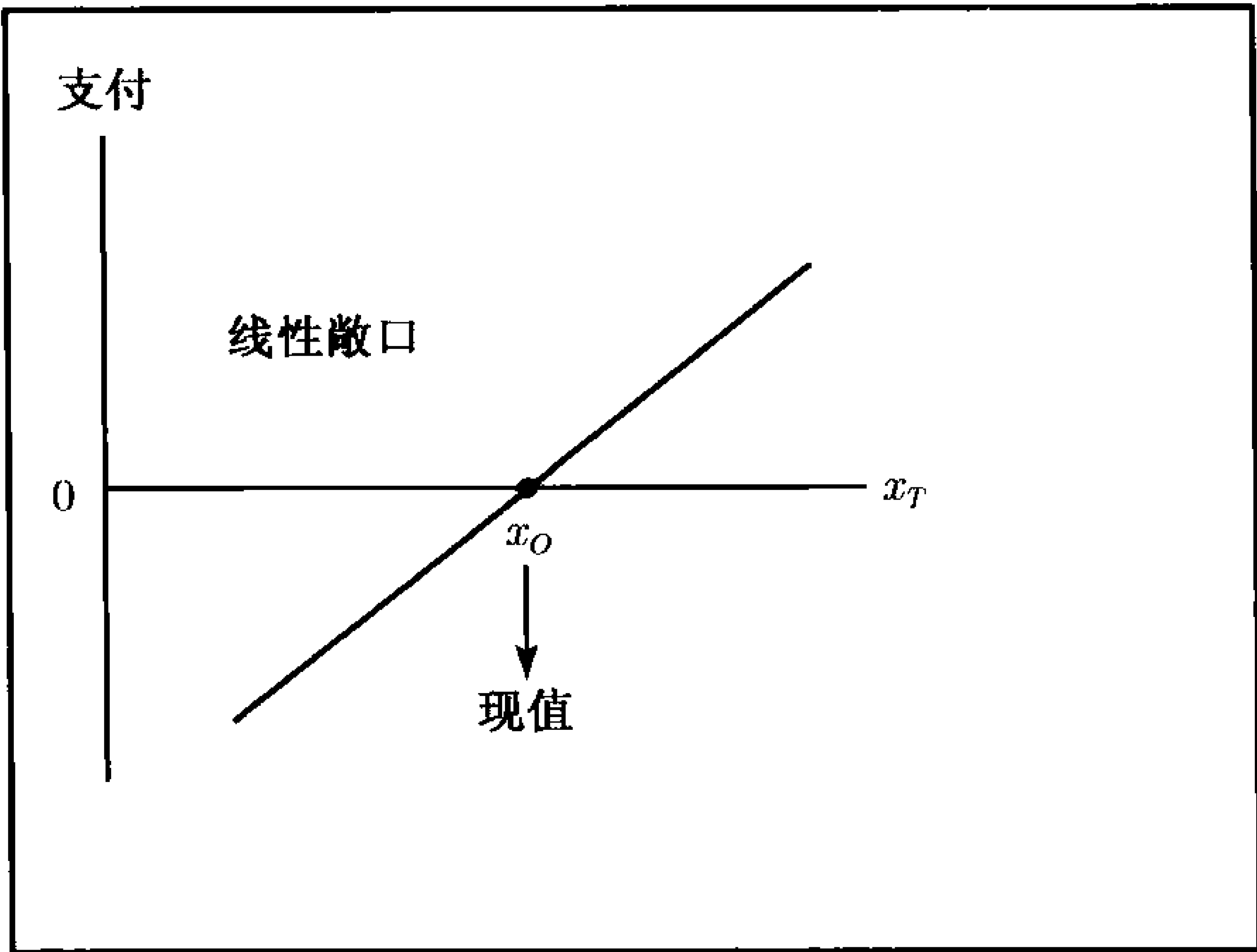



图 10-1b

首先, 对初值为 0 且公平定价的敞口来说, 对于标的风险的某些值, 风险因素 $x_T$ 的净敞口必定为负. 否则, 我们将会获得无风险的正收益, 且没有损失的风险, 这就产生了套利机会. 互换型金融工具就是这种类型. 相反, 如果合约最终的支付对于 $x_T$ 的所有取值都是非负的, 那么这个敞口的初值就应该是正的, 投资者为了持有这个头寸就必须进行一个先期支付. 显然期权头寸就有这样的特征.

其次, 支付函数 $f(x_T)$ 关于 $x_T$ 可以是凸的、凹的或者是线性的, 这跟投资者或市场专业人士有关. 线性性质的含义很明显: 即这个头寸关于 $x_T$ 的变化的灵敏度是常数. 第 8 章和第 9 章讨论了凸性. 因为凸性的关系, 进行相关的定价时必须把波动率的变化考虑在内, 期权就是这种金融工具里重要的一类.

最后, 值得一提的还有支付函数 $f(x_T)$只取决于标的风险 $x_T$ 的值, 而与其他

外来的风险无关, 这是比较好的. 在第 8 章和第 9 章中, 我们看到波动率头寸就不符合这样的要求. 第 14 章将详细讨论这个问题.

$x_t$ 的例子

到目前为止都是讨论抽象的标的 $x_t$. 标准可以是我们能想到的任何风险. 下面列举了几种常见的 $x_t$ 的例子.

- *各种利率*. 最好的例子是 Libor 利率和互换利率. 商业票据 (CP) 利率、联邦基金利率、隔夜利率指标 (譬如 EONIA, Euro Over Night Index Average), 还有许多其他的利率也被用作参照利率.
- *汇率*. 特别是几种主要的汇率, 像美元对欧元、美元对日元、美元对英镑及美元对瑞士法郎.
- *股票指数*. 关于股票指数也有很多例子, 除了众所周知的美国股票指数, 如道琼斯 (Dow)、纳斯达克 (Nasdaq) 和标准普尔 500, 还有欧洲股票指数, 如 CAC40, DAX, 和 FTSE100, 此外还有各种亚洲股票指数, 像日经 225 和一些新兴的市场指数.
- *商品*也是非常合适的标的物. 咖啡期货、大豆期货和能源期货也是 $x_T$ 的例子.
- *债券价格指数*. 其中的一个例子是 JP 摩根为了开拓新兴市场债券而制定的 EMBI +.

  除了这些常见的风险, 还有一些更复杂的标的, 它们是金融市场活动的主要要素.

(1) 本章讨论的期权头寸标的可以表示*波动率*或方差. 如果我们用 $\sigma_t$ 表示一个价格在 $t$ 时的百分比波动率, 那么标的 $x_T$ 在 $T$ 时的值可以定义为

$$x_T = \int_t^T \sigma_u^2 S_u^2 \mathrm{d}u, \tag{1}$$

这里 $S_t$ 可以是任何风险因素. 那么 $x_T$ 表示在区间 $[t, T]$ 上 $S_t$ 的*总方差*, 波动率是方差的算术平方根.

(2) 两个风险因素的*关联*可以类似地处理.

(3) 标的 $x_t$ 也可以表示与对手或金融工具相关的*违约*概率, 一般出现在信用工具的情形中.

(4) 标的 $x_t$ 还可以表示*非常事件*发生的概率, 这样我们可以构造一个 “Cat” 工具, 然后用它来买保险以预防各种灾难性事故.

(5) 标的 $x_t$ 也可以表示*非储存型*的电、天气或带宽等.

对这类合约或市场的细节感兴趣的读者可以参阅 Hull(2002), 本章重点关注的是期权合约的金融工程方面.

# 10.2 期权策略

期权策略可以分成两大类. 首先, 考虑和标准期权相关的经典方法, 包括做市商和零售投资者使用的策略. 这些又可以进一步分成两类: 一类是方向策略, 另一类是与人们对某种标的工具波动率的看法有关的策略. 第二大类的期权策略涉及奇异期权. 通常认为奇异期权策略比普通期权策略更有效且更便宜. 标的风险可以是第 1 节提到的任何一种风险因素.

### 10.2.1 合成的多头头寸和空头头寸

我们现在运用期权作为方向性工具来合成某种资产的*多头*和*空头*头寸. 期权可以用来合成地创造这些头寸.

考虑两个以某资产的*远期*价格 $F_t$ 为标的的普通期权. 第一个是空头卖出期权, 第二个是多头买入期权, 价格分别是 $P(t)$ 和 $C(t)$, 如图 10-2 所示. 两个期权有相同的执行价 $K$ 和到期日 $T$.① 假设 Black-Scholes 条件成立, 且两个期权都为欧式期权. 更重要的是, 标的资产在 $[t,T]$ 之间无任何支付. 假设标的资产在 $[t,T]$ 上没有任何支付且用来贴现未来现金流的短期利率为常数 $r$.

现在考虑以下投资组合

$$\{1\text{单位多头}K-\text{看涨期权}, 1\text{单位空头}K-\text{看跌期权}\}. \tag{2}$$

在到期日, 这一投资组合的支付就是图 10-2 中两条曲线竖直相加的和, 如图 10-3 所示. 这看起来像是一个以 $K$ 为交割价的*多头远期*合约的支付函数. 如果在 $t$ 时期权是平价期权 (at-the-money, ATM), 这个组合就恰好复制了多头远期头寸, 因此就是一个精确的合成. 但即使期权不是平价的, 这个投资组合和远期合约之间也有紧密的联系.

在到期日 $T$, 这个投资组合的价值是

$$C(T)-P(T)=F_T-K, \tag{3}$$

其中 $F_t$ 是远期价格在 $T$ 时的值. 因为在 $T$ 时, 两个期权中只有一个可以是价内期权, 所以这个方程是成立的. 要么买入期权的价值为 $F_t-K$ 且卖出期权价值为 0; 要么卖出期权是价内的, 即有价值 $K-F_t$ 且买入期权价值为 0, 如图 10-2 所示. 在方程两边同时减去 $t$ 时的远期价格 $F_t$, 得到

$$C(T)-P(T)+(K-F_t)=F_T-F_t. \tag{4}$$

① 空头买入期权和多头卖出期权有相对称的结果, 这里就不讨论了.

这个表达式说明: 买入期权多头和卖出期权空头支付的和加上金额为 $(K - F_t)$ 的现金, 恰好等于在 $t$ 时以 $F_t$ 订立的远期合约在 $T$ 时的收益或损失.

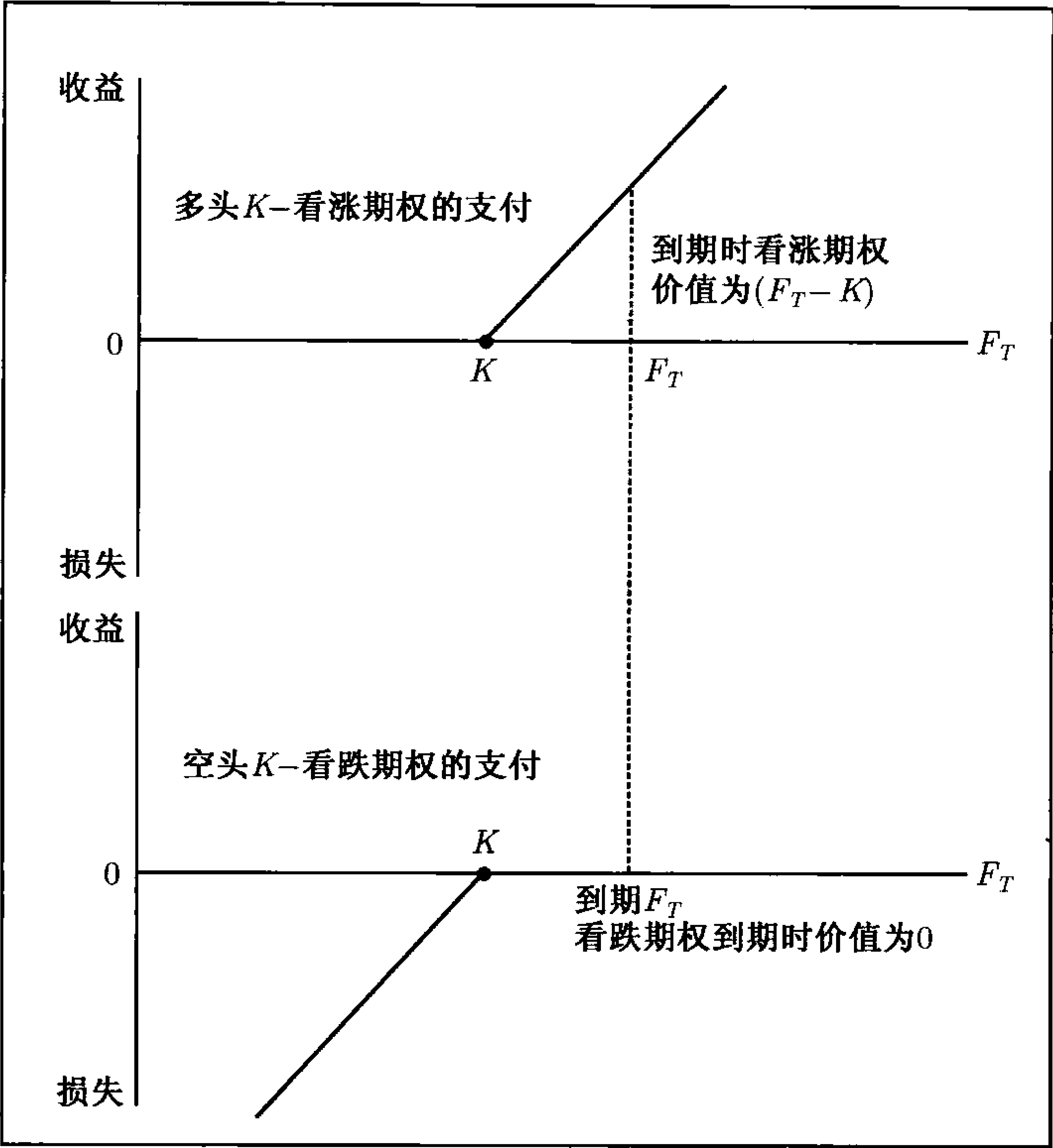



图 10-2

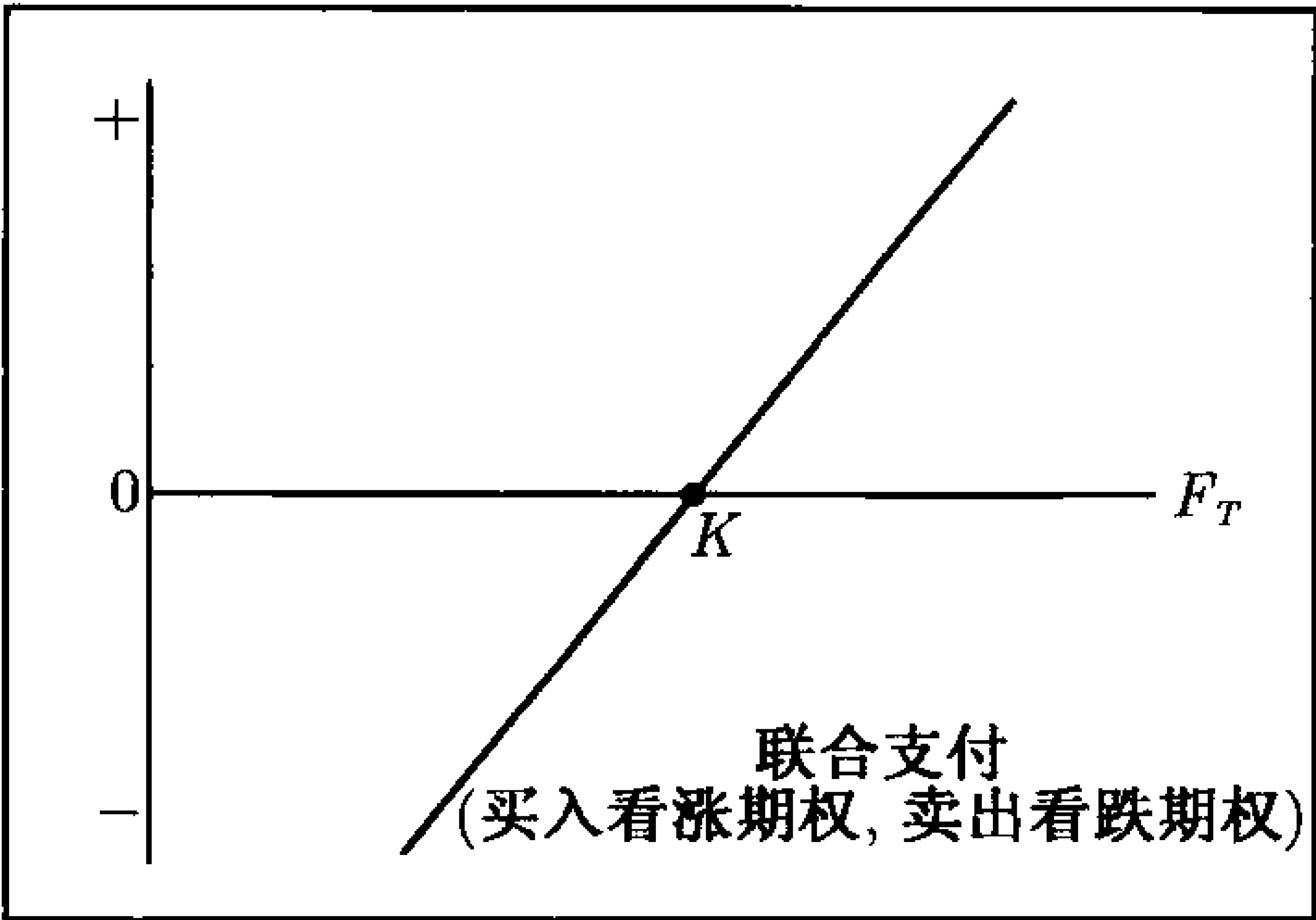



图 10-3

但我们知道远期合约在 $t$ 时的价值为 0, 因此投资组合

$$\{1单位多头K\text{-}\ 看涨期权, 1单位空头K\text{-}\ 看跌期权, e^{-r(T-t)}(K - F_t)美元\} \tag{5}$$

在 $t$ 时的价值也应该为 0. 因为远期合约和复制组合产生的信用风险和现金流相同, 所以有

$$C(t)-P(t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}(F_t-K). \tag{6}$$

我们把这个关系称为**平价公式**(put-call parity), 它对于欧式期权是成立的. 也可以用即期价格 $S_t$ 来表示. 假设没有存储成本和便利收益:①

$$F_t=\mathrm{e}^{r(T-t)}S_t, \tag{7}$$

代入前面的方程有

$$C(t)-P(t)=(S_t-\mathrm{e}^{-r(T-t)}K). \tag{8}$$

因此平价公式可以认为是用期权和现金来构造 $S_t$ 的合成时合约方程应用的另一个结果, 如图 10-4 所示.

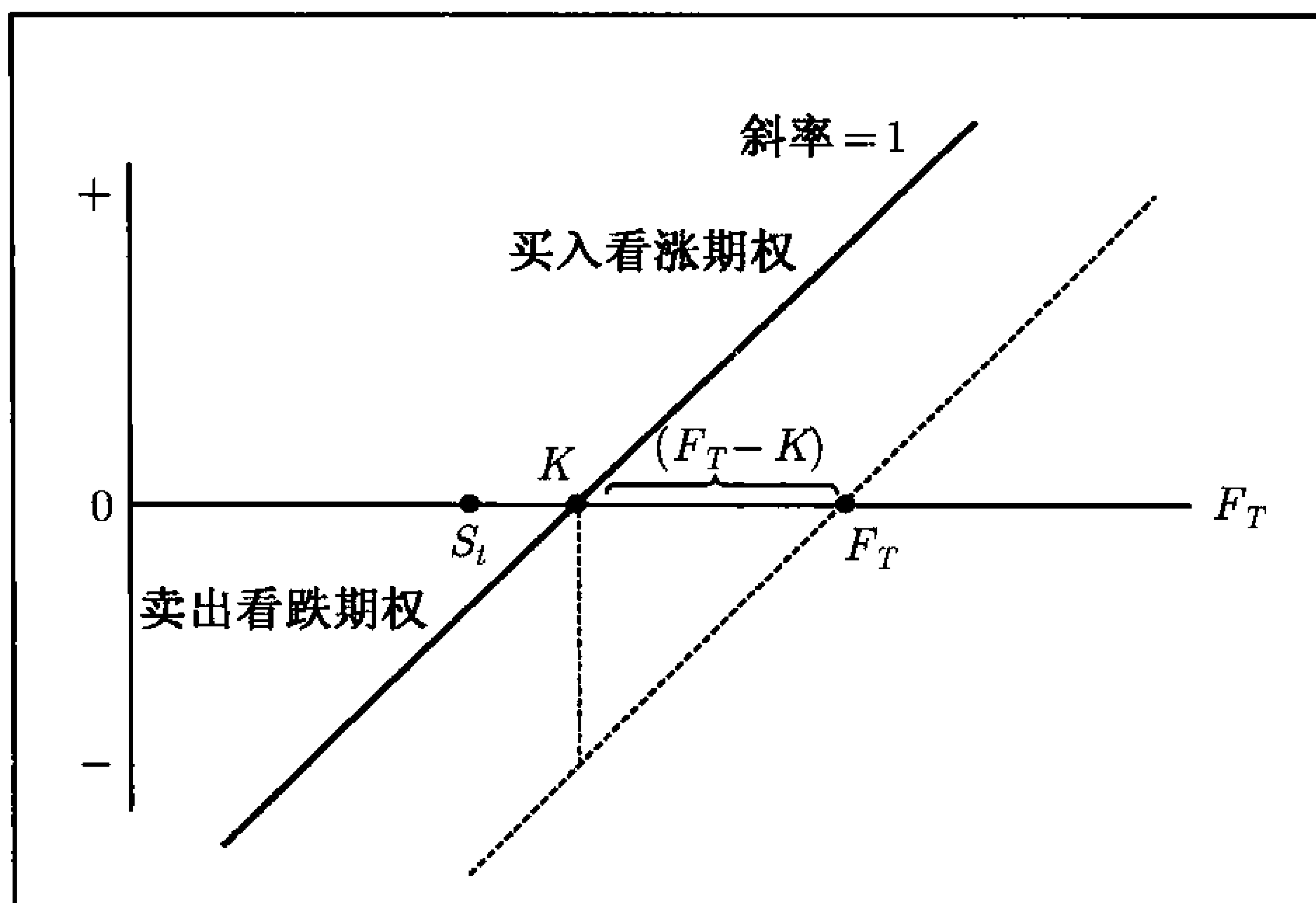



图　10-4

1. 一个应用

期权市场做市商通常用平价公式来发掘套利机会. 他们运用期权构造合成的期货头寸, 然后与期货合约进行交易. 通过这种方式, 把合成的和真正的期货合约之间微小和暂时性的差异转化为 "无风险" 收益. 下面我们讨论一个例子.

不失一般性, 假设一个股票的交易价格为

$$S_t=100, \tag{9}$$

且做市商可以买卖 30 天后到期的平价期权. 再假设做市商要花费 5%的融资成本. 股票不分红, 也不考虑公司行为.

① 这里 $r$ 和第 4 章讨论的一样是贷款成本, 它是远期价格的一个决定因素. 便利收益和持有成本相反, 一些库存的现金商品可能会提供这样的便利收益从而影响 $F_t$.

实际中，做市商还要花费每份期权 20 美分和每股股票 5 美分的交易成本. 最后，做市商通过计算知道，要想继续交易，每个头寸需要 0.25 美分的保证金. 然后就可以运用平价公式并采用图 10-5 所示的转换策略进行操作了.

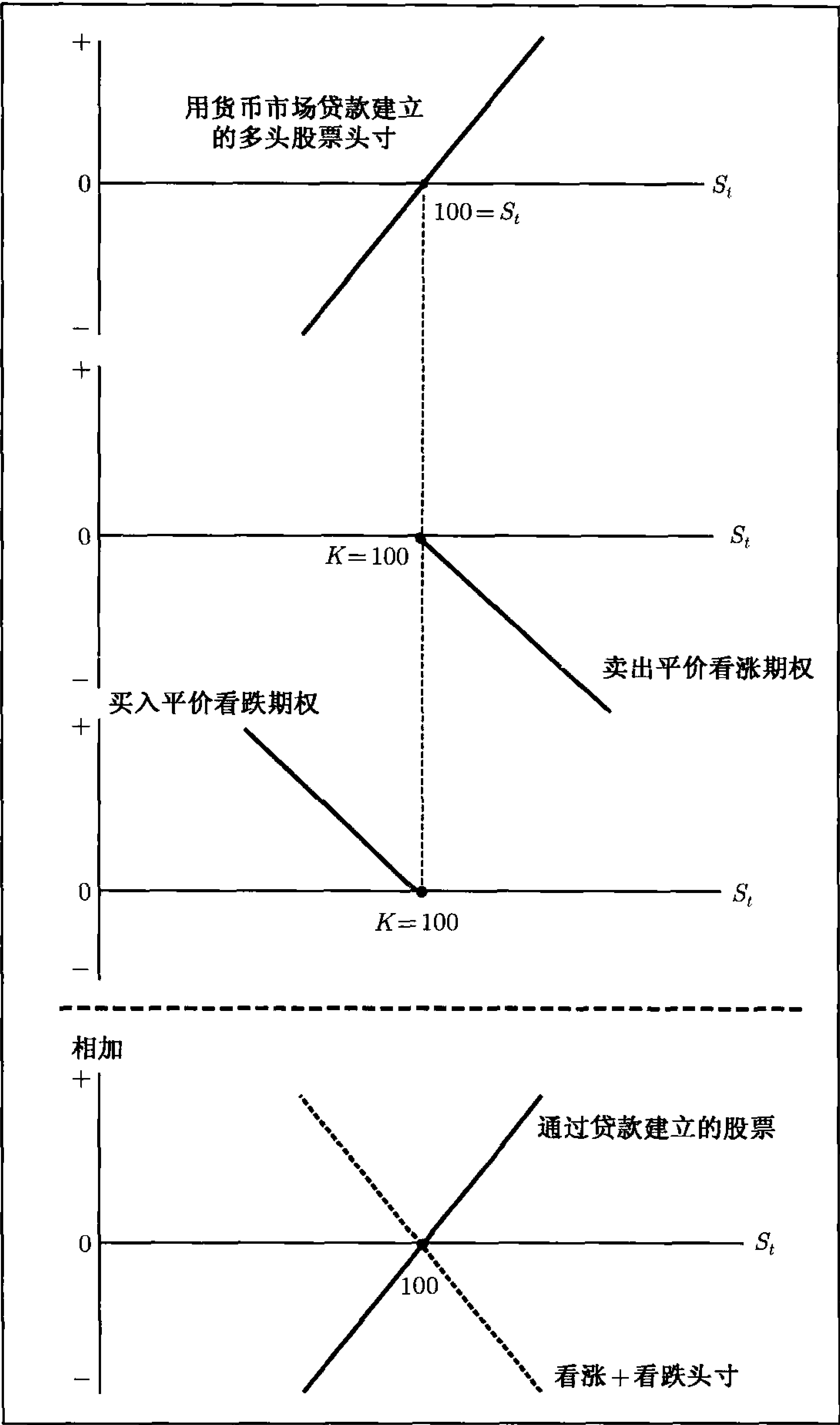



图 10-5

从隔夜市场借入所需的资金, 借期为 30 天, 并以价格 $S_t$ 买入股票. 同时卖出 $S_t$ 买入期权, 买入 $S_t$ 卖出期权, 到期日均为 30 天, 这样就得到了图 10-5 所示的头寸.

这个头寸是完全对冲的, 因为由 $S_t$ 的变化而引起的任何潜在的收益都将超过潜在的损失. 这意味着唯一相关的因素是交易成本和买入期权与卖出期权之间存在的价格差. 如果这个价格差大于总的转换成本, 那么做市商就会监控并利用这个差来建立如图 10-5 所示的套利头寸.

**例**

假设 $S_t$ =100, 且 90 天的买入期权和卖出期权交易活跃. 利息成本是 5%. 做市商确定买入期权的价格 $C(t)$ 超过卖出期权价格 $P(t)$, 两者之差为 2.10 美元:

$$C(t) - P(t) = 2.10. \tag{10}$$

将借来的资金买股票并持有 90 天, 买平价卖出期权并持有到到期日, 同时卖出平价买入期权. 这意味着融资成本为

$$100(0.05)\left(\frac{90}{360}\right) = \$1.25 \tag{11}$$

把这个转换策略的所有成本加起来得到左列:

| 每份证券的成本 | $ |
|---|---|
| 融资成本 | 1.25 |
| 买股票 | 0.05 |
| 买卖出期权 | 0.20 |
| 卖买入期权 | 0.20 |
| 操作费用 | 0.25 |
| 总成本 | 1.95 |

由此可见, 做市商要承担的总成本为 1.95 美元. 在此情形下, 净现金头寸为正:

$$净收益 = 2.10 - 1.95, \tag{12}$$

因此这个头寸是有价值的.

如果上例中买入期权和卖出期权的价格差为负, 则做市商可以建立反向头寸, 也就是我们所说的逆转.①

2. 套利机会存在性

局外旁观者可能会感到不解, 为何存在这种 "套利" 机会且交易现场的做市商可以密切监控并捕获这些机会. 实际上也只有做市商可以抓住这些机会, 而这种机会甚至不是通常意义上的套利.

这是由以下原因造成的: (1) 交易现场外的投资者支付的交易成本要比现场做市商的成本高得多, 这使得总成本太高而妨碍了场外投资者建立这些头寸; (2) 场外投资者不能同时做出决策, 通过买卖标的资产以及买卖隐含卖出和买入期权来构

① 这和后面称为风险逆转 (risk reversals) 策略有所不同.

造该策略, 因为当策略传达到交易现场时, 价格可能已经发生了变化; (3) 即使发现了这样的机会, 净收益也往往很小从而使得零星地建立这样的头寸没有什么价值, 然而对于专门从事这种活动的做市商来说就有意义了; (4) 最后, 这些头寸也有严重的风险, 就是所谓的大头针(pin)风险.

### 10.2.2 关于大头针风险的注

这里详细地讨论一下大头针风险, 因为类似的风险在对冲和交易某些奇异期权时也会出现. 假设生成一个转换策略, 交割价为 100, 头寸将在 90 天之后的某个星期五到期. 假设在到期日股票价格 $S_t$ 恰好等于 100, 这意味着股票恰好以交割价收盘. 这样做市商就要陷入一个进退两难的境地.

做市商持有股票. 如果他不执行卖出期权多头, 并且买入期权空头没有过户 (也就是他没有恰好以价格 $K$ 卖出股票), 那么在周末做市商将会有一个股票多头头寸敞口. 一旦股票价格在星期一发生变化, 他将遭受严重的损失.

另一方面, 如果做市商执行了卖出期权多头 (也就是他以价格 $K$ 卖出了股票), 并且买入期权空头过户 (也就是他或她需要以价格 $K$ 卖出股票), 那么在周末做市商就有一个股票空头头寸. 对于偶尔持有这种头寸的终端投资者来说, 这种风险也许不算大, 但是对依赖于这些机会的专业交易商来说是很重要的, 并且没有好的方法可以解除这种困境. 这种风险就是大头针风险.

引起大头针风险的主要原因是到期日支付在 $S_T = K$ 时出现的扭结. 该扭结表示斜率的突然变化 —— 对于一个多头买入期权是从 0 突变到 1, 或反之. 这意味着, 即使 $S_t$ 的一个很小的变化, 对冲比率要么是 0 要么是 1, 做市商稍有不慎就会陷入困境. 如果支付函数图表的斜率变化比较平稳, 那么所需要的对冲变化也会比较平稳. 由此可见, 一旦一个工具的 delta 发生离散的跳跃, 那么类似于大头针的风险就会出现.

### 10.2.3 风险逆转

合成多头和空头期货头寸的一种更先进的形式是风险逆转(risk reversals). 它们尤其在外汇市场上是具有流动性的合成工具, 在外汇市场上它们可以作为商品来交易. 风险逆转是方向头寸, 但和前面讨论的合成多头或空头期货头寸有许多不同.

风险逆转的思想还是买卖买入期权或卖出期权以复制多头或空头期货头寸 —— 但此时运用的是不同交割价的期权. 图 10-6 表示了一个这样的例子. 这个策略包括一个交割价为 $K_1$ 的空头卖出期权和交割价为 $K_2$ 的多头买入期权, 标的是 $S_t$. 开始时这两个期权都是价外期权, 并且 $S_t$ 满足

$$K_1 < S_t < K_2. \tag{13}$$

我们可以选择交割价使买入期权和卖出期权的价格相同, 如此一来风险逆转的初值为 0.

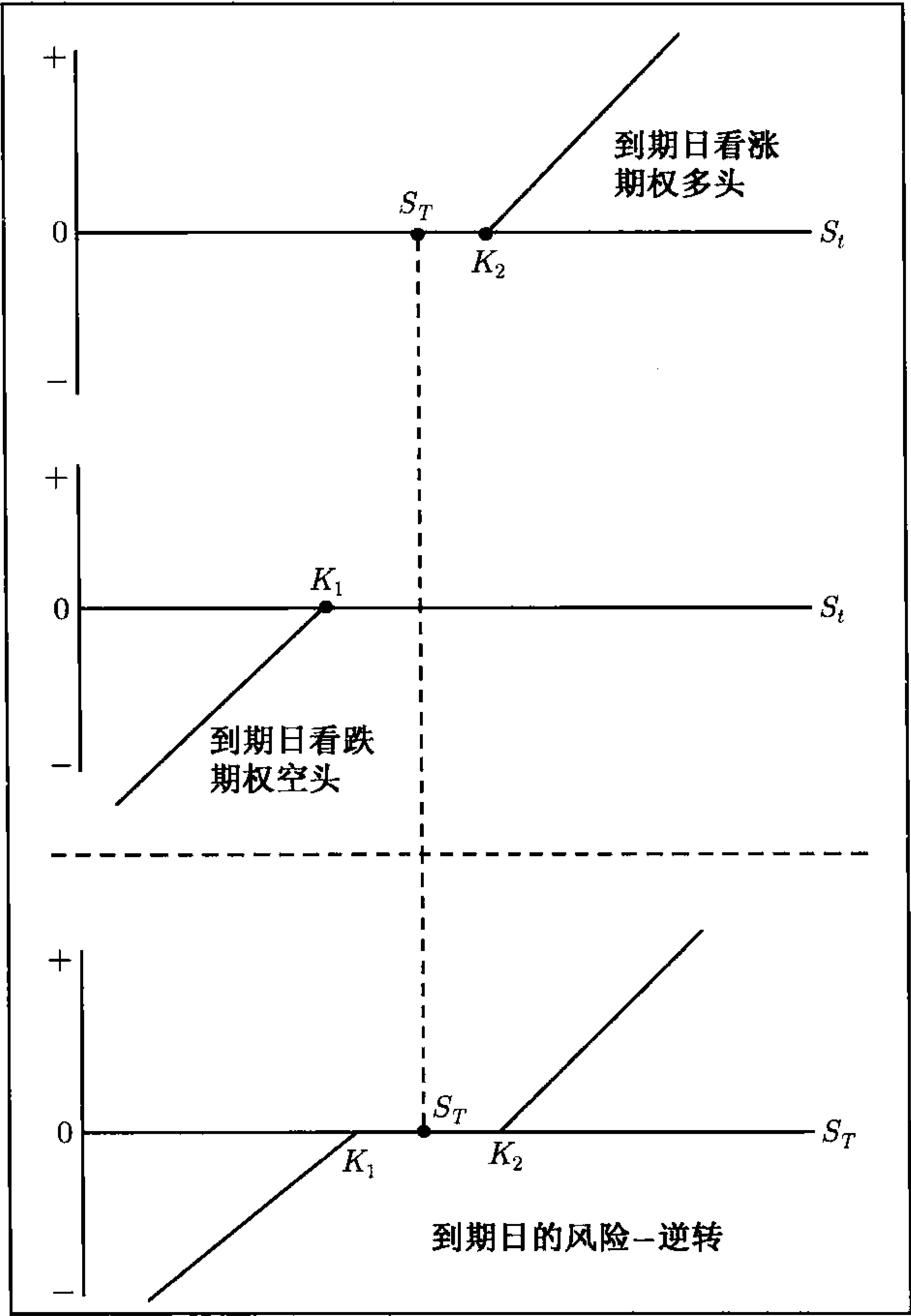



图 10-6

把图 10-6 上面部分的期权支付竖直相加, 得到底部图形所示的到期日支付. 如果在到期日, $S_T$ 在 $K_1$ 和 $K_2$ 之间, 此策略的支付为 0. 如果在到期日 $S_T < K_1$, 就有损失, 但在 $K_2 < S_T$ 的情况下, 风险逆转就会有收益. 显然, 这就像一个多头头寸, 它对开始于 $S_t$ 的标的的微小变化是中性的. 如果裸露建立此头寸, 则意味着投资者对 $S_t$ 看涨.

考虑一个外汇市场上把风险逆转当成商品进行交易的例子.

**例**

*在欧元对美元开始变强之后的两个星期, 25delta 一个月期的风险逆转显示了对欧元买入期权 (美元卖出期权) 的极大的偏好.*

交易商称欧元买入期权做市商买入风险逆转, 并预期欧元将进一步上涨, 星期三一个月期风险逆转从三个星期以前的 0.3 向着有利于欧元买入期权的方向涨到了 0.91. 隐含波动率随即变强, 在即期市场上欧元从 1.018 1 美元升到 1.021 5 美元, 一月期风险逆转的波动率从三个星期以前的 11.78%升到了星期三的 13.1%.

上面短文中提到的 25delta 风险逆转如图 10-7a 所示, 它由两个期权构成, 一个买入期权和一个卖出期权. 两个期权都是价外期权并且 "当前" 的 delta 为 0.25, 从例子中我们看到, 25delta 欧元买入期权要比 25delta 欧元卖出期权更贵一些.

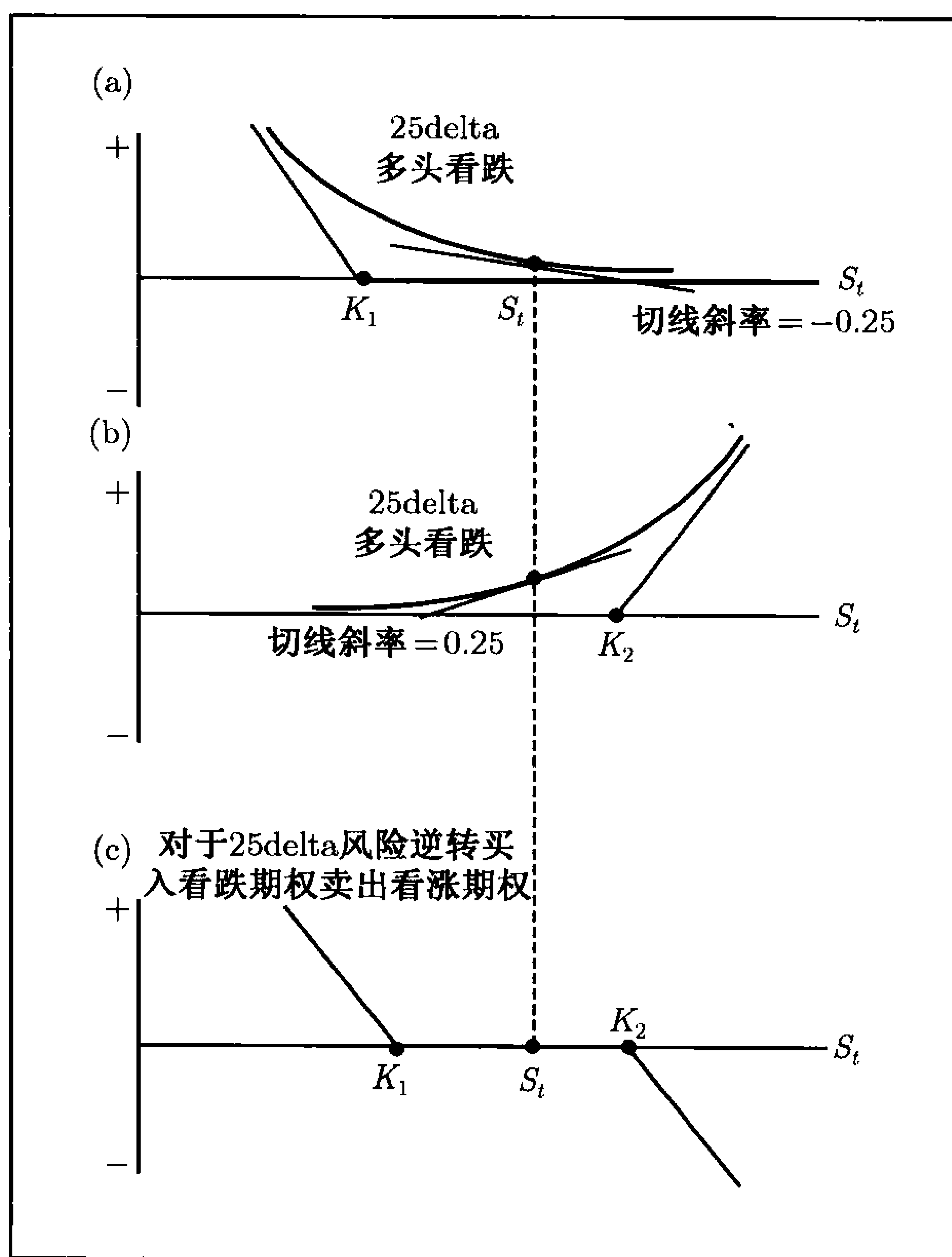



图 10-7

风险逆转的应用

风险逆转可以用作 "便宜" 的对冲工具, 下面是这方面的一个例子.

**例**

上周巴黎的一家旅行社缔结了一个零成本的风险逆转来对冲美元风险敞口. 该公司需要购买美元以支付它在美国、中国、印尼及南美的供应商.

公司财务负责人说, 在交易中公司买入了美元买入期权并卖出美元卖出期权以对冲它 2~3 亿美元的 30%的敞口. 该美式期权可以在 11 月和 5 月之间执行, 名义本金是 1~2 千万美元.

该旅行社缔结了一个风险逆转而不是直接买美元买入期权, 这是因为风险逆转更便宜一些. 该财务负责人说, 剩余的敞口将用其他不同的策略来对冲, 譬如直接买期权.

这里该旅行社从出国旅游的游客那里收到欧元, 但是需要向外国人支付美元. 在 $t$ 时收到欧元, 将在未来某时 $T(T>t)$ 支付美元. 我们说风险逆转是一个零成本的结构, 意思是卖美元卖出期权得到的期权费等于买美元买入期权的费用. 这个头寸对于汇率的微小变化是中性的, 但当汇率发生较大变化时, 它就是一个类似于期货合约的对冲.

当然, 也可以在期货市场上建立这样的头寸. 但是风险逆转的一个主要的优点是它是由期权 "构成" 的, 所以一般不需要每天进行盯市调整.

### 10.2.4 收益提高策略

至此为止所讨论的期权策略都是用于构造合成工具的空头或多头头寸. 本节我们考虑有助于提高投资组合收益的期权合成.

**买权重写**

考虑下面简单的情形. 在 $t$ 时, 一个投资者以 $S_t$ 的价格持有股票的多头头寸, 如图 10-8 所示. 如果股票价格上升, 投资者就会获益; 如果价格下跌, 他则会有损

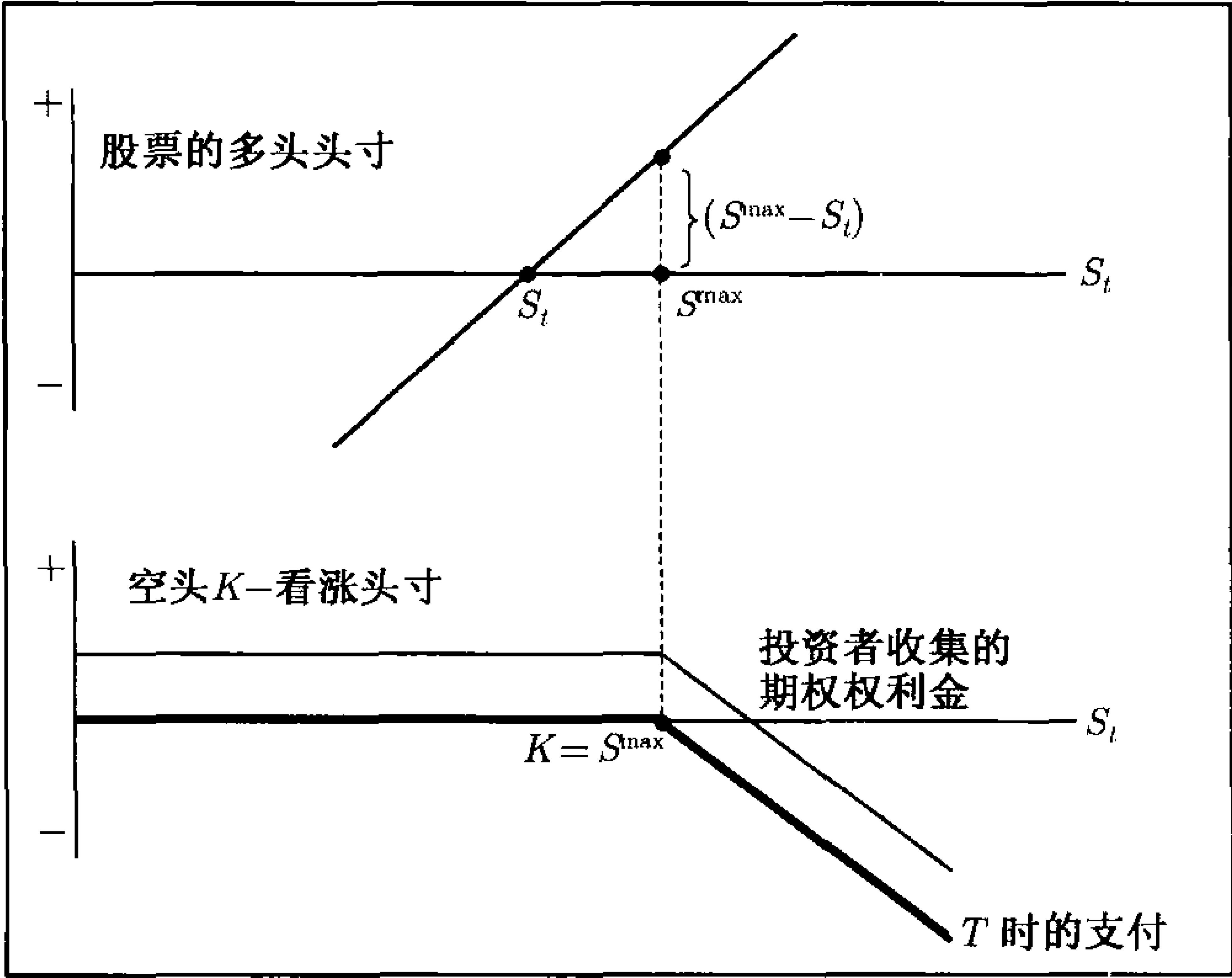



图 10-8

失. 然而投资者有一个*主观*的期望收益 $\hat{R}_t$, 若时间长度为 $\Delta$, $\hat{R}_t$ 可以表为

$$\hat{R}_t = E_t^{\hat{P}}\left[\frac{S_{t+\Delta} - S_t}{S_t}\right], \tag{14}$$

这里的 $\hat{P}$ 是随机变量 $S_{t+\Delta}$ 的主观条件概率分布. 根据前面的公式, 在 $\Delta$ 期间投资者期望的收益是 $\hat{R}_t$. 现在的问题是能不能向这位投资者提供一个*提高收益*的选择, 答案取决于 "提高收益" 的含义.

假设我们问该投资者如下的问题: "持有这个股票头寸你期望得到的最大收益是多少?" 如果 $S^{\max}$ 是他最乐意卖出股票的价格, 那么最大的预期收益就是

$$(S^{\max} - S_t). \tag{15}$$

然后, 考虑一个买入期权 $C(t)^{\max}$, 交割价为

$$K = S^{\max}, \tag{16}$$

到期日为 $T = t + \Delta$. 在 $t$ 时这个期权以价格 $C(t)^{\max}$ 卖出. 那么我们就可以向投资者推荐如下的投资组合

$$\text{收益加强型投资组合} = \{\text{买入 } S_t, \text{卖出 } C(t)^{\max}\}. \tag{17}$$

假设利率为 0, 在 $T = t + \Delta$ 时, 这个投资组合的 $V_{t+\Delta}$ 价值如下

$$V_{t+\Delta} = \begin{cases} C(t)^{\max} + S_{t+\Delta}, & \text{未执行期权}, \\ C(t)^{\max} + S_{t+\Delta} - (S_{t+\Delta} - S^{\max}) = C(t)^{\max} + S^{\max}, & \text{执行期权}. \end{cases} \tag{18}$$

因此, 如果在到期日股票价格低于 $S^{\max}$, 投资者就会 "赚到" 额外的 $C(t)^{\max}$ 美元; 如果 $S_{t+\Delta}$ 超过了 $S^{\max}$, 期权将会被执行, 收益就是 $S^{\max} + C(t)^{\max}$. 但是它要高于根据投资者主观喜好而定的愿意卖出股票的价格. 结果, 这个期权组合提高了原来的投资组合的 "收益". 然而需要注意的是, 提高的不是客观的风险回报, 而是投资者*主观*的期望收益.

图 10-8 展示了这一情形. 图的上面部分表示股票的多头头寸, 下面部分是卖空的交割价为 $S^{\max}$ 的期权的支付. 如果 $S_{t+\Delta}$ 超过了交割价 $S^{\max}$, 期权就会成为实值价内期权, 投资者就要以价格 $S^{\max}$ 卖出而放弃价值为 $S_{t+\Delta}$ 的股票. 但是无论如何投资者是*愿意*以价格 $S^{\max}$ 卖出股票的. 两个头寸之和如图 10-9 中的最后支付图所示.

这个策略被称为*买权重写*(call overwriting), 它常常被投资者采用. 下面的材料是关于这方面的一个例子: 面临不景气市场的基金经理用买权重写来提高收益.

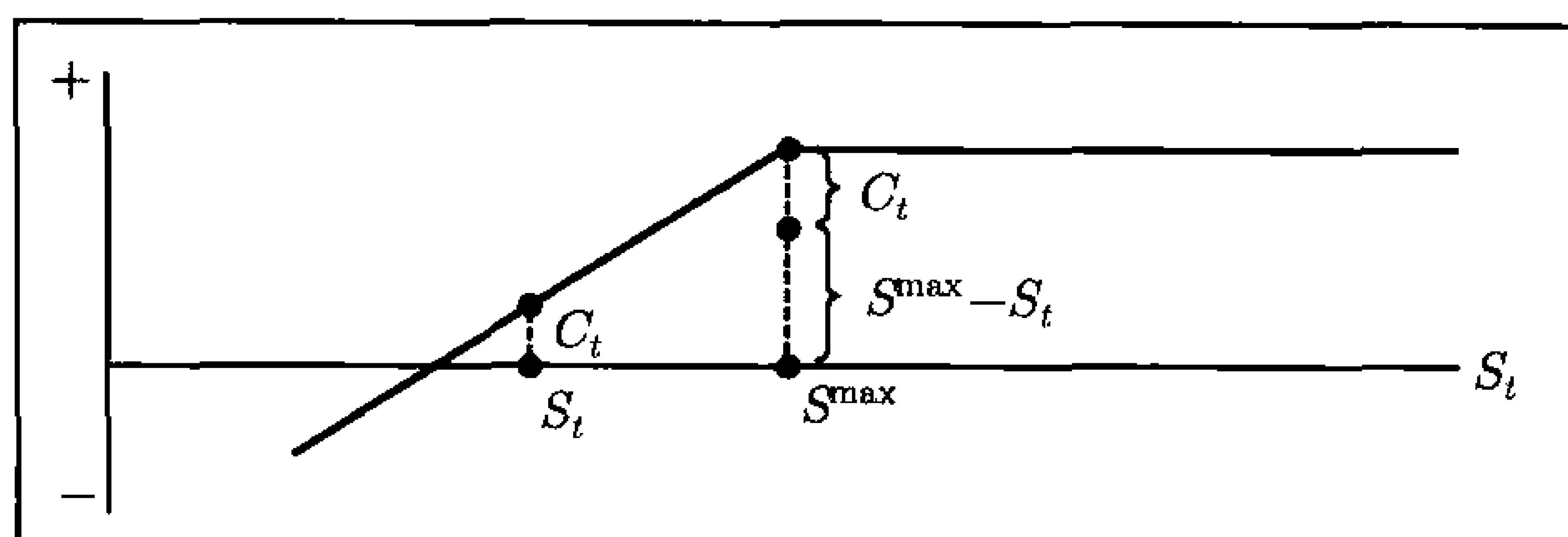



图　10-9

**例**

基金经理们打算在下个月的年报中平衡 Russell 指数期权策略的想法正在动摇, 某些期权策略家这样说.

"自从去年 5 月以来市场一直方向不明," 一个股票衍生产品策略家说. 他还说, 一年中只有少量股票有微小的上涨.

为了当他们寻求绝对收益时获得平衡, 基金经理们越来越乐意尝试买权重写策略, 来自对冲基金的极大竞争使得传统基金经理进行这方面的尝试, 一位股票衍生产品策略家这样说. 采用买权重写策略——即使忽略波动率水平——似乎仍然很有吸引力, 因为最坏的结果也不过以最低价卖出股票. 如此, 就可以提高基金经理的回报. (IFR, 第 1433 期, 2002 年 5 月 11 日)

上面材料中描述的情形较前面讨论的买权重写头寸要复杂一些. 它说明了基金经理需要执行的周期性和常规的再平衡. 很多基金 "追踪" 有名的指数, 但这些指数是周期性修正的, 在确定的日期有新的证券进出指数. 想追踪特定指数的基金经理必须随着指数的成分修正不断地对其投资组合作出相应的调整.

## 10.3　基于波动率的策略

第一类策略讨论期权的*方向性*应用, 与标的相结合的期权投资组合策略可用于预测标的风险的发展趋势. 现在我们从波动率头寸的*角度*考察期权的应用. 下面是本节用来形成波动率头寸的策略. 首先, 我们建立一个不受市场发展趋势影响的静态头寸, 可以用*跨式期权*(straddle) 或更便宜的形式——*抑制式期权*(strangle) 来实现. 然后, 把跨式期权和抑制式期权组合起来得到更复杂的波动率头寸并且可以减少成本.

因此, 本章考虑的波动率头寸基础是跨式期权和抑制式期权. 下面的例子简要说明了期权头寸是怎样预测*波动率*变化而不是标的价格变化的.

**例**

一家意大利银行向客户推荐如下头寸. 我们将分析一下客户对市场的预期 (看法) 意味着什么. 首先读一下这则短文.

"上周一家银行卖出了关于 ABC 股票 4%价外值的卖出期权和买入期权以产生代表机构投资者的一个溢价. 抑制式期权是六个星期的……, 这一策略产生了股票即期水平的 2.5%的溢价.

"进行交易时, 股票以大约 1 874.6 美元成交. 期权卖出时波动率是 22%. ABC 股票是标的, 因为投资者不认为在未来几星期内股票价格会有大的变化而超出抑制式期权的范围, 所以该期权不太可能执行. "(摘自《衍生产品周刊》的一篇文章)

图 10-10 标出了这些期权在到期日的支付图. 再加上一开始收到的期权费我们得到图 10-10 中下部分的第二个图. 不要把它和客户预期的支付混淆. 注意客户最终的目的是从波动率实现中受益, 期权头寸只是实现这一目的的工具.

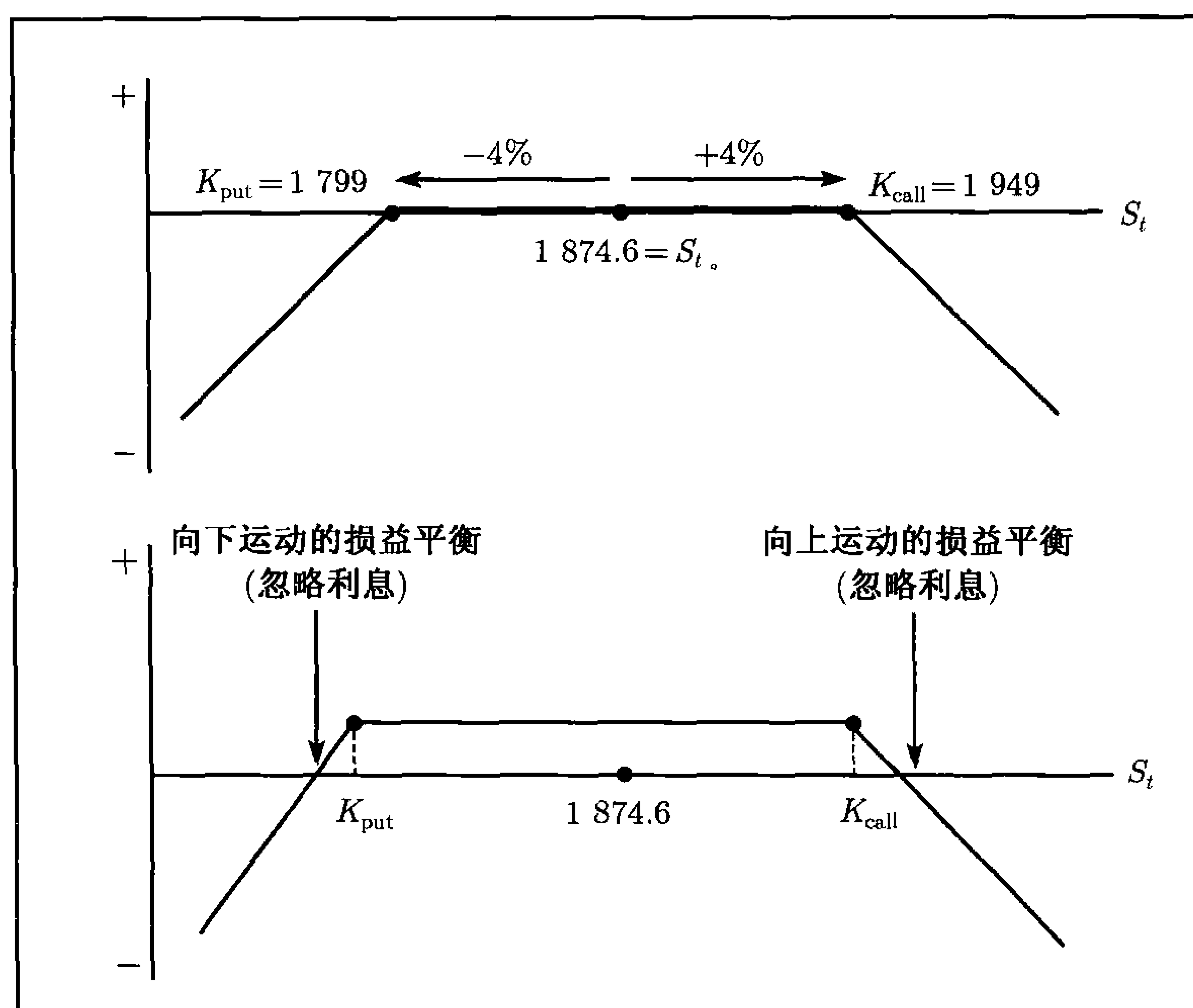



图 10-10

我们可以更详细地讨论一下这个问题. 图 10-10 的第二部分显示了在到期日, 头寸的下上盈亏平衡点分别是 1 762 和 1 987. 它们是通过在各自的交割价上减去和加上从抑制式期权头寸所获的$37.5 得到的.

但材料中也给出了市场的隐含波动率, 据此我们可以运用平方根公式计算所考

虑时期的隐含波动率

$$\sigma S_t \cdot \sqrt{\Delta} = 0.22\sqrt{\frac{6}{52}}1874.6 = 140.09 \tag{19}$$

注意到盈亏平衡点是向两边各移动 4%而确定的, 然而平方根公式给出了向两边各 7.5%的预期的移动.

由此可知, 持有这个头寸的客户希望现实的波动率要远远小于市场报价 7.5%的波动率. 事实上, 客户希望波动率小于 4%.

现在来正式地讨论跨式和抑制式期权, 它们是经典波动率头寸的主要基础.

### 10.3.1 抑制式期权

假设我们卖出 (买入) 两个标的资产为 $S_t$ 交割价不同的标准欧式期权. 第一个是卖出期权, 交割价为 $K_p$; 第二个为买入期权, 交割价为 $K_c$, 且有 $K_p < K_c$. 假设在购买时, $K_p < S_{t_0} < K_c$. 到期日是 $T$, 我们称这个头寸为一个**抑制式期权**. 前面已经介绍过它在市场上应用的例子. 因为是卖出期权, 所以卖方在 $t$ 时得到期权费为

$$C(t) + P(t) \tag{20}$$

如果在到期日 $T$, $S_t$ 发生 "轻微" 的变化, 这个头寸将赚钱, 否则将会有损失. 显然, 这样看一个抑制式期权暗示着这个头寸是静态的. 一个典型的空头抑制式期权的到期日支付如图 10-11 所示. 如果起点位置适当, 这个图也可以表示头寸在 $t$ 时的价值.

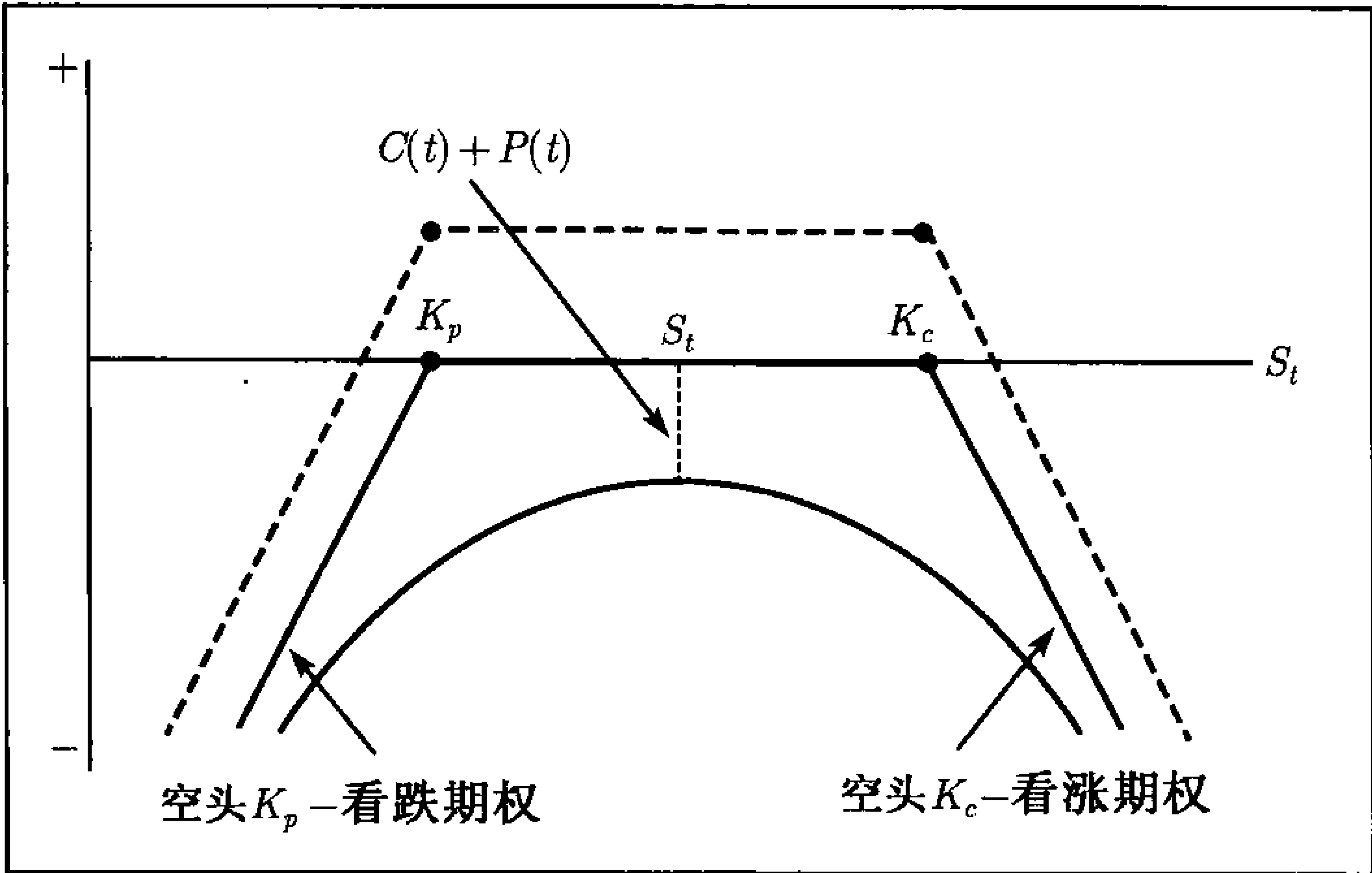



图 10-11

**抑制式期权的应用**

我们用外汇市场的一个例子来说明抑制式期权的应用. 注意术语的转换, 短文里用术语 “10delta 期权” 而不是交割价 $k\%$ 的价外期权. 这是因为正如前面提到的, 外汇市场喜欢交易 10delta、25delta期权且它们比任意选定的 $k\%$价外期权流动性更好.

**例**

一家银行向它的客户建议卖出一个月的 10delta 欧元/美元的抑制式期权以从低假期波动率中获益. 策略家说投资者应该以卖出期权交割价 0.838 0 美元和买入期权交割价 0.935 0 美元卖出一个月抑制式期权. 这将会产生名义本金的 0.387 5% 的期权费. 上周计划这项交易时, 即期交易是价格为 0.884 0 美元. 星期三欧元/美元的即期交易价为 0.878 6 美元. 银行认为这是一个执行交易的好时机: 因为隐含波动率一般会在圣诞节和新年期间有所下降, 这意味着即期交易很可能保持在这个范围内. (摘自《衍生产品周刊》)

这是抑制式期权的直接应用, 如图 10-12 所示. 根据策略家的看法, 因为季节的原因, 假期期间外汇期权期权费的隐含波动率要高于预期的未来现实波动率. 如果这样, 那么欧元/美元汇率的变化很可能不会超出抑制式期权的范围, 从而构造这个抑制式期权的标准期权在到期日不会执行. [1]

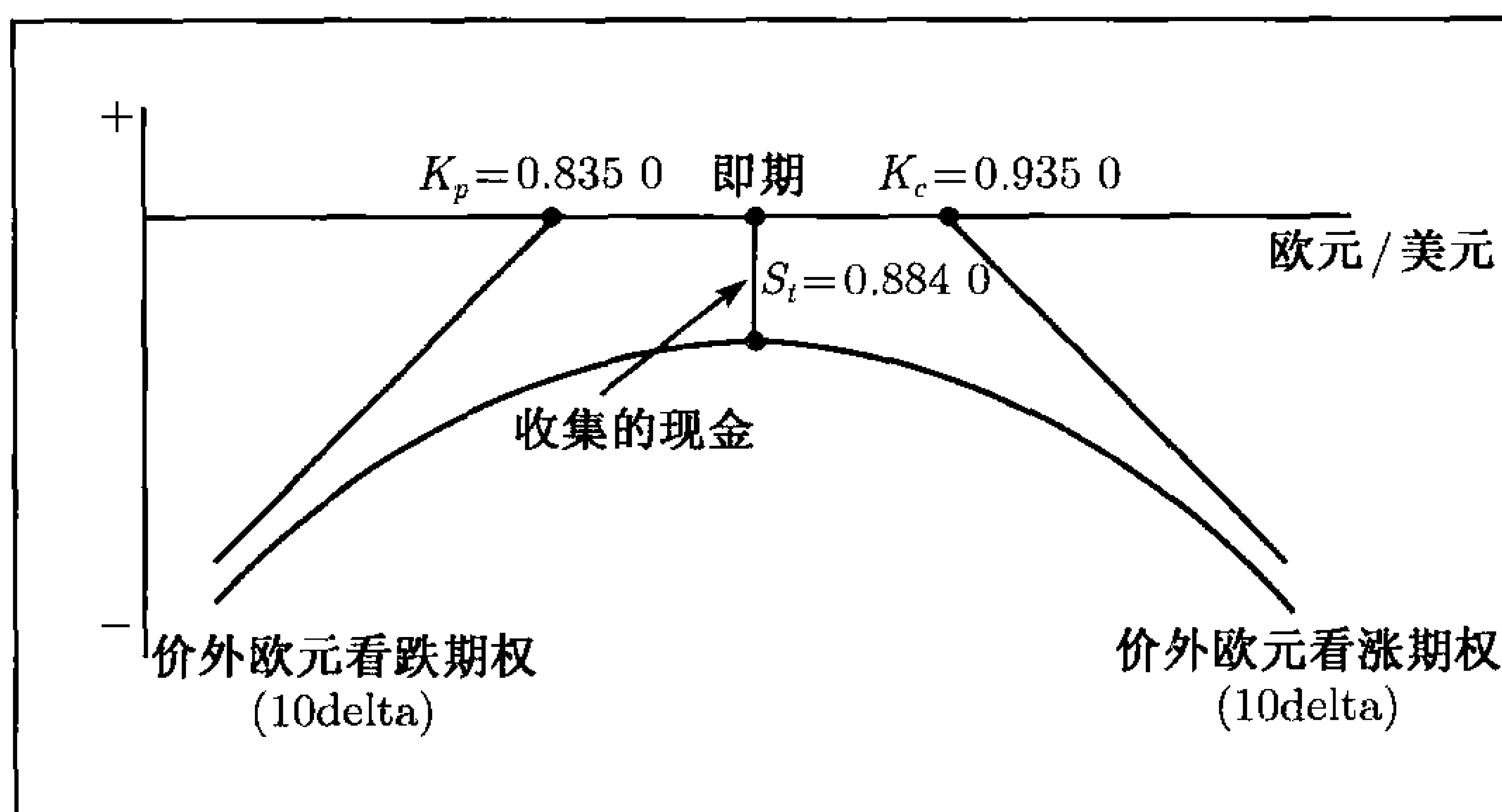



图 10-12

### 10.3.2 跨式期权

跨式期权类似于抑制式期权, 不同的是跨式期权卖出 (或买入) 的买入期权和卖出期权的交割价 $K_p$ 和 $K_c$ 是相同的:

$$K_p = K_c. \tag{21}$$

① 显然, 关于波动率的季节性变化还是有争议的, 这只是经验性的看法, 但是它确实刻画了季节因素对数据波动性的一些影响.

令标的资产为 $S_t$, 到期日为 $T$. 一个多头跨式期权的到期日支付和时间价值如图 10-13 所示, 基本特征类似于一个多头抑制式期权. 不同的是, 跨式期权的成本较高. 买入时, 平价跨式期权比平价抑制式期权凸性大, 因此有 "最大的"gamma.

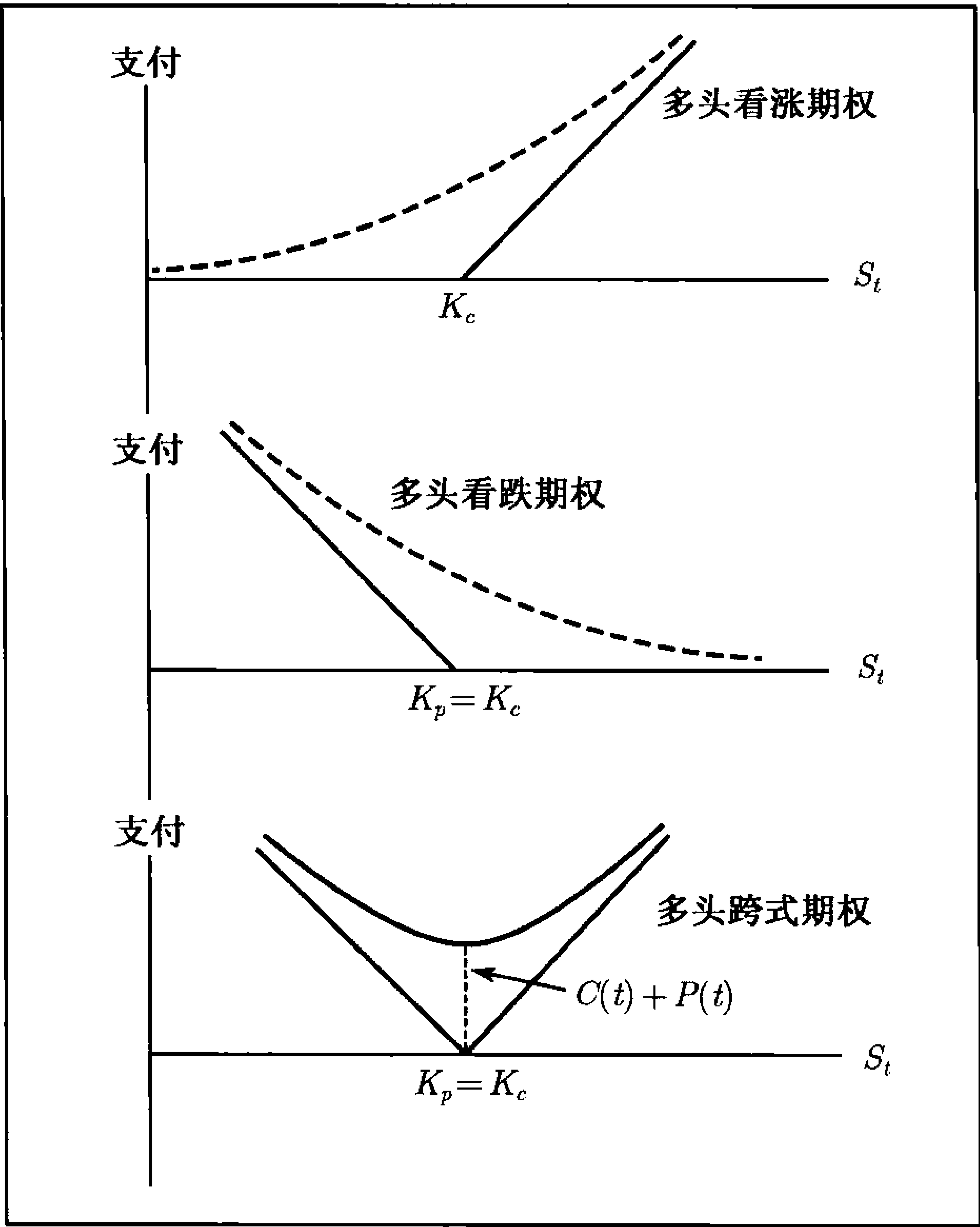



图　10-13

**静态还是动态头寸**

应注意这里讨论的跨式期权和抑制式期权头寸都是静态的. 也就是说, 头寸一旦建立就不能 delta 对冲. 然而, 可以把它们转化成动态策略. 为了实现动态化目的, 应该动态地 delta 对冲有关头寸. 开始时, 一个平价跨式期权自动是市场中性的, 从而 delta 为 0. 当价格上升或下降时, delta 变为正或负. 因此, 为了保持一个市场中性的头寸, 应该周期性地调整相应的对冲.

注意静态和动态策略之间的一个主要区别. 假设我们建立一个*静态*跨式期权头寸, $S_t$ 频繁但微小地上下波动且不会超出区间 $[S_1, S_2]$, 如图 10-14 所示. 那么静态头寸将有损失, 而动态 delta 对冲头寸可能会有收益, 这取决于 $S_t$ 波动的频率和大小.

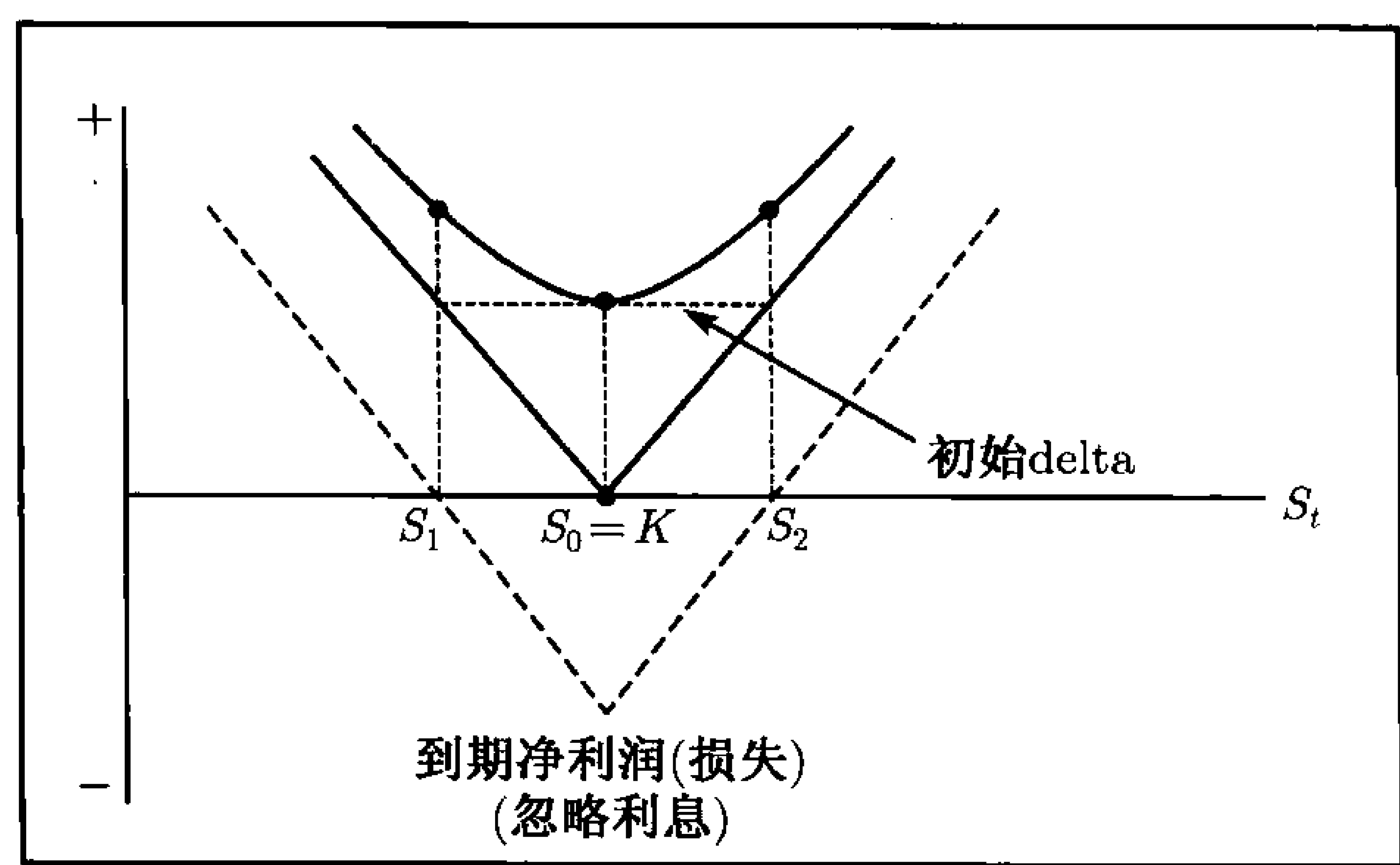



图 10-14

### 10.3.3 蝶式期权

蝶式期权(butterfly) 是由抑制式期权和跨式期权结合而成的头寸. 跟整本书的思路一样, 一旦确立跨式期权和抑制式期权的支付为基础, 就可以把它们组合起来产生进一步的合成支付. 一个多头蝶式期权头寸如图 10-15 所示. 这个图隐含了以下的合约方程:

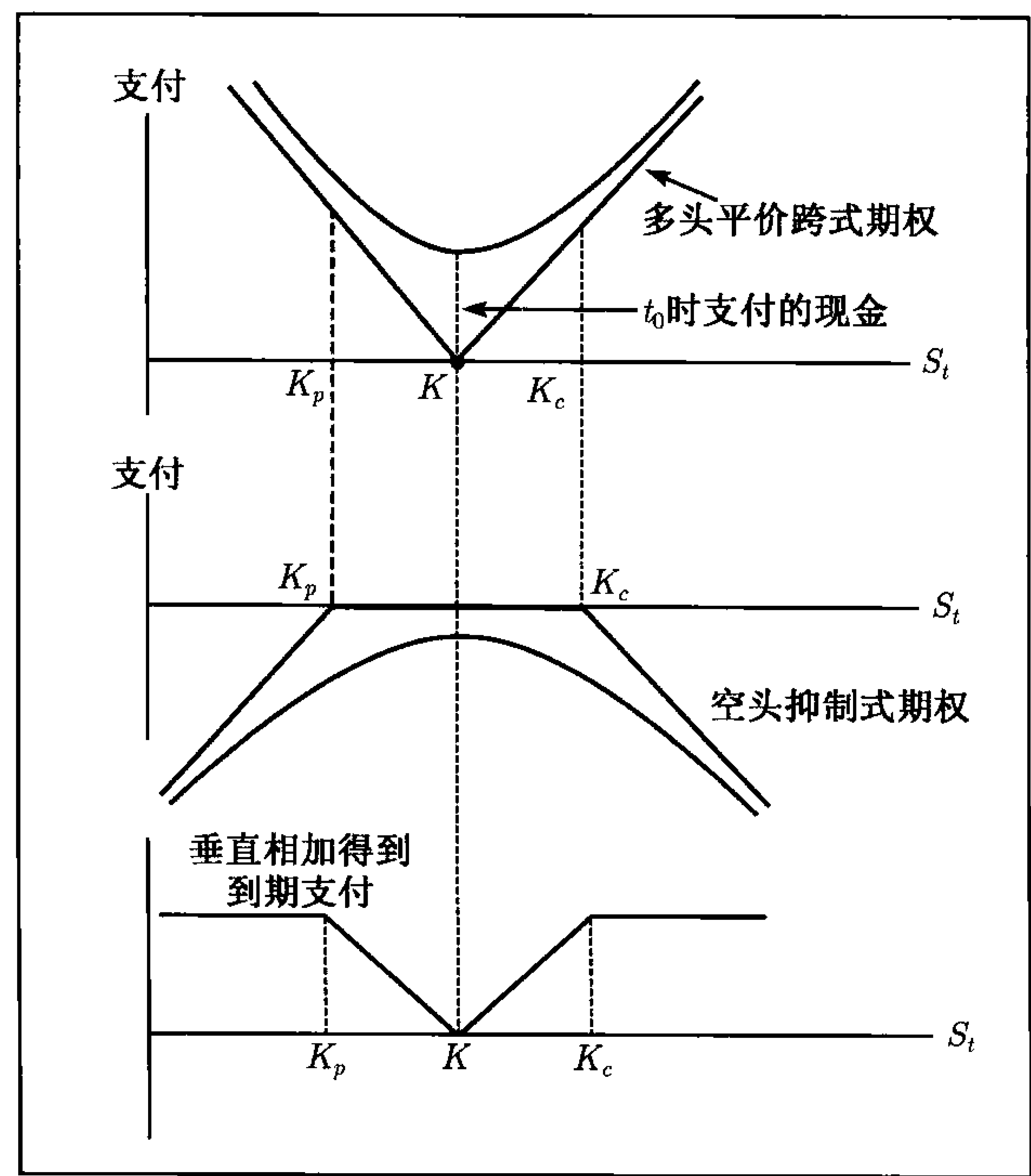



图 10-15

$$\text{买入蝶式期权} = \text{买入 ATM 跨式期权} + \text{卖出 } k\% \text{价外跨式期权}. \tag{22}$$

这个方程说明了运用蝶式期权的一个目的. 通过卖出抑制式期权, 交易商实际上是降低了购买跨式期权的成本. 空头蝶式期权时的合约方程跟前面正好相反:

$$\text{蝶式空头} = \text{ATM跨式空头} + k\% \text{价外抑制式多头} \tag{23}$$

一个跨式期权空头会产生一笔期权费, 但它没有损失下限, 这可能让风险经理难以接受. 因此, 交易商购买一个抑制式期权来限制这种潜在损失. 但这种保险有成本并使净现金所得变小. 下面的例子说明空头蝶式期权策略的一个实际应用.

**例**

由于商品价格上涨使得澳大利亚元走强, 交易商通过构造蝶式结构来从货币牛市后预期的平静中获益. 一种结构是三月期蝶式交易. 交易商卖出一个平价澳大利亚元对美元的买入期权和卖出期权, 买入一个交割价为 0.682 澳大利亚元的买入期权和交割价为 0.637 5 澳大利亚元卖出期权. 一个交易商指出, 这个结构的期权费约为本金的 0.3%, 两个买权和卖权都具有价值. (摘自《衍生产品周刊》的文章)

这个结构也可以通过保证敞口的 vega 中性获得.

## 10.4 奇异期权

到现在为止, 本章研究的期权策略仅仅用到了标准买入期权和卖出期权. 更复杂一些的波动率头寸的基础, 即跨式期权和抑制式期权也是使用不同交割价或不同到期日的标准期权的组合. 但是用标准期权来预测市场的发展趋势或进行波动率交易在某些人看来已经 “过时” 了. 有更实用的方法来实现类似的目标.

一般原理是这样的: 不采用将标准期权组合起来的方式构造所期望的支付图表、降低成本以及达到其他目的, 交易商直接设计能以 “更好” 方式实现类似目的的新期权合约. 当然, 这些新的合约意味进行标的标准期权构成的对冲, 但是这些新的工具本身是作为奇异期权卖出的.① 结束本章之前, 我们来介绍以奇异期权为基础的更一般的期权策略. 这里只看少数几种奇异期权, 在本章末的练习中还有许多其他种类的奇异期权.

### 10.4.1 两值期权

要理解两值 (binary) 期权, 我们首先回顾一下静态的跨式期权和抑制式期权策略. 基本思想是持有一个多头 (空头) 波动率头寸, 如果标的的变化大于 (小于) 隐含波动率的变化, 这个头寸就会有收益. 两值期权是类似波动率策略的重要基础,

① “奇异” 一词可能会有些误导, 很多新型期权已商品化并作为普通商品交易.

这种波动率头寸用起来更便宜且可能更有效. 两值期权也是期权工程的一个很好的例子. 下面我们简要描述一下欧式两值期权.

1. 一个两值买入期权

考虑一个交割价为 $K$, 到期日为 $T$ 的欧式期权. $S_t$ 表示标的风险. 期权到期时分别是平价或价内时, 支付将是: (1) 一笔固定的现金; (2) 一项指定的资产. 除此之外, 它就是一个标准买入期权. 这儿我们只考虑现金支付的两值期权.

图 10-16 给出了 $t$ 时价值为 $C^{bin}(t)$ 的两值买入期权的支付图表. $T$ 时的支付可以写成

$$C^{bin}(T) = \begin{cases} R, & \text{若 } K \leqslant S_T, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{24}$$

由此可知, 只要在 $T$ 时 $S_T$ 不小于 $K$, 两值买入期权持有者就会收到现金支付 $R$. 因此, 这个支付有 $R$ 或 0 的两值结构. 两值卖出期权可类似定义.

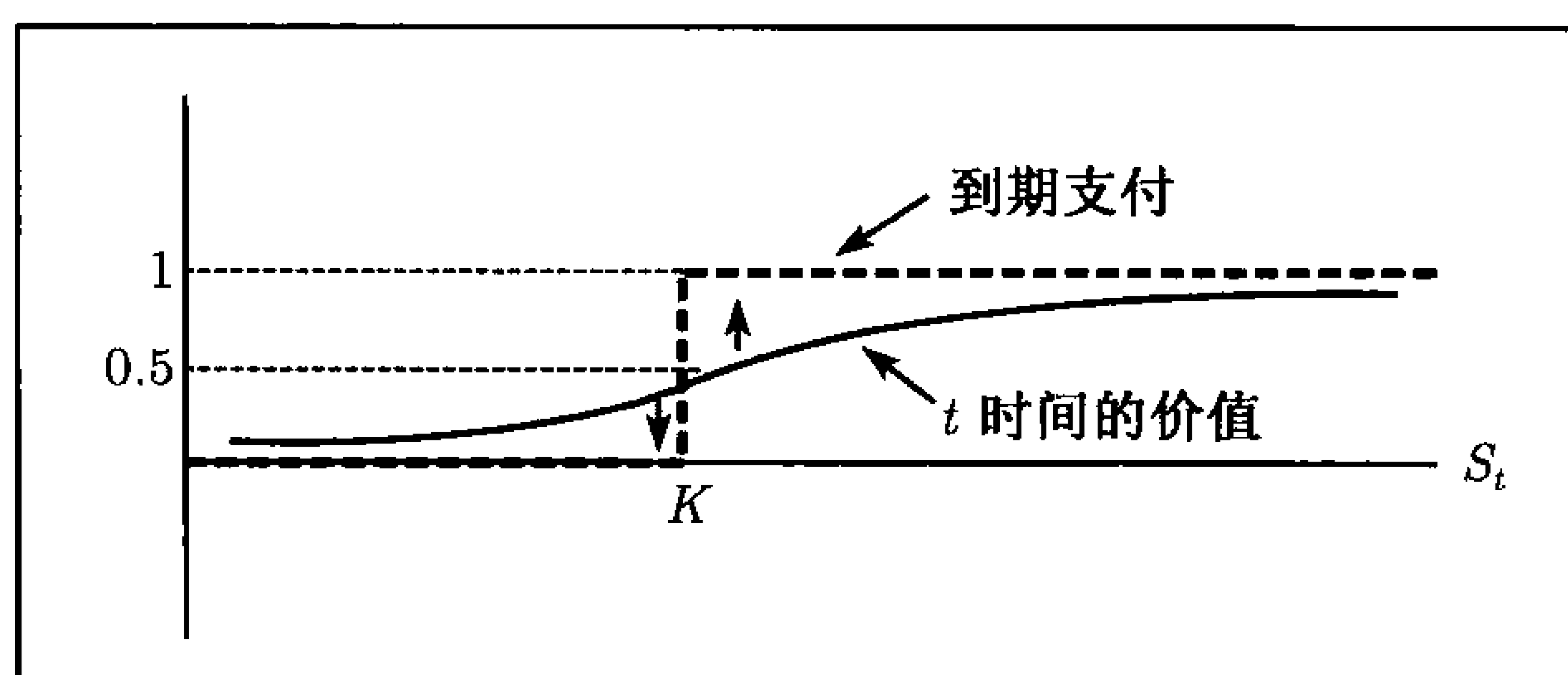



图 10-16

图 10-16 中的图表表示的是两值期权的内涵价值 (intrinsic value). 它的时间价值如何呢? 事实上很容易能得到两值期权的定价公式. 但我们还是倾向于从金融工程的角度来回答这个问题. 确切一点说就是先构造两值期权的一个合成, 这个合成应该与两值期权有相同的价值.

构造这个合成的想法跟前面一样. 我们必须用其他 (可能是流动性的) 工具来复制两值期权的最终支付, 并保证隐含现金流和标的信用风险是相同的.

2. 复制两值买入期权

两值买入期权的最终支付由图 10-16 的阶梯函数表示. 现在再做两个附加的假设. 首先, 假定标的 $S_t$ 是在交易所交易的期货合约的价格, 并且这个交易所规定了一个最小点值 (minimal tick) 规则, 也就是说给定 $S_t$, 下一时刻的价格 $S_{t+\Delta}$ 只能是

$$S_{t+\Delta} = S_t \pm ih, \tag{25}$$

这里的 $i$ 是资产整数, $h$ 是交易所选定的最小点值. 参数 $\Delta$ 表示一个很小的时间长度. 其次, 不失一般性我们假设

$$R = 1. \tag{26}$$

在这些条件下, 两值期权的支付函数是一个在 $S_T = K$ 有跳越幅度为 1 的阶梯函数.

显然在这些条件下我们可以很容易构造一个两值期权的复制组合. 假设做市商买一个交割价为 $K$ 的普通欧式买入期权, 并同时卖出一个标的为 $S_t$、交割价为 $K+h$ 的普通欧式买入期权. 这一组合 $T$ 时的支付如图 10-17 所示. 这个支付类似于图 10-16 中的阶梯函数, 不同的是跳跃幅度为 $h$ 而不是 1. 但这是很容易修正的, 只要将买卖期权的数量都调整为 $\frac{1}{h}$ 而不是 1 就可以了. 这意味着近似的合约方程为

| 两值买入期权, 交割价为 $K$ | $\cong$ | 买入 $\frac{1}{h}$ 单位的交割价为 $K$ 的普通买入期权 | + | 卖出 $\frac{1}{h}$ 单位的交割价为 $(K+\mathrm{h})$ 的买入期权 |
|---|---|---|---|---|

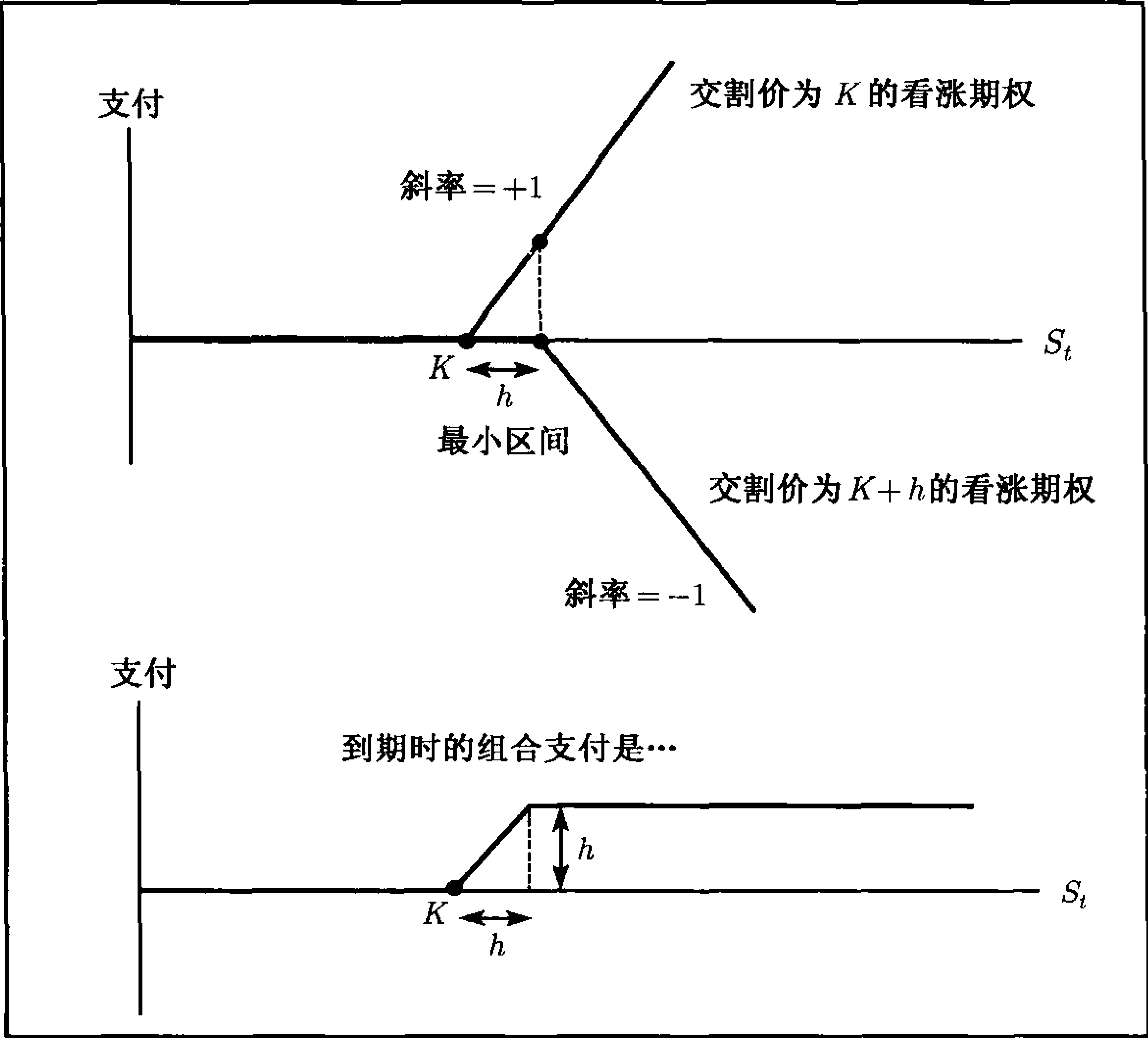



图 10-17

因为最小点值规则的要求使得 $|S_t - S_{t+\Delta}| < h$ 的情形不会出现，所以这个近似等式是严格相等的. 我们可以由这个合约方程得到两个有趣的结果.

3. delta 和两值期权的价格

在两值期权和其标准构成期权的 delta 之间存在一个有趣的相似之处. 设交割价为 $K$ 和 $K+h$ 的标准买入期权的价格分别为 $C^K(t)$ 和 $C^{K+h}(t)$. 然后，假定波动率参数$\sigma$不依赖于$K$，在前面的合约方程中令 $h \to 0$，恰好得到两值期权的价格 $C^{bin}(t)$ 为

$$C^{bin}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{C^K(t) - C^{K+h}(t)}{h} \tag{27}$$

$$= \frac{\partial C^K(t)}{\partial K}, \tag{28}$$

假定这个极限存在.

也就是说，两值期权的价格实际上就是普通期权价格关于交割价 $K$ 的偏导数. 如果 Black-Scholes 公式的所有假设成立，我们可以得到这个偏导数的解析形式,[①]

$$C^{bin}(t) = \frac{\partial C^K(t)}{\partial K} = \mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2), \tag{29}$$

这里的 $d_2$ 为

$$d^2 = \frac{Log\frac{S_t}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \tag{30}$$

$\sigma$ 是 $S_t$ 的常值百分比波动率，$r$ 是无风险的常值即期利率.

最后的结果显示了两值期权价格和普通期权 delta 的有趣的相似性. 在第 9 章我们证明了一个普通看涨期权的 delta 由下式表示

$$Delta = \frac{\partial C^K(t)}{\partial S_t} = N(d_1). \tag{31}$$

由此可知，两值期权的价格有一个类似的形式. 并且它还有一个类似于概率分布的形式

$$C^{bin}(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\frac{\log\frac{S_t}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u. \tag{32}$$

这样我们就可以画出两值期权价格 $C^{bin}(t)$ 的图形. 在 Black-Scholes 假设下，这个价格如图 10-18 所示.

---

① 见第 8 章附录.

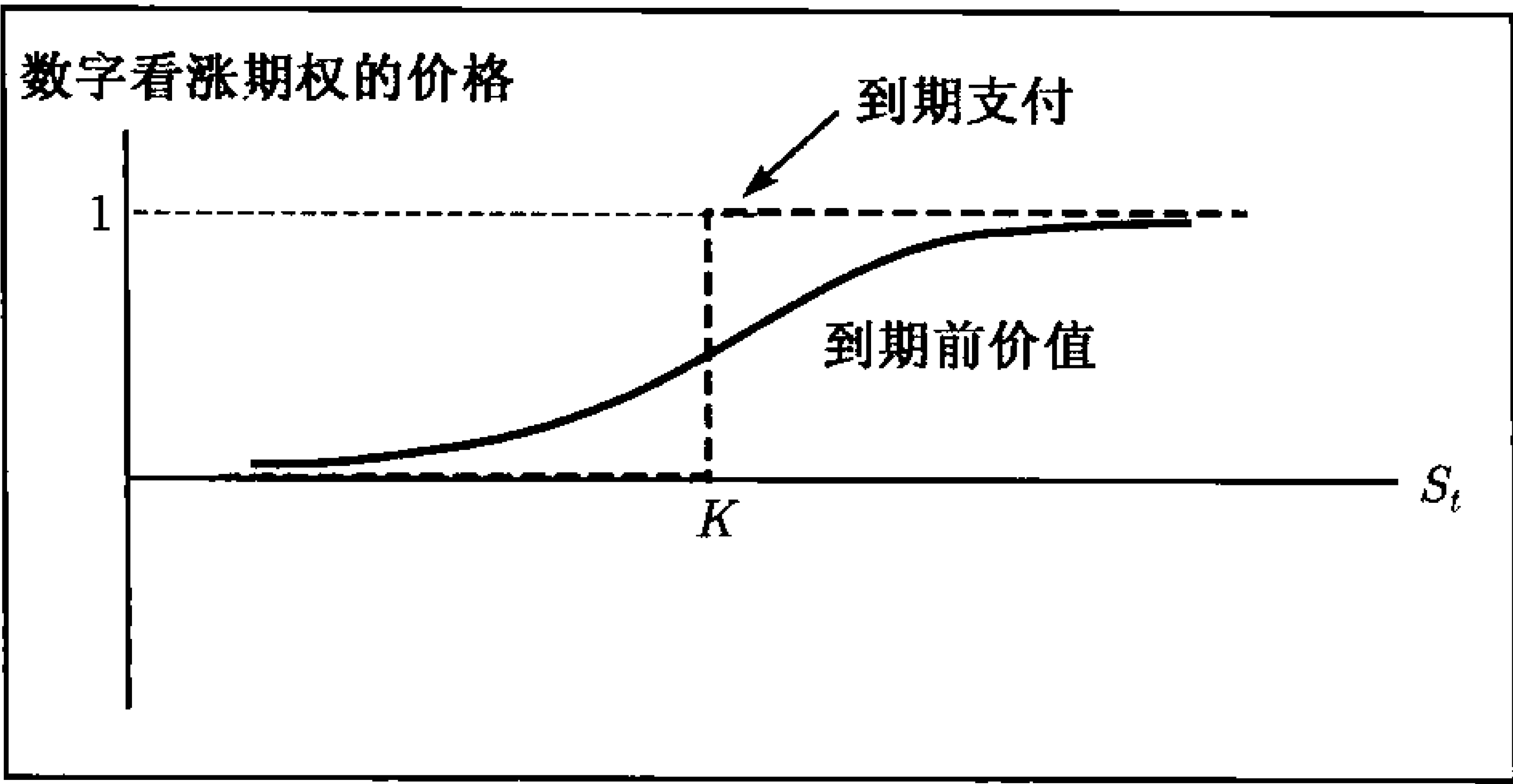



图 10-18

4. 两值期权的时间价值

我们可以用前面的结果得到图 10-16 所示的两值期权的凸性特征. 深度价外两值期权[①]有一个接近于零的正的价格. 当期权变成平价期权时, 这个价格将上升到 $\frac{1}{2}$ 附近. 而对于价内期权来说, 它的价格比 1 小, 但是会随着 $C^{bin}(t)$ 越来越大而接近于 1 , 这意味着欧式价内两值期权的时间价值是负的. 因为投资者绝对不会为了获得在 $T$ 时赚得 1 美元的机会而在 $T$ 之前支付超过 1 美元的价格, 所以 $C^{bin}(t)$ 永远不会超过 1(或 $R$).

由此我们看到, 如果两值期权是价外期权, 买两值看涨期权的做市商将会买进波动率. 如果两值期权是价内的, 他将卖空波动率.

一个平价两值期权对波动率是中性的. 这是因为在价内期权的情况下 $C^{K+h}(t)$ 的曲率会控制 $C^K(t)$ 的曲率, 两值期权就会有一个凹的定价函数. 如果两值期权是价外期权, 情况相反.

综上所述, 我们发现两值期权的价格类似于普通期权的 delta. 这意味着两值期权的 delta 类似于普通期权的 gamma. 所以两值期权的 gamma 应该如图 10-19 所示, 它类似于普通期权关于 $S_t$ 的三阶偏导数.

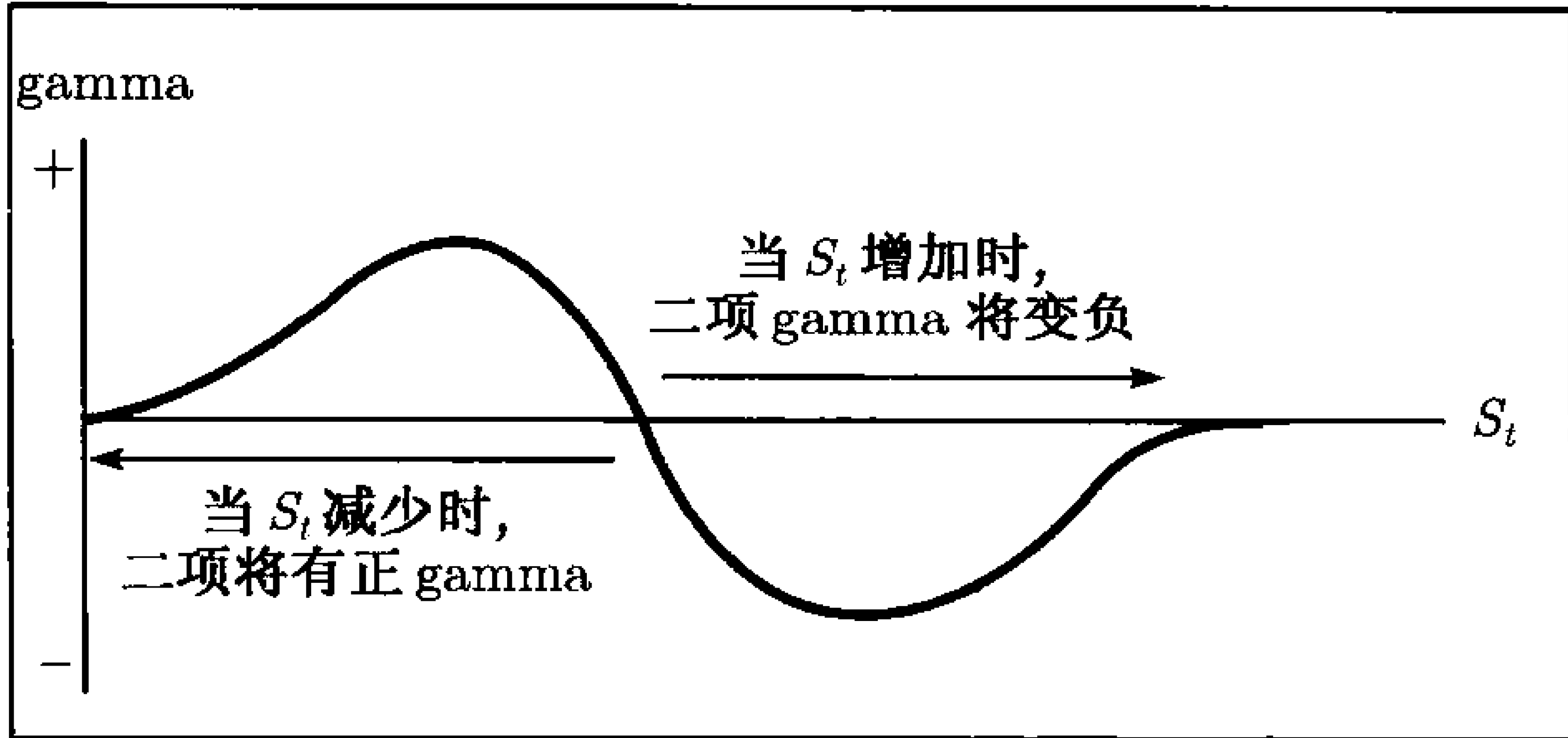



图 10-19

① 注意两值期权的支付还是假定 $R = 1$.

5. **两值期权的应用**

**范围期权**(range option) 是由具有相同支付的两值卖出期权和买入期权组成的. 这个期权的支付取决于 $S_t$ 是否在区间 $[H^{\min}, H^{\max}]$ 内. 因此, 考虑如下投资组合

$$\text{范围期权} = \{H^{\min} - \text{两值买权多头}, H^{\max} - \text{两值买权空头}\}, \tag{33}$$

这个范围期权 $T$ 时的支付如图 10-20 所示. 显然我们可以用两值期权来产生其他更复杂的范围结构.

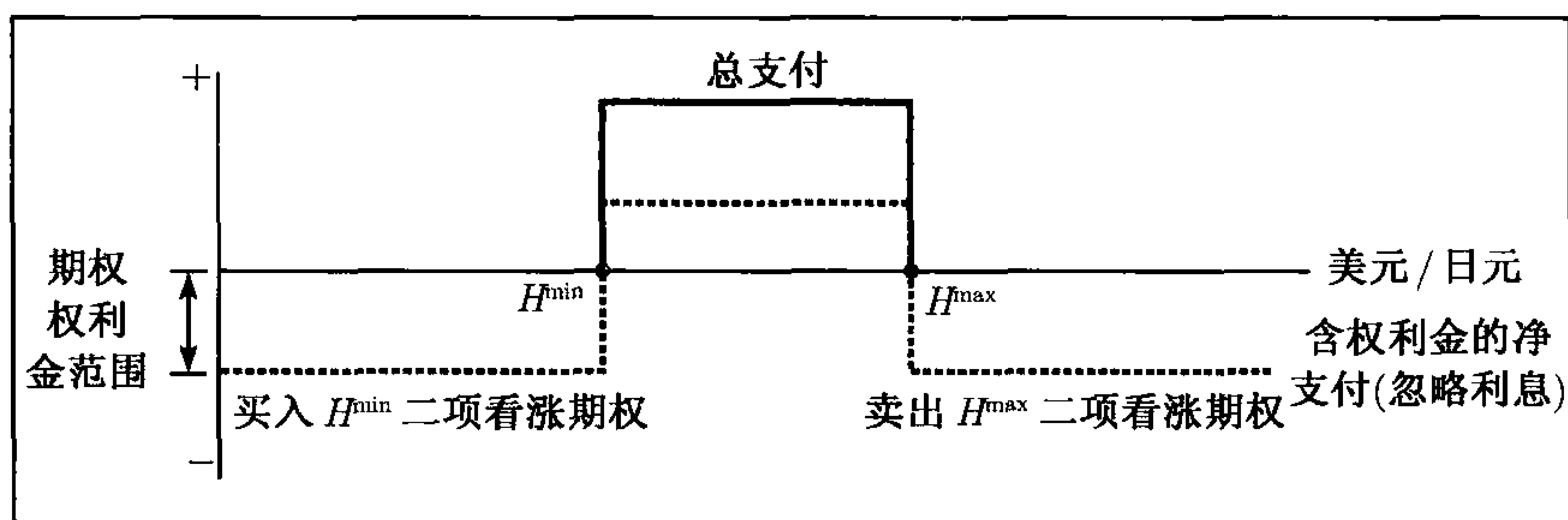



图 10-20

用 $C^{\text{range}}(T)$ 表示这个结构在 $T$ 时的支付, 它由下式给出

$$C^{\text{range}}(T) = \begin{cases} R, & \text{若 } H^{\min} < S_u < H^{\max}, \quad u \in [t, T], \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \tag{34}$$

由此可见, 这种情况下如果在期权的整个存续期 $S_u$ 都保持在 $[H^{\min}, H^{\max}]$ 这个范围内变化, 这个期权的支付就是常数 R, 否则支付为 0. 下面举例说明了两值期权的应用.

**例**

上周日本出口商抢购 1~3 个月的日元/美元两值期权, 交割价在日元 114~119 范围内, 也就是在赌 "日元将保持在此范围内". 如果日元交易价格保持在这个范围内, 期权的买方将会获得一个预先确定的支付, 但是如果在期权存续期跨过两个边界的任一个而超出这个范围, 投资者将会损失本金. 这个策略类似于买入一个日元抑制式期权, 虽然它对下方进行了限制. (摘自《衍生产品周刊》的文章)

图 10-20 显示了上面例子中提到的多头两值期权. 从日元的角度看, 两值期权和卖出美元抑制式期权有很多相似之处. [1] 这种范围期权也被称为"两端不碰" (double no touch) 期权.

① 也就是购买文中提到的日元抑制式期权.

### 10.4.2 障碍期权

障碍期权是应用普通期权策略的较便宜的工具. 为了构造一个障碍期权, 我们本质上是先持有一个普通期权, 然后加上适当选定的*障碍*. 如果期权存续期内, 标的超过了这些障碍, 那么期权的支付将发生*离散*的变化. 期权可能会*敲出*(knock out)或*敲入*(knock in), 意味着期权持有者将丧失或获得执行期权的权利.

现在来考虑两种最常见的情形. 设有一个欧式普通期权, 此期权标的为 $S_t$, 交割价为 $K$, 到期日为 $T$. 然后考虑两个障碍 $H^{\min}, H^{\max}$ 且有 $H^{\min} < H^{\max}$. 如果期权存续期间, $S_t$ 按某种确切定义的方式超过 $H^{\min}, H^{\max}$ 中的一个或两个, 那么期权就*不存在了*. 这种金融工具称为敲出期权. 图 10-21 给出了两个例子, 图的下部分是敲出买入期权. 如果期权存续期间, 我们发现

$$S_u < H^{\min}, \quad u \in [t, T], \tag{35}$$

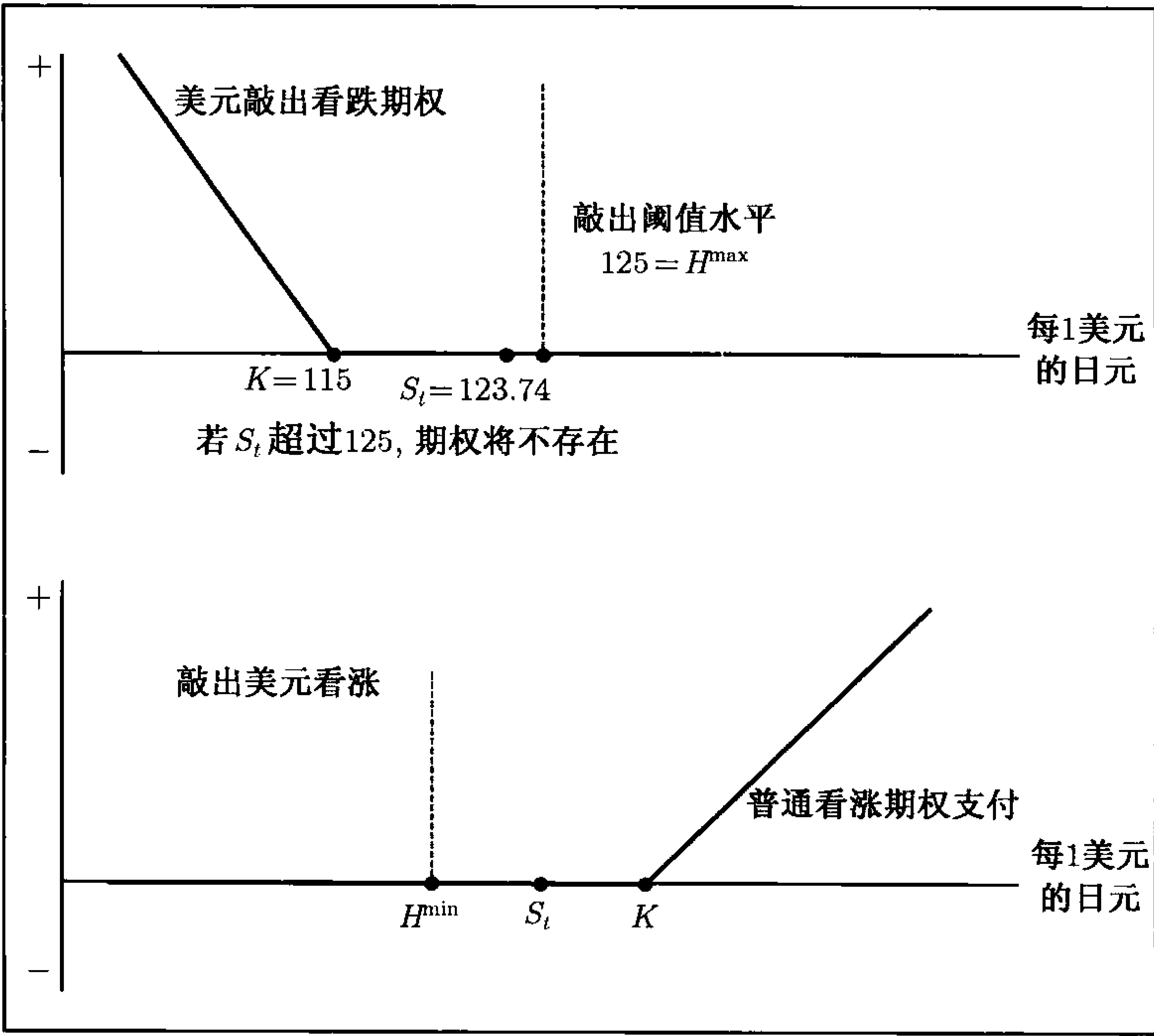



图 10-21

则期权就不存在了. 事实上, 这个期权是*下敲出*. 图的上部分表示的是上敲出卖出期权, 也就是当

$$H^{\max} < S_u, \quad u \in [t, T] \tag{36}$$

发生时, 期权就不存在了.

还有一种期权称为**敲入期权**, 这种期权与前面的敲出期权正好相反, 是当到达某些障碍后期权**生效**. 图 10-22 表示了一个敲入卖出期权. 本节将讨论具有相同交割价 $K$ 的一个 $H$ 敲出买入期权和一个 $H$ 敲入买入期权. 这种障碍期权的特征是当敲入或敲出时就会成为价外期权. 这里我们不研究敲入或敲出时具有正内涵价值的障碍期权. (这方面内容可参看 James(2003).)

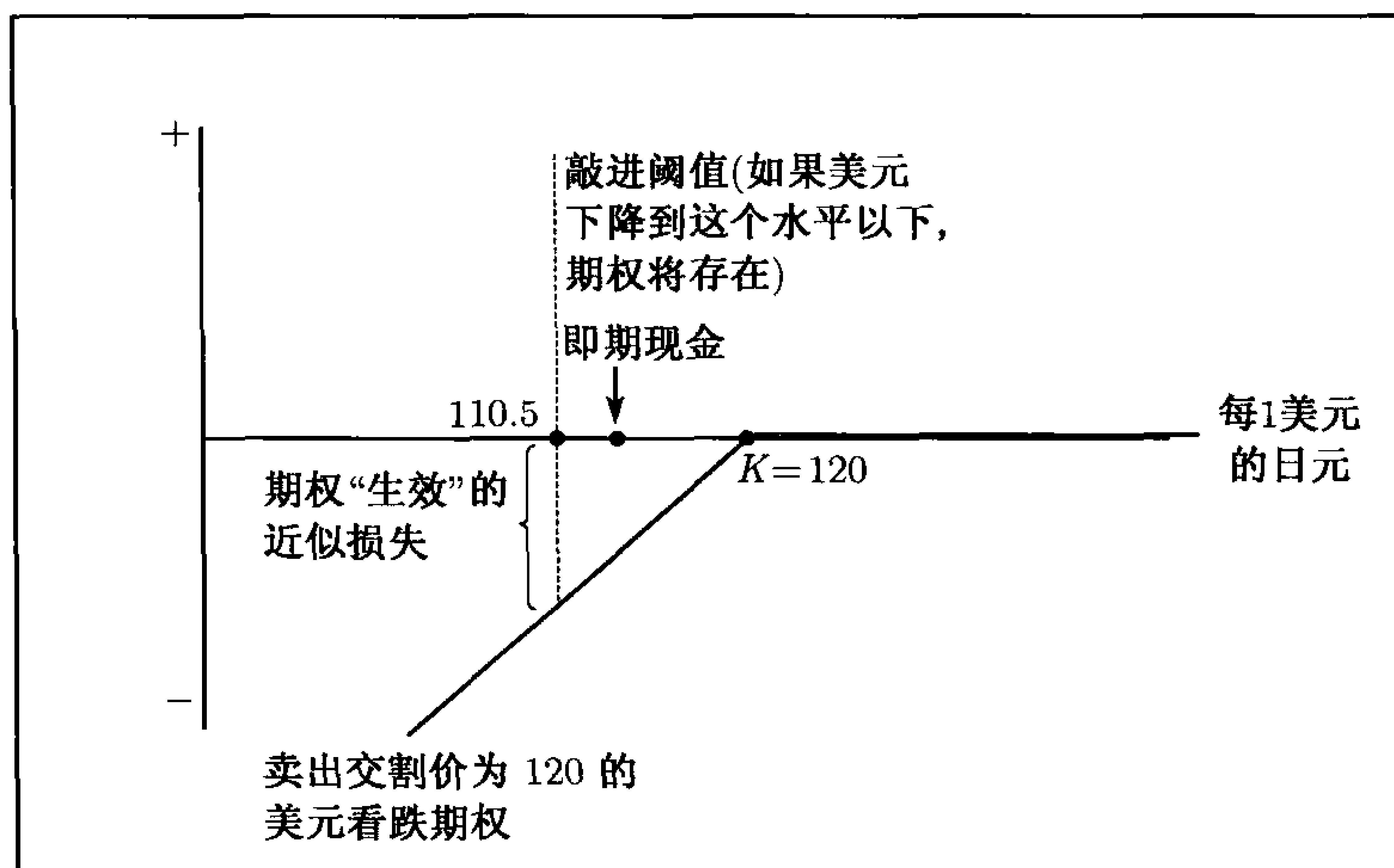



图 10-22

### 1. 一个合约方程

可以得到障碍期权和相应的普通期权的合约方程. 考虑交割价均为 $K$ 的两个欧式障碍期权, 标的是 $S_t$. 为了简单起见, 设 Black-Scholes 公式的假设都满足. 如果 $S_t$ 在任何时刻都不小于等于障碍 $H$, 则第一个期权, 即期权费为 $C^O(t)$ 的敲出买入期权有一个标准支付. 而对第二个期权, 即期权费为 $C^I(t)$ 的敲入买入期权来说, 只有当标的 $S_t$ 下降到障碍 $H$ 以下时, 它的持有者才会获得一个标准支付. 这些支付如图 10-23 所示. 每一种情况下, $H$ 的值使得期权的敲入或敲出发生在它的零内涵值区域内.

现在考虑下面的推理, 它将导出一个合约方程.

(1) 首先考虑 $S_t$ 小于障碍的情形: $S_t < H$. 因为 $S_t$ 已经小于 $H$ 了, 所以敲出买入期权已经没有价值, 而敲入买入期权却具有价值. 这时敲入期权**生效**, 期权持有者就有权获得一个标准买入期权的支付. 这意味着对所有的 $S_t < H$, 敲入买入期权与普通买入期权的价值相同. 即

$$\text{对于 } S_t < H, \text{敲入买入期权} + \text{敲出买入期权} = \text{标准买入期权} \tag{37}$$

$$=敲入买入期权, \qquad (38)$$

在此范围内敲出期权价值为 0.

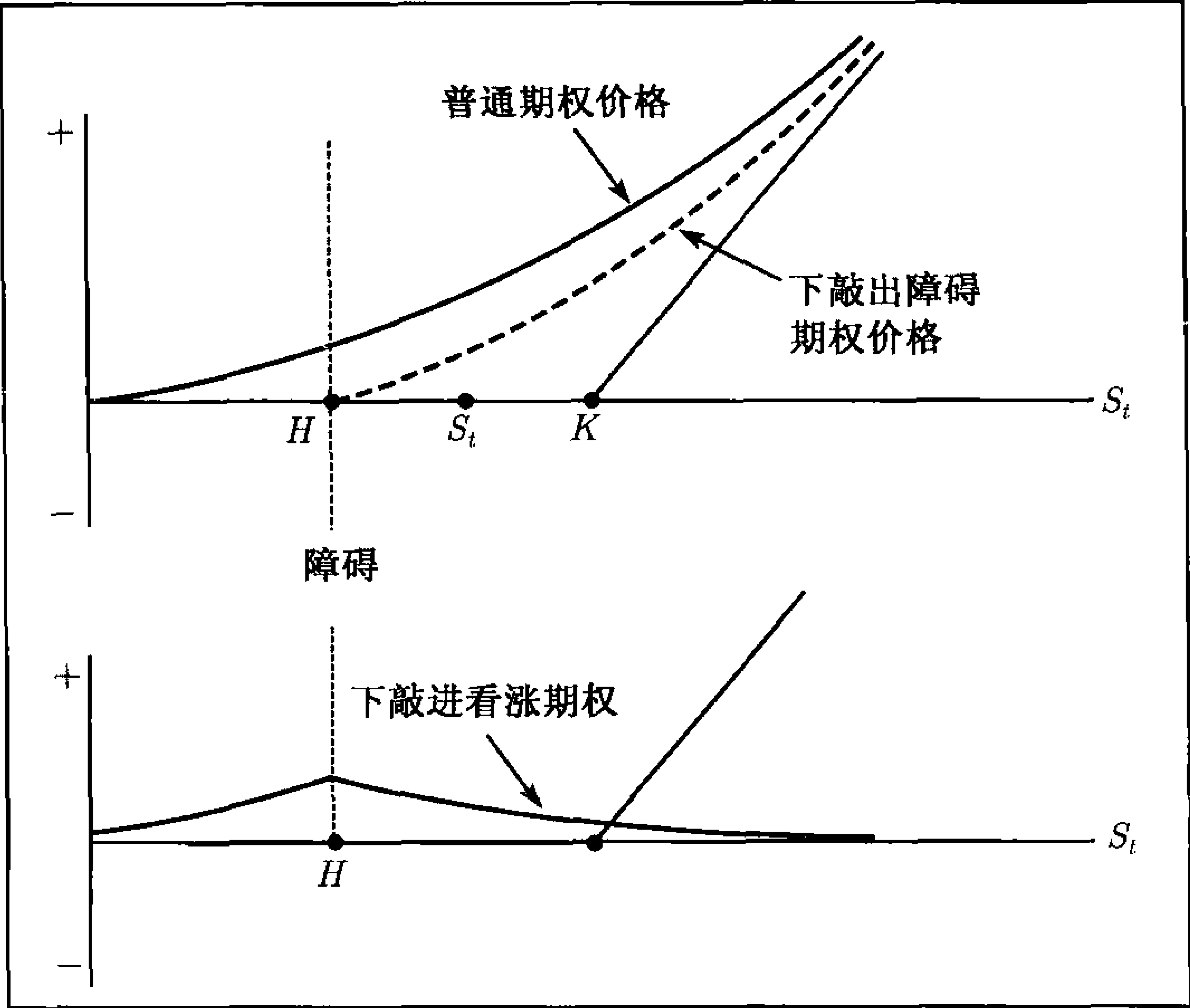



图　10-23

(2) 现在假设开始时 $S_t$ 大于 $H$. 那么在障碍期权存续期内有两种可能. $S_t$ 要么始终大于 $H$, 要么在某时小于 $H$. 在 $[t,T]$ 上这两种情况有且仅有一种发生. 这就是说, 如果我们同时买入敲入买入期权和敲出买入期权, 就一定能得到普通买入期权的支付. 换句话说, 我们有

$$\text{对于 } H < S_t, \text{敲入买入期权} + \text{敲出买入期权} = \text{标准买入期权}. \qquad (39)$$

把这两部分支付结合起来, 得到如下的合约方程:

| 普通买入期权, 执行价$K$ | = | 敲入, $K-$买入期权, 障碍$H$ | + | 敲出, $K-$买入期权, 障碍$H$ |
|---|---|---|---|---|

由此可以得到敲出和敲入障碍期权的定价公式. 事实上, 只要得到了两个障碍期权中的一个定价公式就自然能得到另一个. 第 8 章给出了标的满足 Black-Scholes 假设的敲出障碍期权的定价公式如下

$$C^O(t) = C(t) - J(t), \qquad (40)$$

其中

$$J(t)=S_t\left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}+2}N(c_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}}N(c_2),\tag{41}$$

$$c_{1,2}=\frac{\ln\frac{H^2}{S_tK}+\left(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\tag{42}$$

$C(t)$ 是标准 Black-Scholes 公式中普通期权的价格, $J_t$ 是要用到的折价因子, 因为如果 $S_t$ 在 $[t,T]$ 上小于 $H$, 则期权可能就不存在了.

从合约方程中知道有相同交割价 $K$ 和障碍 $H$ 的多头敲入和多头敲出买入期权等价于一个普通买入期权

$$C^O(t)+C^I(t)=C(t),\tag{43}$$

结合方程 (40) 我们得到敲入期权的定价公式

$$C^I(t)=J(t).\tag{44}$$

因此, 当敲入和敲出障碍期权在 Black-Scholes 假设下是价外期权时, (41)~(43) 的表达式给出了敲出和敲入障碍期权的定价公式.

注意到当 $S_t$ 到达障碍 $H$ 时, 即

$$S_t=H\tag{45}$$

时, $J_t$ 的表达式变为

$$J(t)=S_tN(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2).\tag{46}$$

这就是说, $C^O(t)$ 的值为 0. 根据这些我们画出了图 10-23 中敲出看涨期权价格的图形. 可见敲出期权比普通期权便宜, 折价越大, $S_t$ 越接近于障碍 $H$. 敲出期权的 delta 处处比普通期权的大, 并在 $H$ 处是不连续的.

最后, 图 10-23 表示了敲入期权的定价函数图形. 为了得到这个图形, 我们在图 10-23 上面的图形中从 $C(t)$ 减去 $C^O(t)$. 读者可能会感到奇怪, 敲入买入期权随着 $S_t$ 向 $K$ 的右边移动而变得更便宜. 难道这个期权不是变得更加价内吗? 答案是否定的. 因为只要 $S_t>H$, 敲入期权的持有者就不能获得普通期权的支付. 换句话说, 随着 $S_t$ 向右移动, 敲入期权持有者获得普通期权支付的机会变小了.

2. 障碍期权的一些应用

障碍期权的流动性非常好, 尤其是在外汇市场上. 下面的例子讨论了跟障碍期权有关的支付图表.

下一个例子讲述敲入期权在货币市场上的另一种应用方式. 图 10-22 到图 10-24 表示了这些情形.

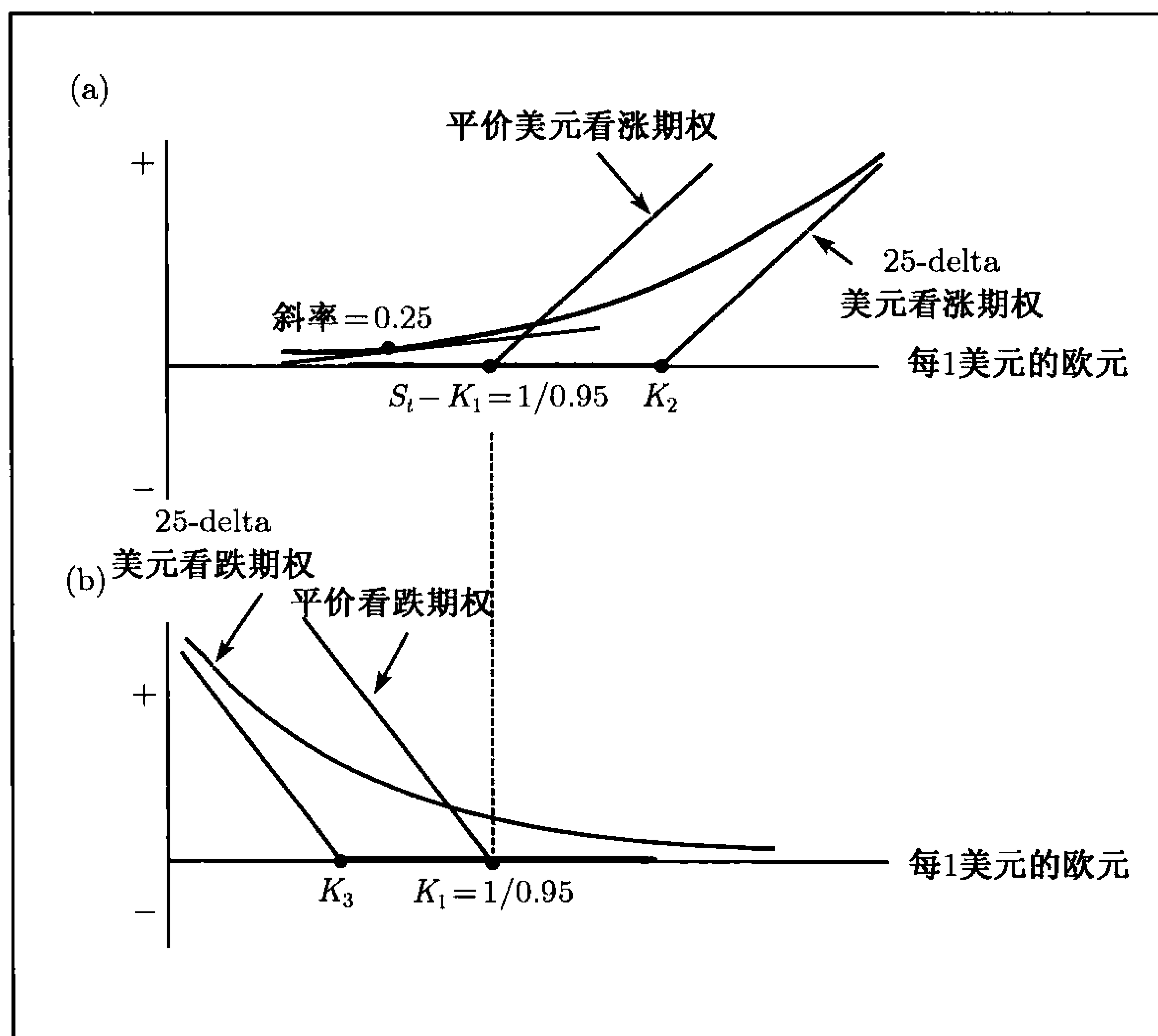



图 10-24

**例**

上周美元卖出期权 (日元买入期权) 卖得很好. 对它的需求来自关于奇异敲入期权结构的止损交易. 12 月末一些交易商卖出了交割价为 119 日元, 敲入障碍为 109.30 日元的一个月期美元卖出期权. 随着上周初日元向着障碍水平移动, 这些交易商都赶紧去买冲抵工具.

对冲基金不是寻求冲抵工具的唯一客户. 市场对短期美元卖出期权的需求很大. "人们还在卖空日元," 一位交易商说,"风险逆转比美元卖出期权还高 4 个点, 是我所见过的最高的."(摘自《衍生产品周刊》的文章)

按照这个例子, 当美元对日元汇率向 110.6 日元下跌时, 卖出敲入期权的对冲

基金将突然面临这些期权生效的可能性，从而可能带来损失.[1] 结果是对冲基金通过买价外卖出期权来冲抵这些头寸. 这是和奇异期权结构有关的新风险的一个很好的例证. 障碍期权的盯市价值在无限小的区间内的变化可以是离散的而不是"循序渐进"的.

下面例子考虑包含更复杂结构的障碍期权. 实际上障碍可能跟标的之外的风险有关. 这个例子展示了航空公司怎样应用障碍期权.

航空公司有三种基本成本：劳动力、资金和燃料. 劳动力成本可以通过工资合同长期"固定". 然而利率风险和燃料价格风险都是浮动的，这些因素在任何时刻突然的大幅变动都可能给航空公司造成严重损失. 下面的例子解释了航空公司怎样用单个的障碍期权来对冲这两方面的风险因素.

**例**

*虽然目前奇异期权市场不是很不景气，客户们还是希望用更加便宜的方法进行对冲，特别是如果这些对冲的支付与他们财务报表中其他敞口有关的话，他们更希望如此. 因此障碍产品就特别受欢迎. 许多公司正寻求利用敲出期权来尽量降低他们运作的成本.*

*例如，航空公司通常要面临利率风险和燃料价格风险. 如果利率超过某一特定水平，它将要支付一个传统的上限. 但在障碍结构的情况下，如果燃料价格较低的话，就不用这样. 因为只有当利率和燃料价格都高的时候期权才会生效. 这样对冲的成本就比分别对冲的成本要低. (IFR, 1995 年 5 月 13 日)*

这种障碍期权的应用可以降低对冲成本而在交易中用起来很方便. 本章末的练习包含一些奇异期权的进一步的例子. 下面讨论跟奇异期权相关的一些新的风险和困难.

### 10.4.3 新的风险

奇异期权通常是便宜并且方便的，但它们也有风险. 奇异期权账面的风险管理不是很容易，这是因为：(1) 由于障碍的存在而使各自的希腊字母 (Greeks) 不连续；(2) 隐含波动率具有微笑效应.

如前面三章讨论的那样，期权账面的风险管理要用到各种各样的希腊字母或它们的修正. 因为障碍的缘故，一些希腊字母在障碍处不存在，由此产生的不连续性使风险管理更加复杂. 下面我们回顾一下这些新的问题.

(1) 障碍期权的某些希腊字母可能会有跳跃，这是期权账面风险管理的一个新因素. 接近障碍时，即使标的价格发生很小的变化也会引起障碍期权希腊字母的离散变化. 这些敏感因素的极端变化使各自的 delta, gamma 和 vega 在估计和管理标的风险时更复杂.

---

① 假设他们还没有对冲其头寸.

(2) 障碍期权是依赖于路径的. 例如, 期权到期日或到达障碍之前, 每个时间点的障碍可能是相关的. 这就使得蒙特卡罗定价和风险管理技术更复杂并且成本更高. 此外, 在障碍附近需要进一步模拟路径, 这也很费事.

(3) 由普通期权和数字期权构造的障碍期权对冲可能会有更多困难并受*微笑效应*的严重影响.

本书不讨论这一类关于奇异期权的风险管理. 不过将在第 15 章讨论微笑效应.

## 10.5 报价惯例

期权市场上的报价惯例可能会很复杂. 假定做市商把期权看成波动率工具, 他们经常直接报价波动率而不是给出期权的现金价值. 这些报价有时容易混淆. 研究它们最好的途径是考虑风险逆转. 风险逆转的报价阐明了波动率的作用, 并表明了*波动率微笑存在偏斜*(skewness), 我们将在第 15 章单独介绍一个重要的经验结果.

下面是一个有关风险逆转的例子:

*一个月的风险逆转从两个星期前的 0.2 跳到了星期三的 0.81, 这有利于欧元买入期权.*

直接解释这个表述不是很容易理解. 我们以欧元/美元汇率为标的风险进行讨论. 考虑一个图 10-24a 所示的美元买入期权, 假定即期交易是以 0.95 进行的且期权是平价的. 同一个图中我们还作出了一个 25delta 买入期权的图形. 类似地, 图 10-24b 中表示一个平价美元卖出期权和 25delta 卖出期权, 这个卖出期权将是价外的. 假设所有这些期权都是普通欧式期权.

现在考虑如下关于两个*不同*25delta 美元风险逆转的报价:

$$\text{例1}: \text{“}flat/0.3\ \text{美元买入价”}, \tag{47}$$

$$\text{例2}: \text{“0.3/0.6 美元买入价”}. \tag{48}$$

对这种买卖价差的解释不是直接的. 报价中的数字不是关于美元的而是关于*波动率*的. 简单来说, 即斜杠右边的数是做市商卖出风险逆转时愿意接受的*波动率差额*, 斜杠左边的数是他愿意为这个头寸支付的波动率的差.

右边的数跟做市商*卖出*25delta 美元*买入*期权有关, 同时也跟买入 25delta 美元*卖出*期权有关, *从客户的角度看*, 就是图 10-25a 所表示的风险逆转. 注意, 对客户来说这种情况是与 "美元强势" 相关的. 如果做市商卖出这个风险逆转, 那么他将*卖空*该头寸.

斜杠左边的数对应于*买入*一个 25delta 美元买入期权并*卖出*一个 25delta 美元卖出期权的情况, 如图 10-25 所示. 当有需求时, 这种结果是跟 "美元弱势" 相联系的.

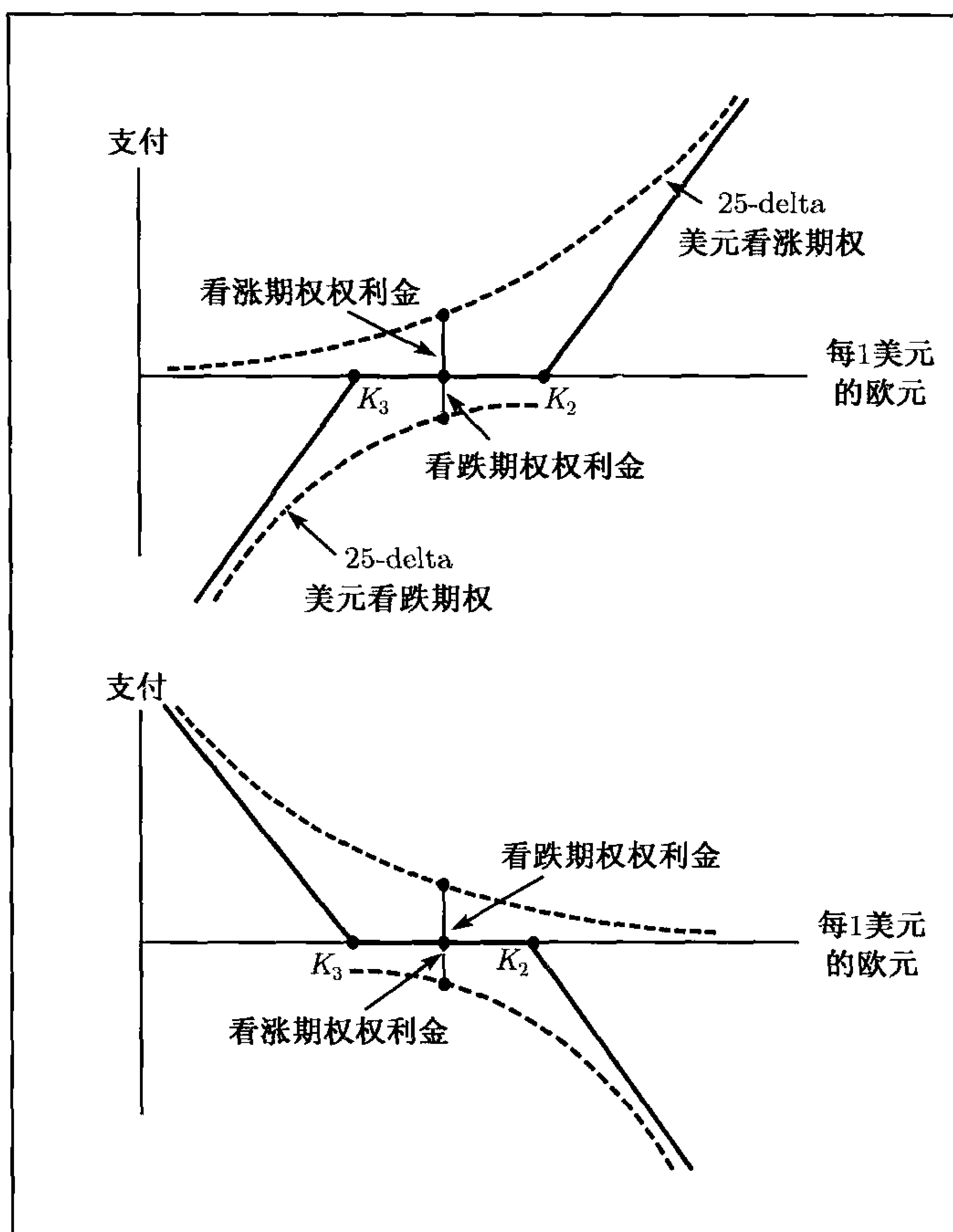



图 10-25

### 10.5.1 例 1

现在我们来看一下对第一个例子中数值的解释：

$$\text{例1：“}flat/0.3\text{ 美元买入价”.} \tag{49}$$

这个报价左边是“平的”，意思是买入一个 25delta 美元买入期权和同时卖出一个 25delta 美元卖出期权是在*相同波动率*下进行的. 向做市商卖出这个头寸的客户不用支付也不会收到其他额外的金额，因此这个交易是“零成本的”. 换句话说，双方会采用相同的波动率，并把它代入到 Black-Scholes 公式中得到卖出期权和买入期权的价格. 报价中右边的数表示了一个*偏差*. 它意味着做市商只有在能净赚 0.3 波动率点 (volatility points) 的情况下才愿意卖出 25delta 美元买入期权并买进 25delta 美元卖出期权. 这意味着卖出美元买入期权采用的波动率值要比买进美元

卖出期权采用的波动率值高 0.3 点. 做市商认为市场上存在一个支持美元强势的 "偏差", 因此, 买这个风险逆转的客户要花费一定净成本.

### 10.5.2 例 2

第二个报价由下式给出

$$\text{例2}: \text{"0.3/0.6 美元买入价"} \tag{50}$$

这比前面复杂一些, 当然斜杠右边的数 0.6 跟第一个例子中的 0.3 意义是类似的. 也就是说, 如果客户想在 "美元强势" 上下注, 做市商要求能净赚 0.6 个波动率点.

然而, 报价中斜杠左边的数不再是 "平的" 而是一个正数 0.3. 这意味着市场上支持 "美元强势" 的偏差如此之大, 很多客户都想要这个多头头寸, 以至于做市商在买入 25delta 买入期权和卖出 25delta 卖出期权时愿意*支付*0.3 个波动率点.

因此, 在一个风险逆转的报价中, 左边的数是*做市商愿意支付的波动率差额*, 右边的数是*做市商想赚到的波动率差*. 每种情况下, 为了确定标的期权的成本, 市场参与者必须同意某个*基本波动率*并把它作为一个基准来引入波动率差.

## 10.6 现实中的复杂性

要把本章讨论的合成支付结构运用到实际中, 还必须考虑它们在现实中存在的几个缺陷. 首先, 这些头寸是在到期日表示并且是逐段线性的, 而实际中, 支付图表可能包含几个凸性, 它是非线性支付的一个等价项. 我们简要回顾一下这些问题.

### 10.6.1 波动率微笑的作用

波动率微笑 (volatility smile) 的存在严重地影响了奇异期权的定价及对冲. 如果存在波动率微笑, 隐含波动率就成了交割价 $K$ 的函数. 因此, (29) 和 (30) 中给出两值期权价格 $C^{bin}(t)$ 的表达式必须修正为

$$C^{bin}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{C^K(t) - C^{K+h(t)}}{h} \tag{51}$$

$$= \frac{\partial C^K(t)}{\partial K} + \frac{\partial C^K(t)}{\partial \sigma(K)}\frac{\partial \sigma(K)}{\partial K}. \tag{52}$$

由此得到的定价公式以及和普通期权 delta 类似的特征都将发生变化. 对冲和合成构造障碍期权也必须进行同样的修正.

### 10.6.2 头寸限制的存在性

在到期日之前 $t$ 时刻, 期权的价值除了依赖于标的价格 $x_t$ 外还依赖于其他很多变量. $x_t$ 的波动率和无风险利率是 $t < T$ 时影响头寸的两个随机变量. 这可以

从买入期权在 $t < T$ 时价格的 Black-Scholes 公式看出

$$C_t = C(x_t, t|\sigma, r), \tag{53}$$

这是一个关于参数 $r$, $\sigma$ 的函数, 在 $t = T$ 时, 这个公式简化为

$$C_T = \max[x_T - K, 0]. \tag{54}$$

如果 $r$ 和 $\sigma$ 是随机的, 那么在 $t \in [0, T)$ 时刻, 所考虑的头寸也会受 vega 和 rho 风险的影响. 如果一个交易者所能承受的风险是有限的, 他必定会在到期日 $T$ 之前关闭这些头寸, 尤其当头寸有 vega 风险时. 头寸限制的存在将改变问题的整个结构, 因为到现在为止, 我们在建立或持有前面讨论头寸的决策中还没有将 $r$ 和 $\sigma$ 的灵敏度考虑在内.

## 10.7 结　　论

本章讨论了如何合成构造预测市场和波动率发展趋势的头寸的支付图表, 这些头寸都是静态的. 我们特别集中于单风险因素函数且由普通期货和期权头寸复制的支付图表. 本章的第二部分讨论了用简单的奇异期权构造类似的头寸.

## 参考文献

有几本关于古典期权策略研究的好书, Hull(2002) 就很不错. 对于期权基础知识, 读者可以参阅 Jordan(2000) 和 Natenberg(1994). Das(1997) 里有关于头寸细节方面的很好总结. 也可以参阅教科书 Turnbull 和 Jarrow(1999), Ritchken(1996), Kolb(1999) 和 Chance(1997). 从市场角度看 Taleb(1996) 是关于奇异期权的很好的参考. 而技巧方面, 可以参阅 Musiela 和 Ruthkowski(1997) 中奇异期权的章节. 在期权交易技巧和期权定价公式方面, 可以参考 James(2003), 其中也讨论了奇异期权.

## 习　　题

1. 考虑一个熊市利差期权(bear spread). 一个投资者持有一个由 $x_t$ 表示的期货空头头寸. 但是他认为 $x_t$ 不会跌落到 $x^{\min}$ 以下.
   (a) 怎样构造一个头寸使得由它可实现下面目的: 通过放弃某个价位后的收益换取避免当 $x_t$ 增加到所期望的水平之上时带来的损失.
   (b) 你将为这个头寸支付多少?

(c) 最大收益是多少? 最大损失是多少?

(d) 用适当的图表表示你的结果.

2. 仔细阅读下面的材料并回答后面的问题.

一家银行向那些想在丹麦 9 月 28 日公民投票表决是否要加入经济和货币联盟 (EMU) 之前对冲丹麦克朗的投资者推荐的风险逆转. 纽约的一个货币期权交易商说, 如果丹麦人反对加入 EMU, 这一策略将保护客户应对丹麦克朗弱势. 丹麦有关报导显示在过去的几星期虽然赞成加入 EMU 的票数稍微领先, 但民众反对加入 EMU 的呼声日益高涨. 他补充道, 如果丹麦人赞成加入经济和货币组织, 则本国货币可能升值, 但上涨幅度不会很大.

上周一 6 个月和 12 个月的风险逆转是高于欧元买入期权 0.25%/0.45%, 这位货币期权交易商说, 如果上周一当丹麦克朗对欧元的即期汇率为 DKK7.45 时, 客户以交割价 DKK7.52 买进一个欧元买入期权并以交割价 DKK7.44 卖出一个欧元卖出期权, 那么这个风险逆转策略的成本为 0. 所有的期权都是欧式的且期限是 6 个月.

由于丹麦民众中反对加入经济和货币联盟的情绪高涨, 上周一 6 个月和 12 个月的欧元/丹麦克朗波动率从维持了 2000 年 4 月 10 日之前一整年的 0.6%/0.9%增长到了 1.55%/1.95%. 在 4 月 10 日的那一周, 由于几家银行买入 6 个月和 9 个月平价波动率, 波动率发生了转折. (摘自 2000 年 4 月 24 日《衍生产品周刊》)

(a) 用图表表示零成本风险逆转策略. 表示出 DKK7.44 卖出期权和 DKK7.52 买入期权.

(b) 注意到即期汇率是 DKK7.45, 但它不是上面两个交割价的中点, 这个策略怎样成为零成本的?

(c) 关于两个期权的隐含波动率, 最后一点说明了什么?

(d) "上周一, 6 个月和 12 个月欧元/丹麦克朗波动率是 1.55 %/1.95 %" 是什么意思?

(e) 平价波动率是什么意思? (看最后一句) 那么还有价外波动率吗?

3. 下面的问题是有关范围两值期权的. 这是奇异期权的另一个例子. 认真阅读下面的材料并回答后面的问题.

投资者正寻求买入范围期权. 由于持有者目的是当即期汇率保持在一个特定范围时获得一个固定支付, 并为此提前支付一笔费用, 所以这个工具就像一个直接的范围两值期权. 然而跟常规的范围两值期权不同的是, 这种期权的障碍只有在一段时间之后才存在. 也就是说如果即期汇率在障碍起作用之前超出范围, 那么这个结构也不会终止. 由此, 买方将持有一个高隐含波动率水平的 vega 空头头寸. (摘自《衍生产品周刊》的文章)

(a) 作出范围两值期权的支付图表.

(b) 为什么这种期权在外汇市场上特别有用?

(c) 你认为这种期权在什么时候更有用?

(d) 范围两值期权的空头头寸有什么风险?

4. 两端不碰期权是范围两值期权的另一个例子. 认真阅读下面的材料并回答其后的问题.

美元/日元波动率的波动促使期权交易商在用蝶式期权进行对冲时通过范围两值期权来获得高波动率. 普遍的交易包括障碍为 126 日元和 102 日元的一年的两端不碰期权. 万一价格落在这个范围内, 交易商就可以从一百万美元的支出中获得 15%~20%的期权费.

支持这些交易的是通过购买蝶式结构来对冲波动率空头头寸. 他们买入交割价为 102 日元的价外美元卖出期权/日元买入期权和一个交割价为 126 日元的价外美元买入期权/日元卖

出期权. (摘自《衍生产品周刊》的文章)

(a) 作出第一段中提到的结构的支付图.

(b) 你认为这些期权什么时候更有用?

(c) 这种情况下蝶式期权的作用是什么?

(d) 范围两值期权空头头寸的风险是什么?

(e) "上周二" 这个头寸有多少收益或损失?

5. 下面研究的是一种不同的范围期权, 称为范围累积期权. 范围累积期权可以用来直接预测波动率发展趋势. 交易商卖空波动率时, 他期望实际波动率比隐含波动率小. 然而, 在古典波动率分析范围内, 如果这种观点用普通期权来表达, 可能会要求进行动态对冲, 否则就必须购买较贵的跨式期权. 小交易行可能没有能力配置动态对冲所必需的资源.

这时我们可以用范围累积期权来代替. 期权的卖方收到一个支付, 这个支付取决于期权存续期间标的价格有多长时间保持在指定范围内. 首先阅读下面的内容.

管理着 720 亿加元 (484.2 亿美元) 的安大略教师养老金计划董事会 (Ontario Teacher's Pension Plan Board) 在检验它的范围累积期权和股票投资组合期权计划时, 着眼于股票衍生产品的应用. 股票衍生产品小组因为创下了相当可观的利润而新近增加了职员, 因此小组考虑提高它们的应用, 加拿大股票衍生产品的一位资产组合经理说…… 因为人员比以前多了, 小组就有时间开发更复杂的衍生产品策略, 一位交易商解释说. 根据市场官方的话, 安大略教师养老金计划委员会是加拿大最大最复杂的终端用户之一, 并被看成是养老金基金的领导者.

单个股票的范围累积期权多头头寸需要对股票价值设定一个范围. 期权存续期间股票在此范围内交易的每一天, 安大略教师养老金计划委员会都会收到一笔款项. 因此, 它类似于一个波动率空头头寸, 但是范围累积期权不需要动态对冲, 并且以开始的期权费为损失上限. (摘自《衍生产品周刊》的文章)

(a) 范围累积期权跟跨式期权或抑制式期权头寸有什么相似之处?

(b) 这里的期权头寸是静态的还是动态的?

(c) 从什么意义上讲范围累积期权完成了动态对冲所要实现的目的?

(d) 怎样用其他 "普通" 奇异期权合成地构造一个范围累积期权?

# 第 11 章　金融工程中的定价工具

## 11.1　引　　言

迄今我们之所以还没有进行有关资产定价*模型*以及与之相关的工具的讨论, 是因为金融工程中除了定价外还有其他许多重要的方面. 本章将在非常简单的背景下讨论资产定价模型, 并将统一前面的一些议题, 进而说明它们之间的精妙联系. 下面的讨论将会用到迄今所使用的金融工程原理的一个自然推广.

定价带来了至少*两个*问题, 它们乍看起来似乎难以通过任何满意的方式得到解决. 投资者喜欢收益但是厌恶风险. 这意味着具有不可分散化风险的资产将带来*风险溢价*. 但是当购买资产本质上取决于*主观*偏好时, 我们如何客观地度量这样的风险呢? 运用*效用函数*来建立风险溢价的模型在理论上可能可行, 但是从交易商的角度来看, 如果在过程中涉及了数百万美元, 此举对他们将不具有吸引力. 市场上风险溢价和参与者的效用函数之间的内在关系是实际定价决策中第一个让人烦恼的方面.

第二个问题与第一个问题有关. 无论如何, 定价方法需要建立在度量未来现金流的波动率基础上. 但是波动率是伴随着随机性和某个概率分布的. 对于一个将在实践中应用的资产定价方法, 我们如何赋予它一组合理的真实的概率呢? [①]

现代金融学已经找到了一种精巧且实用的方法同时处理这两个问题. 同行们并不采用明确模拟风险溢价的框架, 而是将这个问题*转化*为一个没有风险溢价的问题. 有趣的是, 这种转化使用的相关概率分布并不是*真实的概率*, 如果有合理数量的流动工具, 相关概率就变成了在任何时间点都可以在数值上进行计算的*市场决定概率*. [②]使用这种方法, 资产将在一个人造的风险中性环境中被定价, 这个环境间接地考虑了风险溢价. 这种方法称为*鞅方法*. 它在实际资产定价和风险管理中是一个强大的工具.

金融工程的初学者可能很难相信, 实际上存在着一个可以成功地应用到真实的定价里的几乎统一的金融资产定价理论. 毕竟, 有许多不同类型的资产, 而且即使是在理论层面上, 也似乎并非所有的资产都能使用同一种定价方法. 市场操作者可能已经听说过风险中性定价, 但是就像金融工程的初学者一样, 他可能会认为其背

---

① 注意到风险溢价的主观性质属于纯经济理论范畴, 而获得满意的真实概率分布的议题则属于计量经济学理论的领域.

② 也就是说, 不使用历史数据, 我们可以从当前的报价中推导出需要的概率分布.

后的基本理论非常*抽象*. 然而, 理论却非常有效. 本章从金融工程师的角度提供了对这种方法的讨论. 因此, 尽管本章的话题是资产定价, 我们处理它的方法却是基于前面章节中形成的思想. 本质上这种定价方法是作为合成资产创造的一般方法提出的.

当然, 像其他任何理论一样, 这种方法依赖于一些严格的假设. 本书中使用的方法将统一地在开始时提出一个公共假设. 我们只讨论那些使用*完全市场*假设的模型. 当市场是完全的, 则意味着有足够数量的流动工具.

本章将渐进地介绍一些在定价、对冲和风险管理中应用的重要理论结果. *主要*结果称为资产定价基本定理. 不通过数学证明, 我们将使用*金融工程的论据*来证明它, 并得到了一些重要的结果. 本章将介绍一些有实际应用前景的重要结果.

## 11.2 定价方法小结

本节将回忆前面章节中的一些重要论题. 假设我们已找到一个工具的*公平*市场价格. 首先, 我们使用金融市场上交易的流动性合约建立一个等价于这个工具的合成物. 很显然, 这样的合约必须真正存在. 其次, 一旦找到了这些流动性合约, 我们可以应用套利原则. *复制组合*的成本应该等于我们将要定价的工具的成本. 最后, 交易者将在这个成本中加入一个合适的利润, 从而得到公平价格.

在前面的章节中, 我们获得了远期利率协议、外汇远期以及其他一些准线性工具的合成物. 它们中的每一个都是资产定价的早期例子. 获得合成物进而查看它的成本是多少, 然后在这个成本中加入一个利润, 就获得了公平市场价格. 这种操作证明了我们可以扩展这种实际方法, 从而得到一般理论.

应该再次强调*定价*和*对冲*有时被看做是一枚硬币的两面. 实际上, 对冲一个产品需要找到一个复制组合, 然后用它去弥补原始资产里的头寸. 如果交易者是原始工具的多头, 则他将是复制组合的空头, 反之亦然. 通过这种方式, 风险敞口将会互相抵消且头寸将变得 “没有风险”. 这个过程创造了成本必定与原始资产价格相同的复制组合. 因此, 对冲将厌恶的风险转嫁给了其他方, 同时提供了定价原始资产的方法.[①]

定价理论在创造新产品时也很有用. 一个新产品本质上是一列不确定的现金流. 首先, 我们将有同样现金流的金融工具放在一起. 然后, 卖出一个单独的合约从而将这些现金流以一个*新名字*卖给别人. 例如, 可以购买一些远期利率合约或期货, 并且将产生的现金流以互换的名义卖给其他人. 新产品实际上是用现有工具动

① 如果对冲不完全, 做市商将在成本中加入其他的边际利润来解决标的风险敏感性上的任何小的偏差. 例如, 如果某个奇异期权不能通过现货和货币工具完全对冲, 做市商将提高或者降低价格来考虑这些不完全因素.

态获得的组合, 而且它的公平价格等于它的组成资产的价格之和.

## 11.3 框 架

我们使用的定价框架强调了现实中的理论. 假设在时间 $t_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 观测到了 $m$ 种流动资产的价格. 第 $k$ 种资产 $t_i$ 时的价格用 $S_{kt_i}$ 来表示. 后者可以代表股票、固定收益工具、相应的衍生品或商品的价格.

理论上, 一个典型的 $S_{kt_i}$ 可以取任何实数值. 这使得可能值的数量变为无限且不可数. 但是在实际中, 每一个价格都是报到一定数量的小数位, 因此未来的可能值是可数的. 例如, 汇率通常报到 4 位小数. 这把我们带到了下一个将要介绍的重要概念.

### 11.3.1 世界的状态

设 $t_0$ 代表 "现在", 考虑在未来日子 $T=t_i(i>0)$ 时的价格 $S_{kT}$. 在 $t_0$ 时, $S_{kT}$ 将是一个随机变量①. 设符号 $\omega_j(j=1,\cdots,n)$ 代表与随机变量 $S_{kT}$ 有关的 $T$ 时世界的状态. ② 我们假设 $n\leqslant m$, 这等于是说流动资产的数目至少与 $T$ 时世界状态的数目一样多. 例如, 在金融市场上通常假设 "牛市"、"熊市" 或者 "无变化" 状态. 交易员希望未来的价格 "更高"、"更低" 或者 "保持不变". $\omega_j$ 推广了这种特性而且使它变成可操作的.

**例**

在这个例子里, 我们构造了与某种资产有关的世界状态, 这种资产在 $t_i$ 时的价格用 $S_{t_i}$ 表示. 不失一般性, 令

$$S_{t_0}=100. \tag{1}$$

假设在未来时间 $T(t_n=T)$, 世界只有 $n=4$ 种状态. 我们考虑如何定义这些状态.

(1)为某个网格参数 $\Delta S$ 指定数值, 从而给 $S_T$ 的邻近值分配一个状态. 例如, 令

$$\Delta S=2. \tag{2}$$

(2) 下面, 挑出上限和下限 $[S^{\min},S^{\max}]$, 使得 $S_T$ 落在这个区间之外的概率相对较小, 而且这个范围之外的偏离可以忽略. 例如, 令 $S^{\max}=104$ 和 $S^{\min}=96$. 相应地, 事件 104< $S_T$ 和 $S_T$ <96 被认为是不太可能发生的, 因此, 不需要仔细分析

① 另一方面, 资产的当前价值 $S_{kt_0}$ 是已知的.

② 根据这种考虑, $\omega_j$ 应该带有下标 $T$. 但是我们忽略了它, 请读者记住这一点.

世界的这些状态. 显然, $[S^{\min}, S^{\max}]$ 数值的选择依赖于在时间段 $[t_0, T]$ 内对 $S_t$ 所观察到的波动率.①

(3) 世界的状态可以用下列方式来定义:

$$\omega^1 = \{S_T \text{ 使得 } S_T < S^{min}\}; \tag{3}$$

$$\omega^2 = \{S_T \text{ 使得 } S_T \in [S^{min}, S^{min} + \Delta S]\}; \tag{4}$$

$$\omega^3 = \{S_T \text{ 使得 } S_T \in [S^{min} + \Delta S, S^{min} + 2\Delta S = S^{max}]\}; \tag{5}$$

$$\omega^4 = \{S_T \text{ 使得 } S^{max} < S_T\}. \tag{6}$$

图 11-1 表示了这种情形.

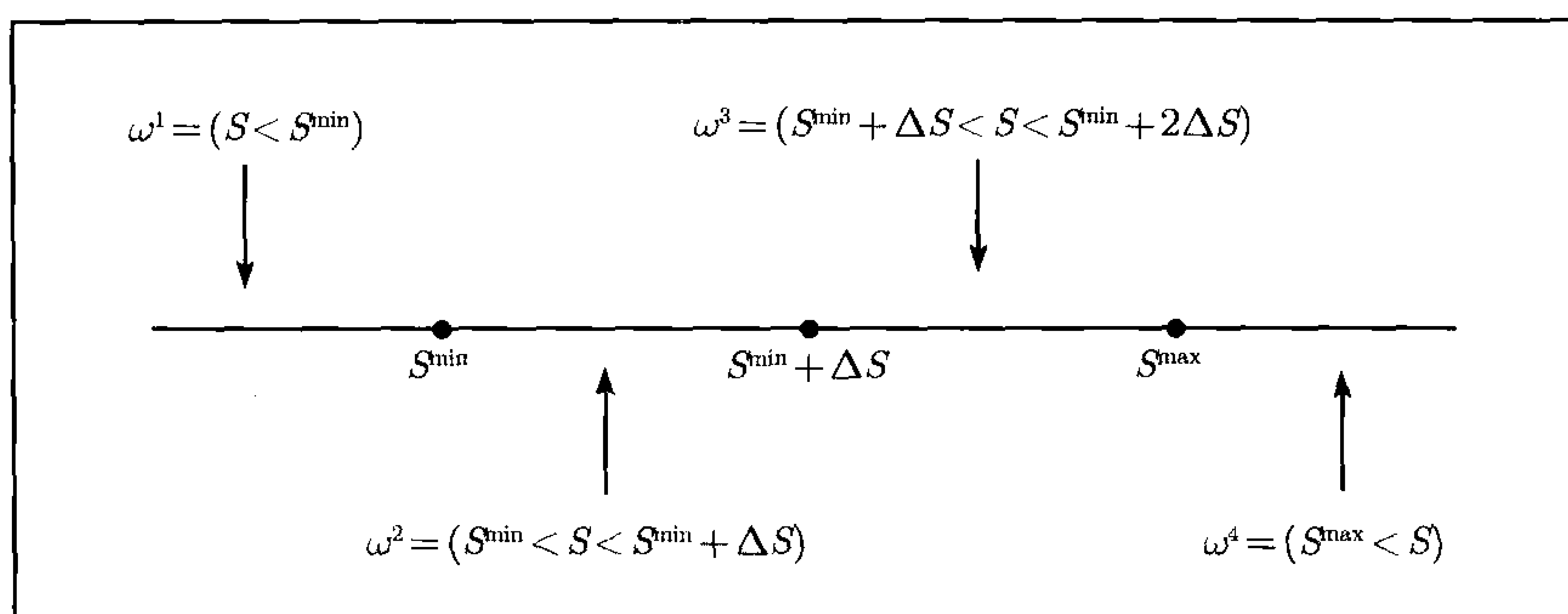



图　11-1

这里, 世界状态的总数依赖于网格参数 $\Delta S$ 的大小以及上限和下限 $[S^{\min}, S^{\max}]$ 的选择. 它们反过来又依赖于 $t_0$ 时的市场心理状态. 例如, 如果发现这里所示的 $S_T$ 是唯一与特定日子里面临的定价和风险管理问题相关的范围, 那么状态总数 $n = 4$ 的选择可以得到证明. 如果考虑的问题需要对未来进行更细致或者更粗糙的划分, $n$ 的值将相应地改变.

### 11.3.2　支付矩阵

获得资产定价基本定理的下一步骤是给出时间 $T$ 时支付矩阵的定义. 资产 $S_{kt}$ 在 $T$ 时的价值依赖于在 $T$ 时出现的世界状态 $\omega^i$. 假定我们处理的世界状态的数目是一个有限数. 那么这些资产的可能价值很容易列出. 令 $z_k^i$ 代表第 $k$ 种资产在状态 $\omega^i$ 下, 在 $T$ 时假定的价值

$$S_{kT}^i = z_k^i. \tag{7}$$

① 在实践中, 这些上限和下限需要根据观测到的流动资产的无套利价格来适当校准.

那么, 对于前 $n$ 种资产, $n \leqslant m$, 我们可以获得 $T$ 时的支付矩阵如下:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \cdots & z_1^n \\ & \cdots & \\ z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

矩阵的行将代表某种特定的资产在不同状态下的可能值, 列代表在某一特定状态下不同资产的价格. $\omega^i$ 的定义自动导出所考虑资产的可能值的定义, 如前面例子所示.

资产定价基本定理告诉我们, "现在" 的资产价格 $S_{kt}$ 如何与用矩阵 $\boldsymbol{D}$ 表示的未来可能值之间发生联系, 我们将获得一个在接下来的 3 章都具有重要作用的矩阵方程.

### 11.3.3 基本定理

考虑一列以世界状态 $i$ 为指标的 $Q^i$ 所定义的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} S_{1t_0} \\ \cdots \\ S_{nt_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \cdots & z_1^n \\ & \cdots & \\ z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ Q^n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

左边项表示在 $t_0$ 时观测到的流动资产的当前价格向量. 右边项有两部分: 第一部分是这些资产在 $T$ 时的可能值矩阵 $\boldsymbol{D}$; 而第二部分是常数向量 $\{Q^1, \cdots, Q^n\}$. 资产定价基本定理是关于这个矩阵方程以及 $\{Q^i\}$ 的性质的. 定理的叙述如下.

**定理** $t_0$ 时的价格 $\{S_{kt_0}\}$ 是无套利的当且仅当 $\{Q^i\}$ 存在并且是正的.

定理实际上是双向的: 如果 $S_{kt_0}$ 是无套利的, 那么 $Q^i$ 存在并且都是正的; 如果 $Q^i$ 存在而且是正的, 那么 $S_{kt_0}$ 是无套利的.

资产定价基本定理为现实世界的资产定价提供了一个统一的定价工具. 在本章的余下部分中, 我们将得出这个定理隐含的重要意义. 它们可以看作是在资产定价中的自然推论. 这些推论中的第一个是合成概率的存在性. 但是, 在讨论这些结果之前, 我们需要推出 $\{Q^i\}$ 并且说明为什么定理成立.

### 11.3.4 套利机会的定义

无套利价格意味着什么? 为了回答这个问题, 我们需要正式定义套利机会. 本节概述的框架的正式定义给出了这个定义. 考虑资产价格 $S_{1t}, \cdots, S_{kt}$, 每个资产 $S_{it}$ 给予组合权重 $\theta_i$. 然后, 我们可以说如果下面两个条件中的一个成立, 那么就存在套利机会.

(1) 权重为 $\theta_i$ 的一个组合满足

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i S_{it} = 0, \tag{10}$$

同时有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \theta_i S_{iT}. \tag{11}$$

根据这些条件, 市场操作者在 $t$ 时不需预付任何现金就可以构造一个资产组合, 但是仍然有机会在 $T$ 时获得非零收益. 这是套利机会的第一种类型.

(2) 权重为 $\theta_i$ 的一个组合满足

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i S_{it} \leqslant 0, \tag{12}$$

同时有

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i S_{iT} = 0. \tag{13}$$

在这种情形下, 市场操作者在 $t$ 时获得现金, 并同时形成一个在 $T$ 时没有任何债务的组合.

显然, 在任何一种情形下, 这些**套利组合**的大小是任意的, 因为不需要承受任何债务. 无套利价格的正式定义要求: 在 "当前" 价格 $\{S_{it}\}$ 下, 这样的套利组合不可行.

注意, 市场专业人士所称的套利策略与套利机会的正式定义有很大不同. 一般地, 当操作者提到套利时, 他们是指发生损失的可能性相对很小的头寸. 显然, 这违背了上面提到的两种条件. 本章引入的方法处理的是缺少正式的套利机会而不是缺少市场操作者的套利策略. 应该记住, 正式的无套利条件提供了在定价和风险管理中使用的重要工具.

### 11.3.5 解释 $Q^i$: 状态价格

给定世界的状态 $\omega^i, i = 1, \cdots, n$, 我们可以写出在有两个重要工具的特别情形下的矩阵方程. 这两个工具对于理解无套利定价是必不可少的. 假设第一种资产 $S_{1t}$ 是**无风险的储蓄存款账户**, 而且不失一般性, 用 $t_i$ 代表年.① 如果在 $t_0$ 时存入 1 美元, 那么在 $t_1$ 时没有任何**违约**风险就能获得 $1 + r_{t_0}$. 这里 $r_{t_0}$ 是在 $t_0$ 时观测到的利率.

第二个工具是**基本保险合同**. 我们用 $C_i$ 来代表它们. 这些合同按下列方式定义.

- 如果 $\omega^1$ 发生, 则 $C_1$ 在 $T$ 时支付 1 美元. 否则, 支付为 0.

  ……

- 如果 $\omega^n$ 发生, 则 $C_n$ 在 $T$ 时支付 1 美元. 否则, 支付为 0.

① 这简化了记号, 因为天数调整参数将等于 1.

如果一个市场操作者认为状态 $\omega^i$ 是有风险的, 他可以买入所需数量的 $C_i$ 作为保险来保证在那种状态下所需要的现金流.

现在假设所有的 $C_i$ 在 $t_0$ 时都能活跃地交易. 那么, 根据矩阵方程, 这些合同正确的无套利价格由 $Q^i$ 给出. 这是因为将储蓄账户和 $C_i$ 在 $t_0$ 时的现价代入到矩阵方程 (9) 后可以得出①:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ C_1 \\ \cdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+r_{t_0}) & \cdots & \cdots & (1+r_{t_0}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ Q^n \end{bmatrix}. \tag{14}$$

根据这个矩阵方程, $Q^i$ 具有三个重要的性质. 首先, 它们等于基本保险合同的价格

$$C_i = Q^i. \tag{15}$$

正是由于这个原因, $Q^i$ 也被称为状态价格. 其次, 我们可以说明, 如果利率是正的, 那么 $C_i$ 在 $t_0$ 时的价格之和小于1. 考虑下面的叙述: 一个在 $t_0$ 时购买每一个保险合同 $C_i$ 的组合将保证在 $t_0$ 时无论在 $T$ 时发生哪种状态 $\omega^i$, 都能获得 1 美元. 但是只要利率是正的, 那么保证得到的未来 1 美元的价值将少于现在 1 美元的价值. 这意味着在 $t_0$ 时用来支付基本合同的 $Q^i$ 之和应该满足

$$Q^1 + Q^2 + \cdots + Q^n < 1. \tag{16}$$

由矩阵方程 (14) 的第一行我们可以写出

$$\sum_{i=1}^{n} Q^i(1+r_{t_0}) = 1. \tag{17}$$

重新整理后得到

$$Q^1 + Q^2 + \cdots + Q^n = \frac{1}{(1+r_{t_0})}. \tag{18}$$

第三条性质理解起来有一点困难. 如基本定理所述, 如果 $C_i$ 确实是无套利的, 那么没有一个 $Q^i$ 可以为负或为 0. 我们将用一个简单的柜台例子来说明这一点.

**例**

假设 $n = 4$ 而且第一个基本合同的价格为负, $C_1 = -1$. 不失一般性, 假设其他所有基本合同的价格为正. 那么资产组合

$$\{(Q^2+Q^3+Q^4)\text{单位的 } C_1, 1\text{单位的 } C_2, 1\text{单位的 } C_3, 1\text{单位的 } C_4\} \tag{19}$$

① $D$ 是 $(n+1)\times n$ 维矩阵.

在 $t_0$ 时成本为 0, 但是, 将保证在 $t_1$ 时有一个正的收益. 更准确地说, 在状态 2 至状态 4 时收到 1 美元, 而在状态 1 时收到 $(Q^2+Q^3+Q^4)$ 美元.

因此, 只要一个或者更多的 $Q^i$ 为负, 则总会存在套利机会. 一个交易员可以"买入"价格为负的合同, 并且运用产生的现金来购买其他合同. 通过这种方式保证了一个正的收益, 同时获得了零成本结构的初始组合. 为了使这样的套利机会不存在, 则对所有的 $i$, 都应有 $Q^i > 0$.

注记

在进一步讨论之前, 我们问两个问题, 这两个问题可能从书中提出金融工程方法后就已经困扰读者了.

- 像 $C_i$ 一样的保险合同在真实世界里存在吗? 它们的交易活跃吗?
- 世界状态数目比较小的假设是真实的吗? 对未来的这种限制如何在定价真实世界工具中发挥作用?

在接下来的几节里, 我们将说明上面两个问题的答案都是有条件成立的. 为了理解这一点, 我们需要将基本保险合同与期权的概念相关联. 期权可以看作是交易一篮子 $C_i$ 的方式. 当状态 $i$ 发生时一个典型的 $C_i$ 支付 1 美元, 而其他状态发生则不支付. 因此, 期权在到期日的支付与基本合同的支付是不同的. 如果到期时期权是价外的, 则不支付, 但如果是价内的, 则支付 $(S_T - K)$. 这依赖于我们如何定义状态 $\omega^i$, 不同于基本合同, 期权可以在多种状态下发生支付. 但是这种差别不是真的那么重要, 因为如果期权对所有执行价进行交易, 我们就可以从期权价格中得到想要的 $C_i$. 换句话说, 我们这里讨论的定价框架在实际中比最初看起来有用得多.

对于第二个问题, 这里必须说明, 在实际中, 一个期权的执行价很少是积极交易的. 这表明有限状态的假设最终可能并不是那么不实际.

## 11.4 一个应用

基于状态价格和基本保险合同的框架是一个十分有效和现实的定价工具. 在深入讨论并且从资产定价基本定理中获得更多的结果之前, 我们更愿意提供一个现实世界中的例子. 下面的材料涉及了标准普尔 500 指数和与它相关的期权.

**例**

标准普尔 500 是美国的 500 支主要股票的指数. 它被市场参与者密切注视并且在期货市场上进行交易. 一个人可以在芝加哥期权交易所 (CBOE) 买入和卖出以标准普尔 500 为标的资产的流动期权.

表 11-1 所示的是到期日为 2001 年 12 月的期权在 2001 年 8 月 10 日的报价. 在收集这些数据的时候, 即在 2001 年 8 月 10 日, 指数是 1 187. 流动性最好

的三个看涨期权是

$$\{1\ 275 - 看涨, 1\ 200 - 看涨, 1\ 350 - 看涨\}. \tag{20}$$

另一方面, 流动性最好的三个看跌期权是

$$\{1\ 200 - 看跌, 1\ 050 - 看跌, 900 - 看跌\}. \tag{21}$$

**表 11-1**

| 看涨期权 | 收盘价 | 买入价 | 卖出价 | 成交量 | 公开利息 |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 月 1 175 | 67.1 | 68 | 70 | 51 | 1 378 |
| 12 月 1 200 | 46.5 | 52.8 | 54.8 | 150 | 8 570 |
| 12 月 1 225 | 41 | 40.3 | 42.3 | 1 | 6 792 |
| 12 月 1 250 | 28.5 | 29.6 | 31.6 | 0 | 11 873 |
| 12 月 1 275 | 22.8 | 21.3 | 23.3 | 201 | 6 979 |
| 12 月 1 300 | 15.8 | 15 | 16.2 | 34 | 16 362 |
| 12 月 1 325 | 9.5 | 10 | 11 | 0 | 9 281 |
| 12 月 1 350 | 6.8 | 6.3 | 7.3 | 125 | 8 916 |
| 12 月 1 375 | 4.1 | 4 | 4.7 | 0 | 2 818 |
| 12 月 1 400 | 2.5 | 2.5 | 3.2 | 10 | 17 730 |
| 12 月 1 425 | 1.4 | 1.4 | 1.85 | 0 | 4 464 |
| 12 月 1 450 | 0.9 | 0.8 | 1.25 | 9 | 9 383 |
| 12 月 1 475 | 0.5 | 0.35 | 0.8 | 0 | 122 |
| 看跌期权 | 收盘价 | 买入价 | 卖出价 | 成交量 | 公开利息 |
| 12 月 800 | 1.65 | 1.2 | 1.65 | 10 | 1 214 |
| 12 月 900 | 4.3 | 3.4 | 4.1 | 24 | 11 449 |
| 12 月 950 | 5.4 | 5.3 | 6.3 | 10 | 8 349 |
| 12 月 995 | 10.1 | 8.5 | 9.5 | 0 | 11 836 |
| 12 月 1 025 | 13 | 11.1 | 12.6 | 11 | 5 614 |
| 12 月 1 050 | 13.6 | 14 | 15.5 | 106 | 19 483 |
| 12 月 1 060 | 16.5 | 15.7 | 17.2 | 1 | 1 597 |
| 12 月 1 075 | 22.5 | 18 | 19.5 | 1 | 316 |
| 12 月 1 100 | 26 | 22.7 | 24.7 | 0 | 17 947 |
| 12 月 1 150 | 39 | 35.3 | 37.3 | 2 | 16 587 |
| 12 月 1 175 | 44 | 44.1 | 46.1 | 14 | 4 897 |
| 12 月 1 200 | 53 | 53.9 | 55.9 | 897 | 26 949 |

正如预料的那样, 所有的流动期权像流动期权的一般情况那样都是价外的.[①]

我们现在说明如何使用这些信息来获得: (1) 世界状态 $\omega^i$; (2) 状态价格 $Q^i$; (3) 与 $Q^i$ 有关联的相应的合成概率. 我们将在迄今所使用的简单背景下进行讨论.

① 买入和卖出价内期权对于市场专业人士没有什么意义. 操作者通过借入必要的资金来持有期权并且立即对冲它们. 因此, 任何内在价值都能由对冲方弥补. 但是, 价内期权的凸度与价外期权的凸度将是一样的.

### 11.4.1 获得 $\omega^i$

金融工程师总是对一类特定的问题和关于那时的需求定义的世界状态作出回应. 在当前的例子中, 我们讨论标准普尔 500 期权, 这意味着焦点在权益市场上. 因此, 相应的世界状态将与美国股票市场在某个未来的日子里可能出现的不同状态有关. 同样我们需要考虑到交易员的行为会挑出相对较少数量的有效期大约为 3 个月的流动期权. 下面的例子需要参考前面例子中提供的表格.

**例**

我们用 $S_T$ 代表标准普尔 500 在到期日的价值, 然后用流动期权的执行价 $K_i$ 来定义世界的未来状态. 实际上, 前面例子中讨论的看跌期权和看涨期权的执行价将 $S_T$ 轴分成了一些长度相等的区间. 但是这些期权中只有少数是流动的, 这意味着该日的市场和特定到期日可能不需要这样细致的划分. 相应地, 我们可以使用三种流动的价外看跌期权的执行价来获得区间

$$\omega^1 = S_T < 900, \tag{22}$$

$$\omega^2 = 900 \leqslant S_T < 1\,050, \tag{23}$$

$$\omega^3 = 1\,050 \leqslant S_T < 1\,200. \tag{24}$$

注意到流动看跌期权得到了等长区间. 有趣的是, 但也是预料中的, 流动期权在它们的执行价上具有这种均匀性. 下面, 我们使用三种价外看涨期权得到三个区间定义世界的其他状态为

$$\omega^4 = 1\,200 \leqslant S_T < 1\,275, \tag{25}$$

$$\omega^5 = 1\,275 \leqslant S_T < 1\,350, \tag{26}$$

$$\omega^6 = 1\,350 \leqslant S_T. \tag{27}$$

这里, 最后一个区间是从看涨期权的最高执行价获得的. 图 11-2 展示了这些期权和隐含的区间. 由于这些区间与 $S_T$ 的未来值有关, 我们将它们视为 $S_T$ 的相关世界状态.

我们取有界闭区间的中点作为该特定状态的一个近似. 用 $\{\bar{S}^i, i = 2, \cdots, 5\}$ 来表示这些中点. 这些中点可以用来代表 $\omega^i$ 的一个有限点集. 对于第一个和最后一个半开区间, 我们为时间变量的两个极点 $\bar{S}^1$ 和 $\bar{S}^6$ 任意选择两个值. 令

$$\bar{S}^1 = 750, \tag{28}$$

$$\bar{S}^6 = 1\,400, \tag{29}$$

使得 $\bar{S}^i$ 之间的距离保持不变. 这个终端状态的任意选择并不令人满意. 实际上, 通过这样做, 我们在一定意义上任意设定了随机变量的波动率. 但是我们可以

校准我们的选择. 我们将试图调整这些极值以使得出的 $Q^i$ 都是正的, 而且可以用来正确地为其他流动资产定价. 在一定意义上, 校准就是看哪两个终端状态的值可以复制出观测值的试验. 但是在当前, 我们忽略了这个问题, 并且假设终值的选择是正确的.

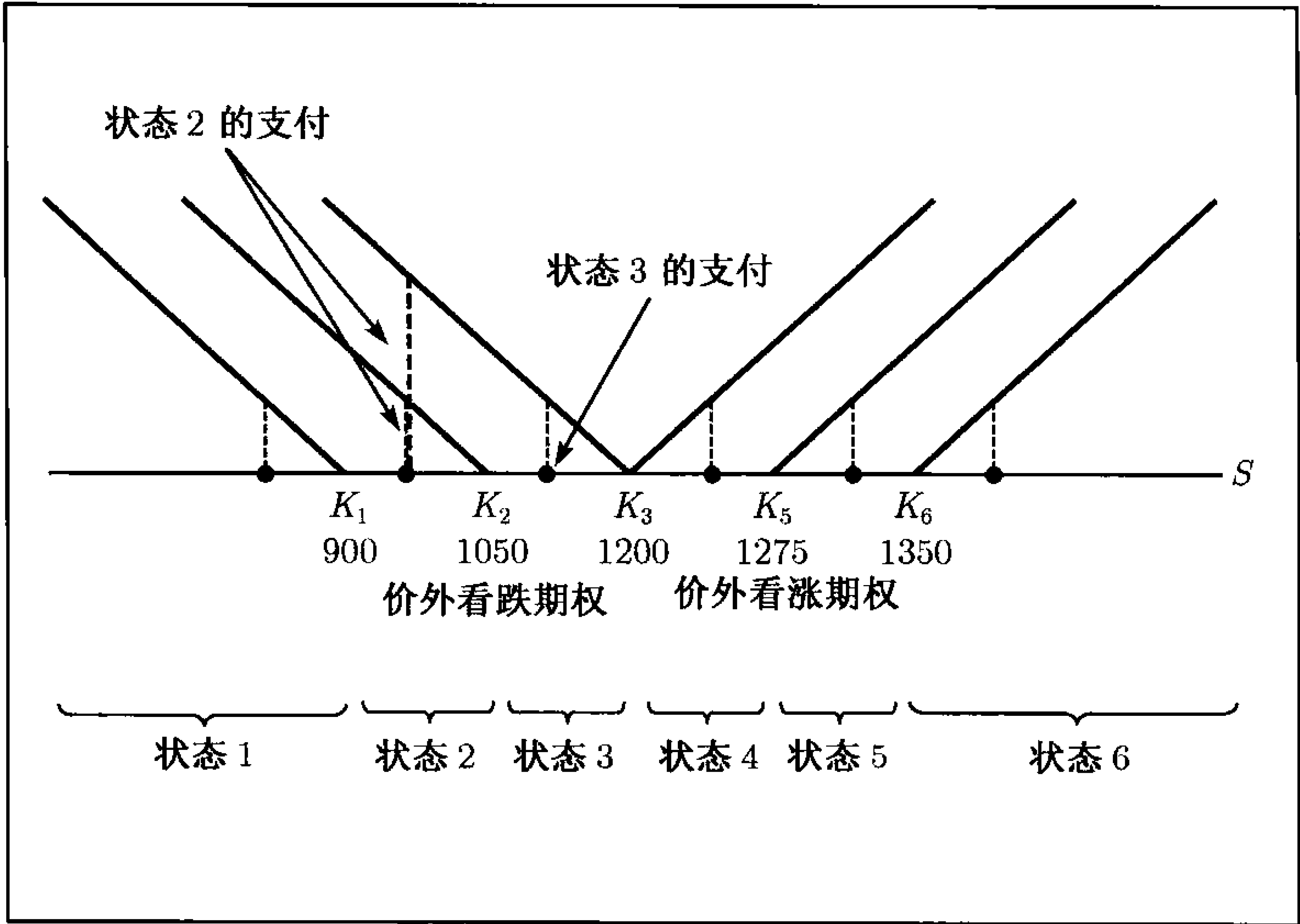



图 11-2

此例中, 为世界选择正好 6 个状态是否能准确地代表关于 $S_T$ 的未来可能性, 这一点还有待讨论. 例中处理风险的交易者必须这样认为, 因为在那个特定的日子, 交易大约 6 种流动期权对解决他们的风险是足够的. 如果采用对未来可能性的更细划分更合适的话, 那么交易中将会有更多的流动资产的执行价.

因此在金融工程中, 我们选择的 $\omega^i$ 的特定值是基于流动工具的价值的. 在我们的情形下, 世界的可能状态是根据流动看涨期权和看跌期权进行选择的.

### 11.4.2 基本合约和期权

基本保险合同 $C_i$ 在世界金融市场上不是直接交易的. 然而, $C_i$ 与众所周知的期权有些相近, 并且它们间接交易. 本节说明了如何从期权中获得基本保险合同, 反之亦然. 普通期权实际上是基本保险合同的类似物. 理解这一点的最好方式是考虑一个数值例子, 然后直接将其进行一般化.

**例**

从前面的例子中选择第一个和最后一个期权开始. 注意到 900 的看跌期权等价于 $K_1 - \tilde{S}^1$ 个单位的 $C_1$, 因为如果状态 $\omega_1$ 发生, 它就支付大约这么多美元, 而

在其他状态下不支付. 类似地, 1 350 的看涨期权等价于 $\bar{S}^6 - K_6$ 个单位的 $C_6$, 因为如果状态 $\omega_6$ 发生, 它就支付大约这么多美元, 否则的话不支付.

其他的看涨期权和看跌期权在多种状态下有支付, 但它们也以直接的方式与基本合同相关联. 例如, 1 050 的看跌期权等价于两个基本保险合约即 $K_2 - \bar{S}^1$ 个单位的 $C_1$ 和 $K_2 - \bar{S}^2$ 个单位 $C_2$ 的组合, 因为它在状态 1 和状态 2 下进行这些支付而在其他状态下不支付. 实际上, 继续这种推理, 我们可以得出下列在基本合同 $C_1, \cdots, C_6$ 的支付和期权价格之间的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 900-\text{看跌} \\ 1\,050-\text{看跌} \\ 1\,200-\text{看跌} \\ 1\,200-\text{看涨} \\ 1\,275-\text{看涨} \\ 1\,350-\text{看涨} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2^1 & z_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_3^1 & z_3^2 & z_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4^4 & z_4^5 & z_4^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5^5 & z_5^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

这个矩阵方程成立, 因为对于所有的$i$①, 有

$$Q^i = C_i, \tag{31}$$

因此, 如果给定除执行价外其他每个方面都类似的看跌期权和看涨期权的无套利价格, 通过对右边的 $6 \times 6$ 阶矩阵求逆, 我们可以很容易地得出基本保险合同 $C_i$ 的值. 有趣的是, 例子中的矩阵方程包含两个可以独立并且递归求解的三角子系统.

流动期权的存在使资产定价基本定理的直接应用变为可能. 已知足够多数量的流动期权合同, 我们可以获得状态价格 $Q^i$. 如果他们存在并且都是正的, 我们可以用它们来对那些依赖于同一种风险的其他非流动资产定价.② 很明显, 当交易员涉及的是利率或汇率风险, 又或者当他们对商品合同的定价感兴趣时, 他们可以在某些特定部分使用流动期权并且作出世界状态的不同定义.

### 11.4.3 基本合同与复制

我们现在来说明属于同一系列的基本保险合同和期权如何被用来复制具有任意支付的工具. 考虑一个任意的金融资产 $S_t$, 在 $T$ 时, 世界状态 $\omega^i$, $i = 1, \cdots, n$, 的价值为 $z_T^i$. 已知 $n$ 种基本保险合同 $C_i$, 我们可以立即为这种资产形成一个复制组合. 不失一般性, 假设 $S_t$ 资产在 $T$ 时的支付用 $0 < z_T^i$ 来表示, 我们可以考虑购买下面的组合

$$\{z_T^1 \text{ 单位的 } C_1,\ z_T^2 \text{ 单位的 } C_2, \cdots, z_T^n \text{ 单位的 } C_n\}. \tag{32}$$

① 如果需要从交易的看跌和看涨期权得出 $C_i$ 的值, 应该从第一个看跌期权开始, 然后移到第二个看跌期权, 然后是第三个. 同样的策略可以重复使用在最后一个看涨期权, 然后依此类推.

② 这里, 风险是指标准普尔 500 指数.

在 $T$ 时这个组合的价值应该与 $S_t$ 的价值完全一样, 因为无论哪种状态发生, 保险合同的组合将与原始资产在 $T$ 时的支付一样. 这为 $S_t$ 提供了一个直接的合成物. 相应地, 如果没有套利机会, 组合的价值与 $S_t$ 在 $t$ 时的价值将是相等的.[①] 我们考虑下面的例子.

**例**

给出 4 种独立资产 $S_{kt}, k=1,\cdots,4$, 在状态 $\{\omega^i, i=1,\cdots,4\}$ 下有不同的支付 $z_k^i$. 我们可以用基本保险合同的形式来说明每一种资产. 换句话说, 我们可以通过购买下面的组合来为每一个 $S_{kt}$ 找到一个合成物

$$\{z_k^1 \text{ 单位的 } C_1,\ z_k^2 \text{ 单位的 } C_2,\ z_k^3 \text{ 单位的 } C_3,\ z_k^4 \text{ 单位的 } C_4\}. \tag{33}$$

将它们表成矩阵形式, 我们将看到这些资产在 $t_0$ 时的无套利价值 $S_{kt_0}$ 必须满足矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_{1t_0} \\ S_{2t_0} \\ S_{3t_0} \\ S_{4t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r_{t_0} & 1+r_{t_0} & 1+r_{t_0} & 1+r_{t_0} \\ z_1^1 & z_1^2 & z_1^3 & z_1^4 \\ z_2^1 & z_2^2 & z_2^3 & z_2^4 \\ z_3^1 & z_3^2 & z_3^3 & z_3^4 \\ z_4^1 & z_4^2 & z_4^3 & z_4^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

这里右边的矩阵包括资产 $S_{kt}$ 在 $T$ 时, 不同状态 $\omega^i$ 下的所有可能值.[②]

给定积极交易的基本合同 $C_i$ 的价格, 我们容易算出在 $t$ 时构造这个组合的成本

$$\text{成本} = C_1 z_T^1 + C_2 z_T^2 + \cdots + C_n z_T^n. \tag{35}$$

这可以看作是 $S_t$ 资产成本的基本成分. 在其中加入一个适当的利润将得出 $S_t$ 的公平市场价格.

**例**

假设 $S_t$ 资产在世界状态 $i=1,\cdots,4$ 时有下列支付:

$$\{z_T^1 = 10, z_T^2 = 1, z_T^2 = 14, z_T^2 = 16\}. \tag{36}$$

那么购买 10 个单位的第一保险合同 $C_1$ 将确保在第一种状态下的支付为 10, 依此类推.

假设我们观测到基本保险合同的下列价格:

$$C_1 = 0.3, C_2 = 0.2, C_3 = 0.4, C_4 = 0.07 \tag{37}$$

① 通常假设 $S_t$ 没有其他的中间支付.

② 为了记号上的简便, 我们在矩阵方程中去掉了时间下标. 同样要记住时间指标代表年并且 $C_i = Q^i$.

那么购买保险合同的总成本将是

$$\text{成本} = (0.3)10 + (0.2)(1) + (0.4)14 + (0.07)16 \tag{38}$$

$$= 9.92. \tag{39}$$

只要加入一个适当的利润, 这就应该等于 $S_t$ 的现价.

很显然, 如果这样的基本保险合同在金融市场上是积极交易的, 金融工程师的工作将大大简化. 我们可以为任何资产直接构造合成物, 然后像例子中所示的那样运用复制组合的成本来给它们定价. 然而, 在 $C_i$ 和只有执行价不同的一系列期权之间存在紧密联系. 我们看到了如何从流动期权的价格中获得 $C_i$. 相应地, 如果一列有广泛执行价的期权在金融市场上交易, 那么交易员能够为具有任意支付的资产创造出静态复制组合.①

## 11.5 基本定理的推论

资产定价基本定理有许多推论, 它们在金融工程和衍生品定价中起着关键作用. 首先, 运用这个定理, 我们可以获得在资产定价中使用的概率分布, 这些概率分布将是客观的并且是可操作的. 其次, 定理推出了资产价格的所谓的鞅表示. 这样的表示在模拟资产价格动态机理时很有用. 最后, 我们将看到鞅表示可以用于客观地调整资产的期望收益. 这个性质免除了在资产定价动态机理中模拟和估计漂移因子的需要. 我们现在仔细地讨论这些论题.

### 11.5.1 结果 1: 合成概率

在 11.4 节中介绍的 $Q^i$ 可以进行修正, 从而得到金融工程师便于使用的概率分布. 这些分布并不提供关于世界状态 $\omega^i$ 实际发生的可能性, 因此不可以直接应用在计量经济学的预测上. 但是, 它们确实可以产生正确的无套利价格. 本节说明这如何产生. 由于有很多这样的分布, 市场操作者可以选择最适合他当前需求的分布. 如何进行这样的选择将在 11.6 节中讨论.

1. 风险中性概率

运用状态价格 $Q^i$, 我们首先得到所谓的风险中性概率分布. 考虑矩阵方程 (9) 中的第一行. 假设它代表储蓄账户

$$(1 + r_{t_0})Q^1 + \cdots + (1 + r_{t_0})Q^n = 1. \tag{40}$$

运用下式, 重新定义:

$$\tilde{p}_i = (1 + r_{t_0})Q^i. \tag{41}$$

① 同样, 具有任意支付的资产应该与期权一样依赖于同样的标的风险.

我们有

$$\tilde{p}_i + \cdots + \tilde{p}_n = 1, \tag{42}$$

因为每个 $Q^i$ 是正的, 故

$$0 < \tilde{p}_i, \tag{43}$$

这说明数值 $\tilde{p}_i$ 具有离散概率分布的性质: 它们是正的, 而且加起来等于 1. 由于它们由市场确定, 我们称之为 "合成" 概率. 实际上它们是通过 $n$ 个资产现价的线性组合获得. 这个特别的合成概率被称作*风险中性概率分布*.

更准确地说, 风险中性概率 $\{\tilde{p}_i\}$ 是在 $T$ 时发生的状态在 $t_0$ 时的概率. 因此, 如果我们想要更准确地表示, 它们应该带另外两个下标: $t_0$ 和 $T$. 但是我们将它们略去且假设读者已经知道了这一点.

2. **其他概率**

也可以产生一些其他的合成概率, 而且后面将证明这些合成概率比风险中性概率更加有用. 已知正的 $Q^i$, 我们可以通过调整任意正标准化因子, 使得它们可以被看作概率, 且有许多方式来这样做. 实际上, *只要资产的现价 $S_{kt_0}$ 非零而且 $z_i^j$ 是正的*, 就可以选择 (9) 式里矩阵方程的任何第 $k$ 行, 有

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_k^i}{S_{kt_0}} Q^i, \tag{44}$$

然后定义

$$\frac{z_k^i}{S_{kt_0}} Q^i = \tilde{p}_i^k. \tag{45}$$

$\tilde{p}_i^k (i = 1, \cdots, n)$ 称为用资产 $S_{kt_0}$ 标准化后得到的概率. $\tilde{p}_i^k$ 将为正且加起来等于 1. 因此, 它们将具有概率分布的特性, 但同样也不能用来预测, 因为它们不是特定世界状态 $\omega^i$ 发生的实际概率. 很显然, 对于每一个非零的 $S_{kt_0}$, 我们可以得到一个新的概率 $\tilde{p}_i^k$. 只要资产的时间 $T$ 价值在所有的状态下都是正的, 这些概率就会随状态 $\omega^i$ 不同而不同.①

如何标准化一列 $\{Q^i\}$, 将它们转化为某个合成概率是最重要的. 特别情形是

$$S_{kt_0} = B(t_0, T), \tag{46}$$

其中 $B(t_0, T)$ 为 $T$ 时到期的无风险纯折扣债券的现价, 这非常有趣. 它产生了所谓的 *$T$远期测度*. 因为折扣债券在 $T$ 时到期, 资产的时间 $T$ 价值由下式给出:

$$z_k^i = 1, \tag{47}$$

① 为了做到这一点, 必须强调我们需要正的价格和正的 $T$ 时的可能价值.

对所有的 $i$ 都成立.

因此, 我们可以将状态价格 $Q^i$ 简单地除以无违约折扣债券在 $t_0$ 时的现价, 从而得到 $T$ 远期测度

$$\tilde{p}_i^T = Q^i \frac{1}{B(t_0, T)}. \tag{48}$$

我们将在 13 章中看到 $T$ 远期测度是解决 $T$ 时支付的自然度量. 下面我们考虑一个例子.

**例**

假设短期无风险利率为 5%, 而且世界有 4 种状态. 观测到下面 4 种资产在 $t_0$ 时无套利买入价:

$$S_{1t_0} = 2.452\ 38,\ S_{2t_0} = 1.722\ 38,\ S_{3t_0} = 6.694\ 29,\ S_{4t_0} = 3.065. \tag{49}$$

假设 $T = t_0 + 1$, 以年来度量, 每种资产的 4 种可能价值由下面的矩阵给出:

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 10 & 1 \\ 8 & 2 & 10 & 2 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

我们可以形成矩阵方程, 然后求出相应的 $Q^i$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_{1t_0} \\ S_{2t_0} \\ S_{3t_0} \\ S_{4t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0.05 & 1+0.05 & 1+0.05 & 1+0.05 \\ 10 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 10 & 6 \\ 8 & 2 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{bmatrix} \tag{51}$$

运用这个方程组的前 4 行, 我们解出 $Q^i$:

$$Q^1 = 0.1, \quad Q^2 = 0.3, \quad Q^3 = 0.07, \quad Q^4 = 0.482. \tag{52}$$

接下来, 运用下式得到风险中性概率

$$\tilde{p}_i = (1 + 0.05)Q^i, \tag{53}$$

结果是

$$\tilde{p}_1 = 0.105, \quad \tilde{p}_2 = 0.315, \quad \tilde{p}_3 = 0.073\ 5, \quad \tilde{p}_4 = 0.506\ 5. \tag{54}$$

最后注意到我们使用了这里所示的方程组的前 4 行来确定 $Q^i$ 的值. 但是价格 $S_{4t_0}$ 也是无套利的, 同时必须满足下式

$$\sum_{i=1}^{4} Q^i S^i_{4T} = 3.065. \tag{55}$$

有趣的是, 对于短期工具, "正常" 的短期利率大约为 3%～5%, 储蓄账户的标准化几乎没什么差别. 如果 $T - t_0$ 很小, 则 $Q^i$ 与 $\tilde{p}_i$ 将只在边缘处不同①.

3. 注记

衍生品可以被用来标准化吗? 例如, 不使用储蓄账户或债券进行标准化, 我们能用互换进行标准化吗? 答案是否定的. 确实存在称为互换测度的概率, 但是应用在这些情形下的标准化不是互换而是年金. 大部分衍生品是不可用于标准化的, 因为用 $S_{kt}$ 来标准化本质上隐含着状态价格 $Q^i$ 乘以因子

$$\frac{z^i_k}{S_{kt}} \frac{S_{kt}}{z^i_k} = 1, \tag{56}$$

然后根据下式分组

$$\frac{z^i_k}{S_{kt}} \frac{S_{kt}}{z^i_k} Q^i = \frac{S_{kt}}{z^i_k} \tilde{p}^k_i. \tag{57}$$

但是在这个操作中, $z^i_k (i = 1, \cdots, n)$ 和 $S_{kt}$ 应该是非零的, 否则比值没有定义. 这一点将在下面看出.

### 11.5.2 互换测度

在将 $Q^i$ 转化为概率 $\tilde{p}^k$ 时, 迄今的标准化只使用了一种资产 $S_{kt}$, 这不是必须的. 我们可以运用许多资产的线性组合来标准化, 有时这非常有用. 这就是所谓的互换或年金测度的情形. 互换测度将在第 18 章中讨论.

### 11.5.3 结果 2: 鞅性

资产定价基本定理也为定价和风险管理提供了方便的模型. 所有被适当标准化的资产价格在适当选定的合成概率 $\tilde{p}^k$ 下具有鞅性. 令 $X_t$ 是具有下列性质的一个随机过程:

$$X_t = E^{\tilde{p}^k}_t [X_T] \quad t < T \tag{58}$$

这本质上是说: 对于所有的 $t$, $X_t$ 没有任何可预测的趋势. $X_t$ 被称作鞅. 为了说明如何将其应用到资产定价理论中, 首先选择风险中性概率 $\tilde{p}$ 作为操作概率分布.

① 例如, 短期利率为 5%、期限为一个月的折扣债券大约卖 $B(t_0, t) = \frac{1}{1+0.05\frac{1}{12}} = 0.9958$ 除以这个比例因子后, $Q^i$ 将不会改变太多.

1. 在 $\tilde{P}$ 下的鞅

考虑在矩阵方程 (9) 的任意第 $k$ 行

$$S_{kt_0} = (z_k^1)Q^1 + (z_k^2)Q^2 + \cdots + (z_k^n)Q^n. \tag{59}$$

运用下式将 $Q^i$ 用风险中性概率 $\tilde{p}_i$ 代替

$$Q^i = \frac{1}{1 + r_{t_0}}\tilde{p}_i, \tag{60}$$

这给出了

$$S_{kt_0} = \frac{1}{1 + r_{t_0}}[z_k^1\tilde{p}_1 + \cdots + z_k^n\tilde{p}_n], \tag{61}$$

这里, 右侧是未来价值 $S_{kT}$ 以 $\tilde{p}_i$ 为权重的一个平均值. 因此, 代回时间下标, $S_{kt_0}$ 的无套利现价满足

$$S_{kt_0} = \frac{1}{(1 + r_{t_0})}E_{t_0}^{\tilde{P}}[S_{kT}], \quad t_0 < T. \tag{62}$$

一般情况下, 令

$$X_t = \frac{\text{Time-}t\text{ value of }S_{kt}}{\text{Time-}t\text{ value of the savings account}}. \tag{63}$$

我们看到运用储蓄存款标准化的资产价值具有鞅性:

$$X_t = E_t^{\tilde{P}}[X_T], \quad t < T. \tag{64}$$

因此, 鞅里的所有工具在金融工程的定价和风险管理中都找到了用处.

2. 其他概率下的鞅

用鞅进行操作的便利并不局限于风险中性测度 $\tilde{P}$. 用任何非零的价格 $S_{jt}$ 进行的标准化都可以推出另外的鞅. 考虑 (9) 中矩阵方程的第 $k$ 行:

$$S_{kt_0} = (z_k^1)Q^1 + \cdots + (z_k^n)Q^n. \tag{65}$$

这次, 运用 $S_{jt_0}, j \neq k$ 的标准化来代替 $Q^i$:

$$\tilde{p}_i^j = Q^i\frac{z_j^i}{S_{jt_0}}. \tag{66}$$

假设分母项是正的, 我们得到

$$S_{kt_0} = S_{jt_0}\left[z_k^1\frac{1}{z_j^1}\tilde{p}_1^j + \cdots + z_k^n\frac{1}{z_j^n}\tilde{p}_n^j\right]. \tag{67}$$

这意味着比值

$$X_t = \frac{S_{kt}}{S_{jt}} \tag{68}$$

是测度 $\tilde{P}^j$ 下的鞅

$$X_t = E_t^{\tilde{P}^j}[X_T], \quad t < T. \tag{69}$$

很明显, 伴随特定鞅的概率是所选择的标准化因子的函数, 而且隐含的鞅性在定价中起重要作用. 通过选择鞅, 金融工程师也是在选择他愿意操作的概率. 本章余下的部分和第 12 章将看到如何使用鞅性的例子.

### 11.5.4 结果 3: 期望收益

基本定理的下一个推论在模拟资产价格的无套利*动态机理*时很有用. 每一个合成概率给出了所考虑的资产价格的一个特定*期望收益*. 这些期望收益与市场参与者的真实 (主观) 期望不同, 但是, 由于被所有的市场参与者一致认同而且与无套利价格相关, 它们将比真实期望有用得多.

我们以风险中性概率 $\tilde{P}$ 来进行讨论, 但是结论对所有其他的 $\tilde{P}^k$ 同样有效. 再一次考虑用 $S_t$ 表示其价格的某种资产的鞅性, 但是这次重新引入天数调整因子 $\delta$, 抛弃 $t_i$ 代表年的假设. 对于某个 $0 < \delta$, 我们可以有

$$S_t = \frac{1}{(1 + r_t\delta)} E_t^{\tilde{P}}[S_{t+\delta}], \tag{70}$$

重新整理后得到

$$(1 + r_t\delta) = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{S_{t+\delta}}{S_t}\right]. \tag{71}$$

根据这个表达式, 在概率 $\tilde{P}$ 下, 所有流动资产的净年度收益的期望都等于 $r_t$, 即 $t$ 时观测到的无风险利率.

有关资产期望收益的类似结果在其他概率 $\tilde{P}^k$ 下也同样可以得到. 收益期望在不同的概率下将不同. 市场参与者可以通过选择操作的概率来将资产的期望收益定在一个*想要*的数值上. ①

在第 13 章, 我们将看到这种思想在时间 $T$ 远期测度下的更复杂的应用. 在那里, 远期利率变化的期望通过概率的适当选择被设定为 0.

#### 鞅和风险溢价

让我们来看看鞅的使用如何使无法分散化的市场风险带来的风险溢价内在化. 令 $X_t (t \in [t_0, T])$ 是一个风险资产, 而且 $\Delta > 0$ 是一个小的时间区间. *市场参与者*在 $t$ 时预测 $X_t$ 的年度总收益由下式定义

$$1 + \hat{R}_t\Delta = E_t^P\left[\frac{X_{t+\Delta}}{X_t}\right], \tag{72}$$

① 因此不必估计伴随的风险溢价.

这里 $P$ 代表市场参与者在建立他们的期望时所使用的**真实概率**. 因为这是一个实际的市场期望, 总收益将包含一个风险溢价

$$\hat{R}_t = r_t + \mu_t, \tag{73}$$

这里 $r_t$ 是无风险利率, 而 $\mu_t$ 是由风险资产控制的**风险溢价**. [1] 将这些项放在一起得到

$$(1 + r_t\Delta + \mu_t\Delta) = E_t^P\left[\frac{X_{t+\Delta}}{X_t}\right], \tag{74}$$

或者是

$$X_t = \frac{1}{(1 + r_t\Delta + \mu_t\Delta)}E_t^P[X_{t+\Delta}]. \tag{75}$$

这个等式表明了**只有**使用概率 $P$, 资产价格 $X_{t+\Delta}$ 在用因子 $(1 + r_t\Delta + \mu_t\Delta)$贴现后才是一个鞅. 注意, 在这个公式中有两个未知量: (1) 风险溢价 $\mu_t$; (2) 真实世界概率 $P$. [2] 未来现金流相应地需要用主观贴现因子进行贴现, 而且需要估计真实世界概率. 在这些条件下的定价问题更加复杂. 金融工程师需要确定风险溢价的值, 另外还要对未来收入或现金流进行 "投影".

现在考虑另一个简单的方法. 令前面方程中的 (正的) 风险溢价等于 0, 则得到了下面的不等式

$$X_t < \frac{1}{(1 + r_t\Delta)}E_t^P[X_{t+\Delta}]. \tag{76}$$

但是这与用无风险储蓄账户标准化是一样的. 这意味着通过将 $P$ 转变为 $\tilde{P}$, 我们可以重新建立等式

$$X_t = \frac{1}{(1 + r_t\Delta)}E_t^{\tilde{P}}[X_{t+\Delta}]. \tag{77}$$

因此, 标准化和合成概率通过将两个未知量转化为一个已知并且客观的概率 $\tilde{P}$ 后, 使得风险溢价内在化了. 等式 (77) 可以用来进行定价和风险管理.

## 11.6 无套利动态机理

从资产定价基本定理推出的最后一个结果是迄今讨论的所有推论的组合. 我们之前获得的合成概率和鞅性可以用来推导资产定价的若干无套利动态机理. 这些**无套利动态机理**, 在由于非线性差别或者是缺少流动的组成资产的原因而不能创造精确合成物的情形下, 起着重要的作用. 实际上, 大部分定价模型将沿着先获得无套利动态机理, 然后从模拟路径或者获得隐含二叉或者三叉树的路线进行. 偏微分方程 (PDE) 方法也使用无套利动态机理.

① 在理性期望下, 主观概率 $P$ 与 $X_t$ 的真实分布是一样的.

② 虽然后者可以运用计量经济学方法估计出来.

### 11.6.1 无套利随机微分方程

本节将简要讨论随机微分方程作为金融工程工具的用途, 并说明基本定理如何帮助刻画在实际定价和对冲中使用的显式随机微分方程.[①] 考虑资产价格 $S_t$. 假设我们将时间段 $[t,T]$ 划分为等长度 $\Delta$ 的小区间. 对于每个时间 $t+i\Delta, i=1,\cdots,n$, 我们都观测到不同的 $S_{t+i\Delta}$. $S_{t+\Delta}-S_t$ 是资产价格在时间 $t$ 的改变. 从所有可用的合成概率中选择一个操作概率, 用 $P^*$ 表示.

然后, 我们总可以计算出在这个概率下改变量的期望值. 在 $P^*=\tilde{P}$ 的情形下, 我们可以通过下式获得净收益的风险中性期望:

$$E_t^{\tilde{P}}[S_{t+\Delta}-S_t]=r_tS_t\Delta. \tag{78}$$

注意到以下的叙述总是正确的:

$$S_t\text{的实际改变} = \text{“预料到的”改变} + \text{“未预料到的”改变}. \tag{79}$$

现在我们利用概率转换方法得出鞅性. 例如, 对于风险中性概率, 我们有

$$[S_{t+\Delta}-S_t]=E_t^{\tilde{P}}[S_{t+\Delta}-S_t]+\in_t, \tag{80}$$

其中 $\varepsilon_t$ 代表在 $\tilde{P}$ 下具有零期望的随机变量. 用 (78) 式代换得到

$$[S_{t+\Delta}-S_t]=r_tS_t\Delta+\in_t. \tag{81}$$

现在误差项 $\varepsilon_t$ 可以写为下面的等价形式

$$\in_t=\sigma(S_t)S_t\Delta W_t, \tag{82}$$

这里 $\Delta W_t$ 是 Wiener 过程的增量, 它的方差等于 $\Delta$.

因此, 在测度 $\tilde{P}$ 下的无套利动态机理可以写为

$$[S_{t+\Delta}-S_t]=r_tS_t\Delta+\sigma(S_t)S_t\Delta W_t. \tag{83}$$

令 $\Delta\to 0$, 这个方程将变成代表合成概率 $\tilde{P}$ 下, 无限小的时间段 $\mathrm{d}t$ 内的无套利动态机理的随机微分方程 (SDE). 形式上, 随机微分方程可以写为

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+\sigma(S_t)S_t\mathrm{d}W_t. \tag{84}$$

$\mathrm{d}S_t$ 和 $\mathrm{d}W_t$ 代表相应变量在无限小的时间区间内的改变量. 已知 (百分数) 波动率参数 $\sigma(S_t)$ 的值, 这些方程可以被用来产生 $S_t$ 的无套利轨道. 我们将在第 12 章中处理这些问题. 注意使用风险中性概率的一个主要优点是漂移项, 也就是说右侧的第一项是已知的. 从这点出发, 我们考虑获得无套利路径的第二种方法.

① 第 8 章的附录提供了随机微分方程的定义和一些用途.

### 11.6.2 树模型

本节将看到鞅性的另一个重要应用. 我们发展了第 7 章引入的二叉 (三叉) 树概念, 并获得处理无套利动态机理的另一种方法. 假设 $S_t$ 的动态机理可以由下面的 (几何) 随机微分方程描述:

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t, \tag{85}$$

在这里假设波动率由下式给出

$$\sigma(S_t) = \sigma. \tag{86}$$

$S_t$ 的百分比波动率是常数. 还要注意 $r_t$ 也假定为常数. 可以证明由这个随机微分方程能够解出 $S_t$ 从而得到下面的关系 (例如, 可以参考 Oksendal(2003))

$$S_{t+\Delta} = S_t\mathrm{e}^{r\Delta-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta+\sigma(W_{t+\Delta}-W_t)}. \tag{87}$$

我们的目的是构造对这个 $S_t$ 的无套利动态机理的一个近似. 我们将通过考虑对 $S_t$ 在 $t$ 和某个 "到期日"$T$ 之间可能遵循的路径的近似来完成这个目标. 这个近似必须使 $S_t$ 在一个适当的概率下满足鞅性. 最后, 选择的近似应该使 $\Delta \to 0$ 时, 离散近似的期望和方差收敛于连续时间过程在相关概率下的期望和方差. 每一种方法都有自己的优点和缺点, 我们讨论两种建立树的不同方式. 当 $\Delta \to 0$ 时, 动态机理将变为连续时间的情形.

### 11.6.3 情形 1

由 Cox-Ross-Rubinstein (CRR) 引入的方法选择了下列近似. 首先, 时间段 $[t_0, T]$ 被分为 $N$ 个等长的子区间. 然后假设在一条路径上的每个点都有可能的状态. 在 CRR 情形里 $n = 2$, 因此路径变成二叉的. 图 11-3 表示了另一种三叉树的情形.

- 在可能路径的每个节点 $i$ 上, 只有用数字 $\{\mu_i, d_i\}$ 表示的两种可能状态, 相应的 (边际) 概率为 $p$ 和 $(1-p)$. 动态机理按下式选择:

$$S_i^u = \mu_i S_{i-\Delta}, \tag{88}$$

$$S_i^d = d_i S_{i-\Delta}, \tag{89}$$

  这里 $S_i$ 是 $S_{t+i\Delta}$ 的简化记号.

- 假设 $\{\mu_i, d_i\}$ 为常数 $\mu$ 和 $d$.

我们现在说明如何确定鞅概率. 一种方法是找到概率使得在概率 $p$, $(1-p)$ 下有

$$S_i = \mathrm{e}^{-r\Delta}E_i^{\tilde{p}}[S_{i+\Delta}], \tag{90}$$

或者

$$S_i = \mathrm{e}^{-r\Delta}[pS^u_{i+\Delta} + (1-p)S^d_{i+\Delta}]. \tag{91}$$

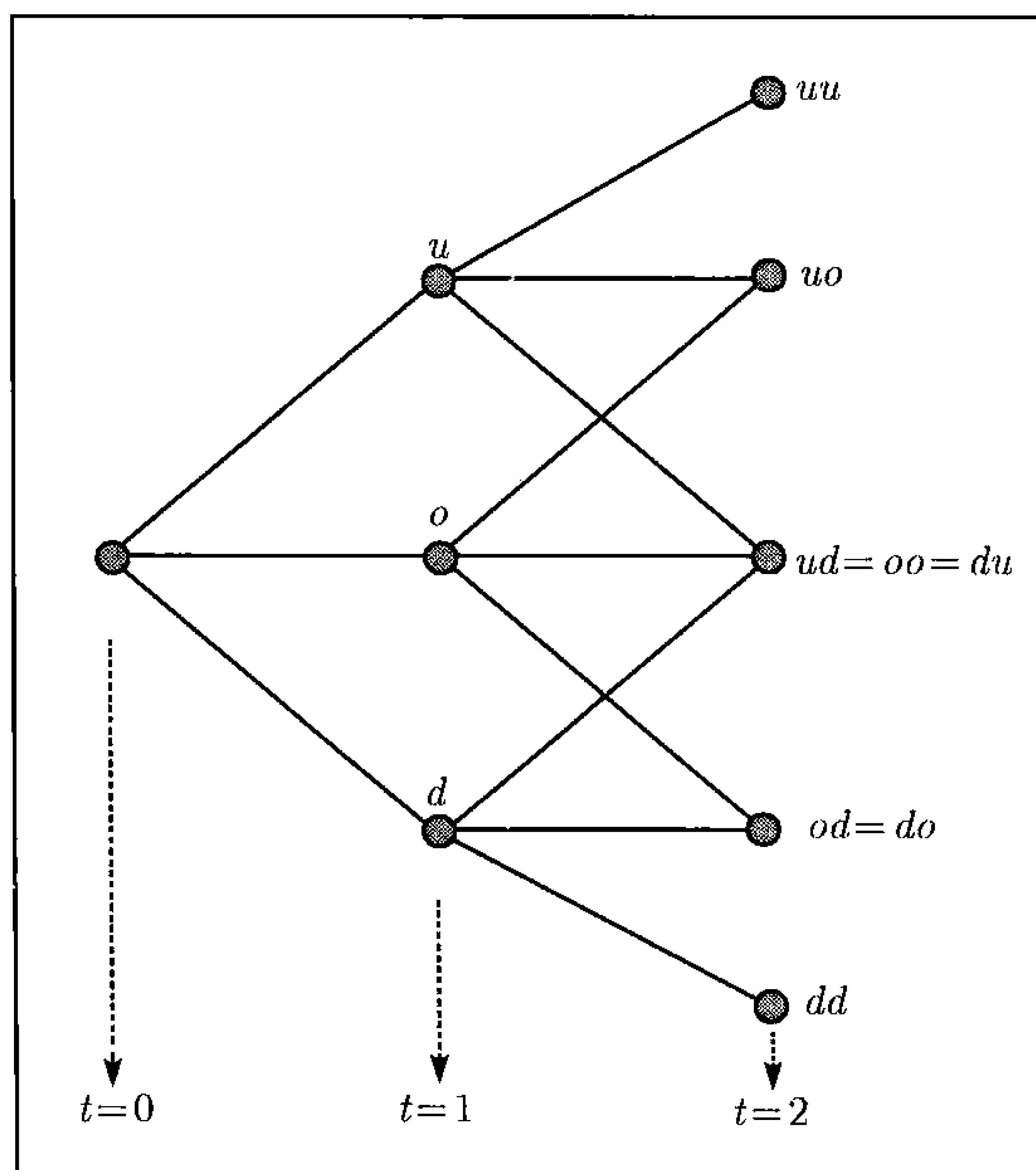



图 11-3

在方程 (88) 和 (89) 中使用 $S^u_{i+\Delta}$ 和 $S^d_{i+\Delta}$ 的定义, 我们可以写出

$$S_i = \mathrm{e}^{-r\Delta}[pS_i u + (1-p)S_i d]. \tag{92}$$

$S_i$ 在这个概率下的期望和方差的极限应该与假设的连续时间过程的动态机理的期望和方差一样. [①] 换句话说, $p$ 应该也满足

$$E_i^{\tilde{P}}[S_{i+\Delta}] = [pu + (1-p)d]S_i, \tag{93}$$

以及

$$E_i^{\tilde{P}}[S^2_{i+\Delta} - E_i^{\tilde{P}}[S_{i+\Delta}]^2] = [pu^2 + (1-p)d^2]S_i^2 - E_i^{\tilde{P}}[S_{i+\Delta}]^2. \tag{94}$$

使用

$$E_i^{\tilde{P}}[S_{i+\Delta}] = S_i\mathrm{e}^{r\Delta}, \tag{95}$$

$$E_i^{\tilde{P}}[S^2_{i+\Delta} - E_i^{\tilde{P}}[S_{i+\Delta}]^2] = S_i^2\mathrm{e}^{2r\Delta}(\mathrm{e}^{\sigma^2\Delta} - 1), \tag{96}$$

① 这里, 概率 $\tilde{P}$ 由参数 $P$ 代表.

从而得到方程

$$e^{r\Delta} = pu + (1-p)d, \tag{97}$$

$$e^{2r\Delta+\sigma^2\Delta} = pu^2 + (1-p)d^2. \tag{98}$$

满足这两个方程的 $p, \mu, d$ 使得：(1) 对于所有的 $\Delta$ 满足鞅等式; (2) 当 $\Delta$ 趋近于 0 时, 可以与连续时间过程 $S_t$ 的期望和方差任意接近; (3) 使得 $S_i$ 的渐进分布为正态. 但是, 有一个问题, 注意到这里我们有两个方程和三个未知数 $\mu$, $d$, $p$, 还需要一个方程. 选择

$$u = \frac{1}{d}. \tag{99}$$

这使得树结构重新结合并且完成了方程系统. 在这些条件下, 下面的值是方程的解

$$p = \frac{e^{r\Delta} - d}{u - d}, \tag{100}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \tag{101}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}, \tag{102}$$

这里的近似是指忽略了所有包含 $\Delta$ 的高阶项. ①

### 11.6.4 情形 2

前面选择的 $p, \mu, d$ 满足

$$S_i = e^{-r\Delta}[pS_i e^{\sigma\sqrt{\Delta}} + (1-p)S_i e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}], \tag{103}$$

$p, \mu, d$ 也可以按其他方式来选择. 特别地, 注意到在一个区间 $\Delta$ 内, $S_t$ 移动到了

$$S_{t+\Delta} = S_t e^{r\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta + \sigma[W_{t+\Delta} - w_t]}. \tag{104}$$

运用近似

$$W_{t+\Delta} - W_t = \begin{cases} +\sqrt{\Delta}, & \text{概率}0.5, \\ -\sqrt{\Delta}, & \text{概率}0.5, \end{cases} \tag{105}$$

我们得到了 $p, \mu, d$ 的新值

$$u = e^{r\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta + \sigma\sqrt{(\Delta)}}, \tag{106}$$

$$d = e^{r\Delta - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta - \sigma\sqrt{(\Delta)}}, \tag{107}$$

$$p = 0.5. \tag{108}$$

这些值在同样近似意义上也满足鞅等式, 以及 $S_i$ 的期望和方差的等式.

① 实际上, 这是一个在整个积分里都使用的标准假设. 我们注意到当 $\Delta$ 趋近于 0 时, $p$ 的值将收敛于 $\frac{1}{2}$.

## 11.7 定价方法的选择

一般地, 定价方法的选择依赖于下列因素.

- 一般来说, 定价方法的精度不一样. 一些方法比另一些方法在数值上更稳定. 一些方法产生的近似比另一些要粗糙. 精度是一个重要因素.
- 定价方法的速度也随着方法而改变. 一般地, 其他条件都一样时, 我们偏好产生结果更快的方法.
- 某些方法执行起来比较简单. 理解定价方法的难易程度也是操作者选择方法的重要因素.
- 伴随模型而来的简约程度很重要. 一般说, 我们希望模型依赖于尽可能少的参数. 这样, 模型就只需确定少量的参数, 这意味着出错的地方也比较少. 同样, 交易员或者经纪人一般能够通过调整基于交易经验的报价来补充模型的简单性.

最后, 方法的选择依赖于环境, 这也是一个经验问题. 书本知识只能为金融工程师提供某些基本方法.

## 11.8 结　论

本章得到了一些重要的结果. 首先, 我们说明了状态价格概念在执行价不同的流动期权这种实际环境中的实用性. 这里, 我们说明了如何获得风险中性测度和远期测度以及相应的无套利动态机理.

最后, 只要执行价不同的流动期权存在, 我们就说明了如何利用期权的静态组合来复制资产. 由于下列原因这是真实的.

(1) 已知期权价格, 我们可以得到基本保险合同的价格.

(2) 我们知道每种资产可以用基本保险合同的组合来人工合成.

(3) 每种资产可以用流动期权的一个组合来合成.

因此, 期权市场不仅提供了它们基本保险合同的密切相关物, 而且也向我们展示了原则上如何获得对于所有资产都通用的静态合成物. 当然, 实际的应用依赖于流动期权的可获得性.

最后, 我们必须强调风险管理和定价在现实生活中从来都不是那么简单, 因为在给定的一天中, 流动期权合同的数量和类型都是变化的.

## 参考文献

本章中对金融基本定理的处理具有启发性和介绍性, 尽管如此它也包括了定理

的所有重要方面. 想更深入地理解定理, 读者可以参考 Duffie(2001), 该书提供了资产定价的一个完美处理. Brace 等人 (1997) 的文章在鞅论的应用方面是一个重要的里程碑, 特别适合于理解本章的定价和测度变换. Elewlow 和 Strickland(1998) 为本章提供了若干例子.

## 附录 11-1 基本定理的简单经济学

本附录从标准的微观经济学理论角度为基本定理提供了一个证明. 考虑下列结构. 一个投资者面临一个涉及两个时间段 (即决策时间和相关未来时间 $T$) 的决策. 在时间 $T$, 只有两种可能的世界状态 $\omega^i, i=1,2$. 投资者对这两种状态的主观概率分别是 $p^1$ 和 $p^2$.

投资者的偏好由*效用函数*$U(X_t)$ 来描述, 其中 $X_t$ 是在时间 $t$ 的总 (真实的) 消费. 本质上, 投资者消费越高, 他的状况越好:

$$0 < \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X_t}. \tag{109}$$

但是, 额外消费增加的正效应越来越小:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}X_t^2} < 0. \tag{110}$$

投资者希望伴随他现在和未来消费的*效用期望*最大化:

$$E_t^P[U(X_t) + \beta U(X_T)] = U(X_t) + \beta(p^1 U(X_T^1) + p^2 U(X_T^2)), \tag{111}$$

这里 $\beta$ 是一个常数的主观贴现因子, $P$ 是个人主观概率, 而 $X_T^1$ 和 $X_T^2$ 分别是时间 $T$ 时状态 1 和状态 2 的消费水平. 这个函数的最大化满足投资者在时间 $t$ 时的预算限制以及时间 $T$ 时世界的两种状态

$$\begin{aligned} q_t X_t + S_t h_t &= I, \\ q_T^1 X_T^1 &= I + h_t S_T^1, \\ q_T^2 X_T^2 &= I + h_t S_T^2, \end{aligned} \tag{112}$$

$S_t$ 是一个可以在时间 $t$ 购买的风险资产. 它在时间 $T$ 时有可能值 $S_T^1$ 和 $S_T^2$. 这里 $I$ 在 $t$ 和 $T$ 时已知, 它们代表了所得收入. $q_t$, $q_T^1$ 和 $q_T^2$ 是消费品的相应价格. 注意到在时间 $T$ 时有两个价格, 分别对应于每种状态. 最后, $h_t$ 是投资者在时间 $t$ 时购买 $S_t$ 的数量.

我们处理的是一个具有常数收入的投资者需要在两个时间段的结构下分配储蓄和消费的问题. 投资只能通过购买希望数量的 $S_t$ 资产来进行. 资产的价格在这个模型中是一个随机变量.

投资者是一个风险厌恶者, 而且总要使效用函数的期望最大化. 求解这个最大化问题有若干种方法. 我们的目的是要说明从一个简单的例子可以推出金融基本定理. 因此, 我们并不关注最优消费本身. 相反地, 我们想获得 "现在的" 资产价格 $S_t$ 和时间 $T$ 时两个可能价值 $S_T^1$ 和 $S_T^2$ 之间的关系. 资产定价基本定理就是关于这两套价格的. 因此, 我们应该能够弄清目前的框架是如何产生基本定理中的状态价格 $Q^i$ 的.

记住这些目标, 我们首先将 (112) 式中的 $X_t$, $X_T^1$, $X_T^2$ 进行代换, 然后将得到的表达式对剩下的唯一一个决策变量 $h_t$ 求导. 通过代换得到

$$
\begin{aligned}
U(X_t)+\beta(p^1U(X_T^1)+p^2U(X_T^2)) =& U\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)+\beta\Bigg(p^1U\left(\frac{I+h_tS_T^1}{q_T^1}\right) \\
&+p^2U\left(\frac{I+h_tS_T^2}{q_T^2}\right)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{113}
$$

将右边对 $h_t$ 求导, 并且令其等于 0, 重新整理后得

$$
\begin{aligned}
U'\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)\left(\frac{S_t}{q_t}\right) =& \beta\Bigg(p^1U'\left(\frac{1+h_tS_T^1}{q_T^1}\right)\left(\frac{S_T^1}{q_T^1}\right) \\
&+p^2U'\left(\frac{I+h_tS_T^2}{q_T^2}\right)\left(\frac{S_T^2}{q_T^2}\right)\Bigg),
\end{aligned}
\tag{114}
$$

这里 $U'(\cdot)$ 是 $U(x)$ 关于 "$x$" 的导数.

现在到了关键点. 我们可以重新整理 (114) 式的一阶条件, 从而得到

$$
S_t=\beta\left(p^1\frac{U'\left(\frac{I+h_tS_T^1}{q_T^1}\right)}{U'\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)}\frac{q_t}{q_T^1}S_T^1+p^2\frac{U'\left(\frac{I+h_tS_T^2}{q_T^2}\right)}{U'\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)}\frac{q_t}{q_T^2}S_T^2\right). \tag{115}
$$

现在进行如下的重新定义

$$
Q^1=\beta p^1\frac{U'\left(\frac{I+h_tS_T^1}{q_T^1}\right)}{U'\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)}\frac{q_t}{q_T^1}, \tag{116}
$$

以及

$$
Q^2=\beta p^2\frac{U'\left(\frac{I+h_tS_T^2}{q_T^2}\right)}{U'\left(\frac{I-S_th_t}{q_t}\right)}\frac{q_t}{q_T^2}. \tag{117}
$$

很显然表达式右边的所有项都是正的, 因此, $Q^i, i=1,2$ 也是正的. 将这些 $Q^i$ 代回等式 (115) 中, 我们得到

$$S_t = S_T^1 Q^1 + S_T^2 Q^2. \tag{118}$$

换句话说, 在现在资产价格 $S_t$ 和未来可能价值 $S_T^1$ 和 $S_T^2$ 之间存在一个线性关系, $\{Q^i\}$ 是确定性因子.

这里所示的推导的一个有趣推论如下所示. 即使效用函数 $U(\cdot)$ 和主观概率 $p^i$ 因投资者而异, 一般均衡条件将使这些不同投资者的代换边际率相等, 因此 $\{Q^i\}$ 将是一样的. 换句话说, 即使这些消费者对于未来行为的期望不同, 对于所有消费者来说 $\{Q^i\}$ 也是唯一的.

# 习 题

1. 现在时间是 $t=1$ 而且我们的框架是 Libor 模型. 在时间 $t=3$ 有 4 种世界状态 $\omega_i$.

假设 $L_i$ 是有特定趋向的 Libor 过程而 $B(1,3), B(1,4)$ 和 $B(1,5)$ 是有指定到期日的零息债券价格. 这些工具在 4 种未来世界状态下的可能支付如下所示:

$$L = 6\%, 6\%, 4\%, 4\%, \tag{119}$$

$$B(1,3) = 1, 1, 1, 1, \tag{120}$$

$$B(1,4) = 0.9, 0.92, 0.95, 0.96, \tag{121}$$

$$B(1,5) = 0.8, 0.84, 0.85, 0.88. \tag{122}$$

当前的价格分别为

$$1, 0.91, 0.86, 0.77, \tag{123}$$

这里 1 是投资于 Libor 的 1 美元, 它像一个储蓄账户. 最后, 当前的 Libor 为 5% .

(a) 运用 Mathematica, 确定对应于 $B(1,3), B(1,4), B(1,5), L$ 基础的状态价格向量 $q_1, q_2, q_3, q_4$.

(b) $q_i$ 是否满足所需的正性条件? 是否存在套利机会?

(c) 令 $F$ 是 $1\times 2$ 的远期利率合约的利率, 你能确定出它的无套利价值吗?

(d) 现在令 $C$ 是一个平价产品 (即, 执行价为 5%) 在 $t=2$ 时到期, 但是在时间 $t=3$ 时以面值 1 结算, 它的价值是多少?

2. 假设已知下列数据. 无风险利率为 4%. 股票价格遵循下列过程:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{124}$$

百分数的年波动率为每年 18%. 股票不支付红利而且现在的股价为 100.

运用这些数据, 要求你计算出以这支股票为标的的欧式看涨期权的现值. 期权的执行价为 100 而且到期日为 200 天后.

(a) 确定近似的时间区间 $\Delta$ 使得二叉树有 5 步?

(b) 隐含的 $\mu$ 和 $d$ 将是多少?

(c) 隐含的 "上涨" 概率是多少?

(d) 确定股票价格 $S_t$ 的二叉树.

(e) 确定看涨期权费 $C_t$ 的树结构.

3. 假设在前面练习中所讨论的股票是支付红利的. 所有的参数相同. 考虑由公司支付的三种形式的红利:

(a) 股票按 4%的比率支付连续的已知红利流;

(b) 股票在第三个节点上支付股票价值的 5%, 不支付其他红利;

(c) 股票在第三个节点支付$5 的红利.

在每种情形下, 确定红利前股票价格的树结构. 对于前两种情形, 确定看涨期权的期权费.

在哪种方式下, 第三种支付红利的类型将使二叉树变得复杂?

4. 我们运用二叉树来定价以英镑为标的资产的美式期权. 假设英镑的现在价值为 1.40 美元, 波动率为 20%. 英镑现在的无风险利率为 6%, 而美元的无风险利率为 3%. 看跌期权的执行价为 1.50 美元. 到期日为 200 天后.

(a) 需要解决的第一个问题是美元和英镑利率的作用. 此期权在美国购买, 所以相关的无风险利率为 3%. 但是, 英镑可以用来获取英镑的无风险利率. 所有这个变量可以处理为红利的连续支付率. 或者我们可以说利率的差别应该等于通货增值的期望. 将这点考虑进来, 确定一个 $\Delta$ 使得二叉树有五段?

(b) 确定隐含的 $\mu$ 和 $d$ 以及相关的概率.

(c) 确定汇率的树结构.

(d) 确定拥有同样参数的欧式看跌期权的树结构.

(e) 确定具有前面提到的性质的美式看跌期权的价格.

5. 障碍期权有 4 种主要类型. 它们是上敲出、下敲出、上敲入或下敲入. 在每种情形下, 都有一个特定的 "障碍", 而且当标的资产的价格下跌或者上涨至穿过这个障碍时, 期权要么自动终止 ("敲出" 情形) 要么自动生效 ("敲入" 情形).

考虑一个以现价为 100、波动率为 30%的股票为标的资产的欧式上敲出期权. 股票不支付红利而且遵循几何价格过程. 无风险利率是 6%而且期权在 200 天后到期、执行价是 110. 最后, 障碍是 120. 如果到期日前的股价超过 120, 期权将自动终止.

(a) 确定相关的 $\mu$ 和 $d$ 以及相应的概率.

(b) 为具有同样特性但是没有障碍性质的看涨期权定价.

(c) 为上敲出看涨期权定价.

(d) 哪个期权更便宜?

# 第 12 章 基本定理的应用

## 12.1 引 言

第 11 章讨论的定理建立了重要的无套利条件, 使得在定价和风险管理中我们可以使用鞅方法. 根据这些条件, 给定唯一的无套利状态价格, 我们就可以得到一个合成概率测度 $\widetilde{P}$, 在这个 $\widetilde{P}$ 下, 所有资产价格经 $Z_t$ 标准化后是鞅. 令 $C(S_t, t)$ 表示一个证券, 它的价格依赖某个标的风险 $S_t$, 我们可以写成

$$\frac{C(S_t, t)}{Z_t} = E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{C(S_T, T)}{Z_T}\right]. \tag{1}$$

只要正状态价格存在, 就可以找到许多这样的概率, 而且每个概率对应于一个特定的标准化因子. 选择适当且有效的概率会使计算变得比较容易.

公式 (1) 中的等式可以用各种方法进行数值计算. 无套利价格 $S_t$ 可以通过计算期望值然后乘以 $Z_t$ 获得. 但是为了得到期望值, 我们首先需要概率测度 $\widetilde{P}$. 另一个特点是未来值 $Z_T$ 必须是常数, 因为在无违约情况下它应该视作 $T$ 时到期的债券. 因此, $T$ 时到期的债券是标准化因子的最佳侯选者.

本章将讨论基本定理的三个应用. 第一个应用是Monte Carlo *方法*, 它是计算公式 (1) 中期望值的一般方法. 这种方法可以直接应用到*欧式工具*. 计算过程中需要利用基本定理以及大数定律.[①]

基本定理的第二个应用是*校正*(calibration). 校正是通过流动市场上观测到的无套利价格来选择模型的参数. 本章将讨论一些简单的例子, 包括如何根据基本定理用随机微分方程和树模型来校正市场数据. 在 Black-Derman-Toy(BDT) 模型中将涉及校正.

基本定理的第三个应用是在第 11 章引入的, 但它本质上比较概念化. 我们利用*交叉货币资产*(quanto assets) 说明如何将理论运用到模型中. 交叉货币资产为此提供了很好的媒介, 因为它们的定价包含国内同国外风险中性的测度之间的转换. 测度之间转换的方法是金融工程中的重要部分, 我们将在第 13 章进一步讨论. 交叉货币的应用提供了必要的准备.

---

① 令 $x_i, i = 1, \cdots, N$ 是独立同分布随机变量 $X$ 的观测值, $X$ 具有有限均值:

$$E[X] < \infty. \tag{2}$$

那么, 根据大数定律, 当 $N$ 增大时, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 几乎必然收敛到 $E[X]$.

在讨论之前, 有一点值得注意. 本章的内容是回顾利用基本定理的例子, 而不是介绍如何实施这些数值方法. 利用 Monte Carlo 方法或校正的数值计算过程非常复杂, 而且直接应用未必能得到令人满意的结果. 感兴趣的读者可以参考本章末尾提供的资料.

## 12.2 应用 1: Monte Carlo 方法

考虑包含标的风险 $S_t$ 的函数 $C(S_t, t)$ 在有效的鞅测度 $\widetilde{P}$ 下的期望

$$\frac{C(S_t,t)}{Z_t} = E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{C(S_T,T)}{Z_T}\right], \tag{3}$$

这里, $S_t$ 和 $Z_t$ 是 $t$ 时两个无套利资产的价格. $Z_t$ 是标准化资产, 用于定义 $\widetilde{P}$. $C(S_t, t)$ 表示欧式期权的溢价或者其他依赖于 $S_t$ 且具有到期日 $T$ 的衍生产品.

如果我们已知概率测度 $\widetilde{P}$ 和 $Z_t$, 就可以利用方程 (3) 计算出 $C(S_t, t)$ 的数值解. 这里有两种方法. 首先, 可以求出期望的解析解, 从而得到 $C(S_t, t)$ 的解析式. 当标准化资产 $Z_t$ 的现值已知时, 则归结为计算积分

$$C(S_t,t) = Z_t\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(S_T,T)}{Z_T}\tilde{f}(S_T,Z_T)\mathrm{d}S_T\mathrm{d}Z_T\right], \tag{4}$$

这里 $\tilde{f}(\cdot)$ 表示 $S_T$, $Z_T$ 是在概率 $\widetilde{P}$ 下的联合条件概率密度.[①]公式右端的 $Z_T$ 可以看成是随机的而且可能与 $S_T$ 相关. 所以, 概率 $\widetilde{P}$ 适用于随机变量 $S_T$ 和 $Z_T$.

适当选择 $Z_t$, 可以使得 $Z_T$ 为常数. 例如, 如果我们令 $Z_t$ 是无违约风险的贴现债券, 那么在到期日 $T$ 时,

$$Z_T = 1. \tag{5}$$

显然, 这种标准化因子大大简化了定价的计算, 因为 $\tilde{f}(\cdot)$ 变成了一元条件密度.

即便这样, 解析方法也有一个问题. 通常, 积分不存在解析解, 将 $S_t$ 与 $Z_t$ 和分布函数 $\widetilde{P}$ 的其他参数联系起来的公式可能不存在. 尽管不用解析式, 仍然可以计算出积分的值, 这就得使用数值计算.

一种数值方法是 Monte Carlo 方法.[②]本节简单地总结一下计算步骤. 先由一个简单例子开始. 假设随机变量 $X$[③]的分布 $P$ 是正态的, 即[④]

$$X \sim N(\mu, \sigma). \tag{6}$$

① 我们假设 $\tilde{f}(S_T, Z_T)$ 存在.

② 另一种方法是 PDE 方法, 首先找到与期望相对应的偏微分方程, 然后解出 PDE 的数值解或者解析解. 这种方法在这里不作论述, 有兴趣的读者可以参考 Wilmott(2000) 和 Duffie(2001).

③ 这里 $X$ 等价于 $S_T/B_T$.

④ 前面的 $\widetilde{P}$ 与它等价.

假设已知 $X$ 的函数 $g(X)$. 在 $E^P[g(X)] < \infty$ 的条件下, 如何计算期望 $E^P[g(X)]$ 呢? 一种方法是利用上面提到的解析方法. 如果解析解存在的话, 计算积分

$$E^P[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\right)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

还有另一种更简单的方法, 就是利用大数定律. 已知 $X$ 有大量的样本 (记为 $x_i$), $x_i$ 的任意函数 $g(x_i)$ 的样本均值将趋近于实际期望值 $E^P[g(X)]$. 所以, 计算 $E^P[g(X)]$ 的近似值就归结为从适当的分布中抽取大量的样本 $x_i$. 利用随机数字生成器, 在已知 $X$ 分布函数的条件下, 得到 $x_i$ 的 $N$ 个复制. 这些复制独立产生, 并且应用大数定律得到

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i) \to E^P[g(X)]. \tag{8}$$

$E^P[g(X)] < \infty$ 是收敛性成立的充分条件. 下面将其应用到资产定价上.

### 12.2.1 Monte Carlo 定价

利用 Monte Carlo 方法计算期望, 首先需要产生具有预先指定分布的随机变量的一系列样本, 然后计算样本均值. 这种方法可以直接应用于定价方程. 事实上, 基本定理提供了风险中性的概率 $\widetilde{P}$, 使得对于任意无套利资产价格 $S_t$ 有

$$\frac{S_t}{B_t} = E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{S_T}{B_T}\right]. \tag{9}$$

这里, 标准化变量 $Z_t$ 是储蓄存款, 记为 $B_t$, 它定义为

$$B_t = \mathrm{e}^{\int_0^t r_u \mathrm{d}u}, \tag{10}$$

$r_u$ 是连续复利的瞬时即期利率. 它表示 $t=0$ 时投资的 1 美元在 $t$ 时的价值.

上式中的积分部分表示在 $u \in [t,T]$ 时 $r_u$ 不是常数. 如果 $r_t$ 是随机变量, 那么需要联合条件分布函数来选择 $S_T$ 和 $B_T$ 的复制. 我们需要设定一个模型, 这个模型能够描述 $S_T$ 和 $B_T$ 的联合动态机理, 而且能够将 $t$ 时的信息同 $T$ 时的随机数联系起来. 首先从 $r_t$ 是常数 $r$ 的简单情形开始.

#### 具有常数即期利率的看涨期权定价

考虑欧式看涨期权价格的计算, 这个期权的交割价是 $K$, 期限是 $T$, 标的资产是 $S_t$, 而且满足 Black-Scholes 假设. 利用公式 (10) 中的 $B_t$ 作为标准化资产, 方程 (9) 变为

$$\frac{C(t)}{\mathrm{e}^{rt}} = E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{C(T)}{\mathrm{e}^{rT}}\right], \tag{11}$$

这里 $C(t)$ 表示依赖于 $S_t, t, K, r$ 和 $\sigma$ 的看涨权利金. 经过化简和整理得

$$C(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} E_t^{\widetilde{P}}[C(T)], \tag{12}$$

其中

$$C(T) = \max[S_T - K, 0]. \tag{13}$$

利用 Monte Carlo 方法, 很容易计算方程 (12) 的右端项, 从而得到 $C(t)$.

利用存款账户标准化, 我们可以得到 $S_t$ 离散化后的风险中性的动态方程, 离散区间大小是 $\Delta > 0$:

$$S_{t+\Delta} = (1 + r\Delta)S_t + \sigma S_t(\Delta W_t), \tag{14}$$

这里假设波动率 $\sigma$ 是常数, 而且 $\Delta W_t$ 是均值为 0、方差为 $\Delta$ 的标准正态分布的随机变量:

$$\Delta W_t \sim N(0, \Delta). \tag{15}$$

在 SDE 中引入 $r$ 是因为利用了风险中性测度 $\widetilde{P}$. 我们可以利用这些动态方程很容易地计算出 $S_T$ 的复制.

(1) 选择 $\Delta$ 的大小, 然后利用适当的伪-随机数发生器从正态分布中产生随机变量 $\Delta W_t$.

(2) 利用 $S_t$ 的当前值, 参数值 $r, \sigma$ 以及方程 (14) 的动态方程得到 $N$ 个最终值 $S_T^j, j = 1, 2, \cdots, N$. 这里 $j$ 表示用 Monte Carlo 操作产生的随机路径.

(3) 将它们代入支付函数得

$$C(T)^j = \max[S_T^j - K, 0], \tag{16}$$

从而得到 $C(T)^j$ 的 $N$ 个复制.

(4) 最后, 计算样本均值并适当贴现得到 $C(t)$:

$$C(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} C(T)^j. \tag{17}$$

这个过程产生了看涨期权的无套利价格. 现在我们考虑一个简单的例子.

**例**

考虑下面标的为 $S_t$ 的欧式普通看涨期权的定价. 假设欧元/美元的即期汇率服从下面的离散 (近似的)SDE:

$$S_{t_i}^j = S_{t_{i-1}}^j + (r - r^f)S_{t_{i-1}}^j \Delta + \sigma S_{t_{i-1}}^j \sqrt{\Delta}\epsilon_i^j, \tag{18}$$

这里漂移是本国与外国利率的差值.

已知交割价为 $K = 1.095\,0$ 的看涨期权数据如下:

$$r = 2\% \quad r^f = 3\% \quad t_0 = 0, T = 5\text{天} \quad S_{t_0} = 1.09 \quad \sigma = 0.10. \tag{19}$$

金融工程师决定选择 $N = 3$ 条路径来定价这个期权. 离散区间选择 $\Delta$=1 天.

利用软件 Mathematica 产生下面服从标准正态分布的随机数:

$$\{0.763, 0.669, 0.477, 0.287, 1.81, -0.425\}, \tag{20}$$

$$\{1.178, -0.109, -0.310, -2.130, -0.013, 0.421\,141\}, \tag{21}$$

$$\{-0.922, 0474, -0.556, 0.400, -0.890, -2.736\}, \tag{22}$$

将这些数据代入离散后的 SDE 中, 有

$$S_i^j = \left(1 + (0.02 - 0.03)\frac{1}{365}\right) S_{i-1}^j + 0.10 S_{i-1}^j \sqrt{\frac{1}{365}}\epsilon_i^j. \tag{23}$$

我们得出以下路径:

| 路径 | 第 1 天 | 第 2 天 | 第 3 天 | 第 4 天 | 第 5 天 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.093 7 | 1.096 5 | 1.098 1 | 1.108 5 | 1.106 0 |
| 2 | 1.089 3 | 1.087 5 | 1.075 4 | 1.075 3 | 1.077 6 |
| 3 | 1.092 7 | 1.089 46 | 1.091 7 | 1.086 | 1.071 0 |

对于普通看涨期权, 交割价 $K = 1.095$, 仅第一个路径是价内的, 因此

$$C(T)^1 = 0.011, \quad C(T)^2 = 0, \quad C(T)^3 = 0. \tag{24}$$

利用连续复利, 看涨期权的权利金为

$$C(t) = \text{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{1}{3}[0.011 + 0 + 0], \tag{25}$$

$$C(t) = 0.003\,7. \tag{26}$$

显然, 模型参数的选择是为了说明 Monte Carlo 过程的应用, 现实生活的应用不可能利用这么少的路径来定价证券. 但是需要注意到, 与股票价格的动态方程情形不同, SDE 的漂移是 $(r - r^f)S_t\Delta$ 而不是 $rS_t\Delta$. 这是由于外国货币支付了外国利息, 所以应该使用外国利率与无风险利率的差值作为漂移率. 我们将在下一节详细讨论此问题.

### 12.2.2 二元外汇期权的定价

本节利用 Monte Carlo 技术来为外汇市场上的数字或两值期权定价. 考虑如下基本工具:

如果外国货币的价格 $S_t$ 在到期日超过 $K$, 那么期权持有者将获得本国货币的支付 $R$. 否则期权持有者得到零支付. 期权是欧式的, 到期日是 $T$. 期权以 $C(t)$ 价格卖出.

我们将利用 Monte Carlo 方法为这个二元外汇期权定价. 但是, 因为标的资产是汇率, 在此情形下还需要其他的附加结构, 我们首先讨论这一点. 这是一个应用基本定理的很好例子. 同时也使我们有机会引入外汇市场上期权定价的一些基本知识.

1. 获得风险中性动态方程

以标的股票价格的普通期权为例, 假设标的股票不分红, 且股票价格服从如下连续时间几何过程:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{27}$$

其中, $\mu$ 是未知的漂移系数, 表示股票的市场期望百分比, $\sigma$ 是常数百分比波动参数. 最后, $W_t$ 表示 Wiener 过程.

借助于资产定价基本定理, 可以用无风险利率 $r$ 替换未知漂移项 $\mu$, 并假设 $r$ 是常数. 对于外汇利率期权, 需要修正其中的某些假设. 我们可以保留 $S_t$ 过程的总体几何结构, 但是需要变动关于红利的假设. 根据定义, 外币是银行同业存款而且可以获得外国 (隔夜) 利率. 根据基本定理, 可以用利率差值$r_t - r_t^f$ 来代替现实世界中的漂移 $\mu$, 这里 $r_t^f$ 是外国瞬时即期利率, $r_t$ 一般是本国利率. 所以, 如果即期利率是常数, 则

$$r_t = r, \quad r_t^f = r^f, \quad \forall t. \tag{28}$$

无套利动态方程为[①]

$$\mathrm{d}S_t = (r - r^f) S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{29}$$

当参考资产是外币时, 利用利率差值代替即期利率 $r$ 作为风险中性漂移的基本原理是基本定理的直接应用. 既然本章讨论基本定理的应用, 这里我们将作简要的说明.

沿用第 11 章的定义, 令 $S_t$ 为支付一单位外币所需的美元数量. 第 11 章介绍

① 如果 $r_t$ 和 $r_t^f$ 是随机的, 那么需要同时产生未来利率的随机复制. 我们需要建立利率的动态模型.

的资产定价基本定理说明, 我们可以利用状态价格 $\{Q^i\}, i=1,\cdots,n$,

$$S_t=\sum_{i=1}^{n}(1+r^f\Delta)S_T^iQ^i. \tag{30}$$

由此可知, 对状态 $i$, 在 $T$ 时一单位的外币等价于 $S_T^i$ 美元, 并且在 $\Delta=T-t$ 期间赚取年利息 $r^f$. 使用本币存款账户作为标准化因子得

$$S_t=\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+r^f\Delta)}{(1+r\Delta)}S_T^i(1+r\Delta)Q^i. \tag{31}$$

选择风险中性概率为

$$\tilde{p}_i=(1+r\Delta)Q^i, \tag{32}$$

整理方程 (31), 得到 $\Delta$ 期间 $S_t$ 的期望总回报为

$$\frac{(1+r\Delta)}{(1+r^f\Delta)}=E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{S_T}{S_t}\right]. \tag{33}$$

方程左端可以近似为①

$$(1+r\Delta-r^f\Delta), \tag{34}$$

上式表示在风险中性概率 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 下, $S_t$ 预计以每年 $(r-r^f)$ 的利率变化. 这证明了动态方程的连续时间风险中性漂移为

$$\mathrm{d}S_t=(r-r^f)S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t. \tag{35}$$

既然动态方程已经指定, 下一步便是选择 Monte Carlo 路径.

2. Monte Carlo 过程

假设我们在这样的框架下定价数字期权. 如何利用 Monte Carlo 方法执行呢? 假设已知 $S_t$ 的无套利动态方程, 我们可以简单地利用此前提供的步骤.

特别地, 我们需要产生从 $S_t$ 的已知现值出发的随机路径. 这可以通过两种方式完成: 首先, 求解方程 (35) 的 SDE, 如果存在解析解, 然后从获得的解析公式中挑选随机复制; 第二种方式是将方程 (35) 中的动态方程离散化, 然后进行 12.2.1 节讨论的操作. 假设先选择离散区间 $\Delta$, 然后将动态方程离散化: ②

$$S_{t+\Delta}=S_t+(r-r^f)S_t\Delta+\sigma S_t\Delta W_t. \tag{36}$$

---

① 这种近似可以利用一阶 Taylor 级数.

② 随机微分方程的离散化不是平凡的, 而且还有其他优化方法. 这里, 我们忽略这些数值方法的复杂性. 感兴趣的读者可以参考 Kloeden and Platen(1999).

下一步将利用随机数生成器产生 $N$ 个服从标准正态分布的随机变量序列 $\{\varepsilon_i^j, i=1,\cdots,k, j=1,\cdots,N\}$, 然后利用离散化的 SDE 计算 $N$ 个模拟路径:

$$S_{t_i}^j = S_{t_{i-1}}^j + (r - r^f)S_{t_{i-1}}^j \Delta + \sigma S_{t_{i-1}}^j \sqrt{\Delta}\epsilon_i^j, \tag{37}$$

其中, 上标 $j$ 表示第 $j$ 条模拟路径, $\Delta = t_i - t_{i-1}$.

一旦得到路径 $\{S_{t_i}^j\}$, 在到期日支付为 $R$ 的数字看涨期权权利金的无套利价值 $C(t)$, 可以通过以下等式得出:

$$C(t) = R\mathrm{e}^{-r(T-t)} E_t^{\tilde{P}}[I_{\{S_T>K\}}], \tag{38}$$

其中符号 $I_{\{S_T>K\}}$ 是确定 $T$ 时 $S_T$ 是否超过 $K$ 的示性函数:

$$I_{\{S_T>K\}} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } S_T > K, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{39}$$

这意味着如果到期日期权在价内, 则 $I_{\{S_T>K\}}$ 等于 1, 否则等于 0. 根据 (38) 式中的期望支付, 无套利价值 $C(t)$ 依赖于 $E_t^{\tilde{P}}[I_{\{S_T>K\}}]$. 后者可以写为

$$E_t^{\tilde{P}}[I_{S_T>K}] = \mathrm{Prob}(S_T > K), \tag{40}$$

所以,

$$C(t) = R\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{Prob}(S_T > K). \tag{41}$$

我们很容易解释这个方程. 数字期权的价值等于 $S_T$ 大于 $K$ 的风险中性概率乘以支付常数 $R$ 的现值.[①]

在这些条件下, Monte Carlo 方法的作用非常简单. 首先由当前已知的 $S_t$ 产生汇率的 $N$ 个路径, 然后计算超过水平 $K$ 的路径的比例, 一旦总数确定, 可计算其数目记为 $m$, 那么期权的无套利价值为

$$C(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} R\mathrm{Prob}(S_T > K) \tag{42}$$

$$\cong \mathrm{e}^{-r(T-t)} R\left(\frac{m}{N}\right). \tag{43}$$

在此种情形下, 利用 Monte Carlo 方法计算特殊的期望值, 就是事件 $\{S_T > K\}$ 的风险中性概率. 12.2.3 节将讨论两个例子.

---

① 利率的差异控制着无套利动态方程, 但是贴现计算仅需要利用本国利率.

### 12.2.3 路径依赖性

前面讨论的例子中, 我们利用 Monte Carlo 方法产生标的风险 $S_t$ 的路径, 在计算期望数值 $C(S_t,t)$ 时仅考虑这些路径在 $T$ 时的值, 路径的其他因素没有直接应用到定价中.

如果标的资产在中间发生支付或者受其他一些限制的影响, 比如障碍期权, 那么情况将会发生变化. 令 $C(S_t,t)$ 表示障碍为 $H$ 的障碍看涨期权的价格, 在区间 $u\in[t,T]$ 中, 期权是否敲进或敲出取决于事件 $S_u<H$. 考虑下敲出期权的例子. 在定价中, 一旦得到 Monte Carlo 路径, 就需要用整条路径来检验所有 $S_u^j$ 是否满足条件 $S_u<H$. 这是路径依赖资产的一个例子, 此时需要直接利用整条 Monte Carlo 路径.

这里我们再提供两个关于应用 Monte Carlo 程序的例子. 第一个例子是对普通数字期权的应用, 第二个例子将讨论下敲出期权.

**例**

*考虑标的 $S_t$ 的数字期权定价, 欧元/美元汇率的结构同第一个例子. 数字欧元看涨期权的交割价为 $K=1.091$, 如果到期时为价内, 则支付 100 美元. 参数同前为:*

$$r=2\% \quad r^f=3\% \quad t_0=0, \quad t=5\text{天} \quad S_{t_0}=1.09 \quad \sigma=0.10. \tag{44}$$

*$S_t$ 的路径如下表所示:*

| 路径 | 第 1 天 | 第 2 天 | 第 3 天 | 第 4 天 | 第 5 天 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.093 7 | 1.096 5 | 1.098 1 | 1.108 5 | 1.106 0 |
| 2 | 1.089 3 | 1.087 5 | 1.078 0 | 1.085 0 | 1.092 |
| 3 | 1.092 7 | 1.089 46 | 1.091 7 | 1.086 | 1.071 0 |

*如果 $1.091<S_T^j$, 数字期权到期时在价内. 这个事件有两条路径满足前面的条件, 且期权到期时在价内的风险中性概率估计值为 2/3. 计算出期权的价值为:*

$$C(t)=\text{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{2}{3}[100], \tag{45}$$

$$C(t)=\$66.6. \tag{46}$$

现在考虑增加下敲出障碍 $H=1.08$ 的情况. 如果到期前 $S_t$ 位于这个障碍以下, 那么这个数字看涨期权敲出.

**例**

*所有参数同第一个例子, 已知路径为:*

| 路径 | 第 1 天 | 第 2 天 | 第 3 天 | 第 4 天 | 第 5 天 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.093 7 | 1.096 5 | 1.098 1 | 1.108 5 | 1.106 0 |
| 2 | 1.089 3 | 1.087 5 | 1.078 0 | 1.085 0 | 1.092 |
| 3 | 1.092 7 | 1.089 46 | 1.091 7 | 1.086 | 1.071 0 |

数字敲出看涨期权要求 1.091< $S_T^j$, 而且路径不能低于 1.08. 此时只有一条路径满足, 期权的价值是:

$$C(t) = \mathrm{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{1}{3}[100], \tag{47}$$

$$C(t) = \$33.3. \tag{48}$$

因此, 数字期权较便宜. 对于普通期权, 计算期权的价值只用到终值, 但对于敲出看涨期权, 整条路径都用来检验条件 $H < S_t$.

### 12.2.4 离散偏差与解析解

关于 Monte Carlo 的例子中利用了 SDE 的离散估计. 假设资产价格 $S_t$ 的无套利动态方程可以表示为如下的几何 SDE:

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{49}$$

选择适当的时间区间 $\Delta$, 并且忽略连续复利率, 离散后的 SDE 为

$$S_{t+\Delta} = (1 + r\Delta)S_t + \sigma S_t(\Delta W_t). \tag{50}$$

方程 (50) 仅是 (49) 式给出的真实连续时间动态方程的近似.

对于特殊的 SDE, 我们可以建立精确的 $S_t$ 的样本. 在这种特殊情况下, $S_t$ 的随机微分方程可以解出解析解. 方程 (49) 中的几何过程就属于这种情况. 通过解析式我们可以直接得到 $S_T$ 的值

$$S_T = S_{t_0}\mathrm{e}^{r(T-t_0)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t_0)+\sigma(W_T-W_{t_0})}. \tag{51}$$

$(W_T - W_{t_0})$ 项服从均值为 0, 方差是 $T - t_0$ 的正态分布. 所以, 通过引入这个随机变量的复制, 我们可以得到在任意 $T$ 时, $t_0 < T$, $S_T$ 的精确复制. 结果表明, 甚至在均值回归模型中, 这种解析公式也是可行的, 可以应用到 Monte Carlo 定价中. 但是一般地, 尽管存在离散偏差, 我们还是利用离散化的 SDE.[①]

① Platten et.al(1992) 讨论了如何减少这种偏差. Ait-Sahalia(1996) 研究了利率衍生产品背景下的偏差, 并且说明了如何利用连续时间 SDE.

### 12.2.5 现实中的复杂性

显然, 远非这些简单的例子所体现的, Monte Carlo 其实是一种非常复杂的方法. 由于难度提高, 需要在以下几个方面做出重要改进: (1) 如何利用计算机选择随机数; (2) 如何调整系统使得在最短的时间内达到最大的精度; (3) 如何在给定的随机选择数下, 减少所计算的价格方差. 除了这些问题, 其他问题也需要考虑. 既然这里我们只关注金融工程, 就不再讨论其他问题了.[①]

## 12.3 应用 2: 校准

模型校准是指通过模型参数的选择, 使得这个模型能复制已观测到的无套利基准价格 (benchmark price). 我们已经讨论了如何将基本定理应用到 SDE, 本节将把重点放在树模型上. 如 12.2 节所述, 同样可以利用 Monte Carlo 和 SDE 完成校准.

### 12.3.1 校准树

Black-Derman-Toy(BDT) 模型是从市场价格中提取信息的很好的例子. 这个模型校准即期利率 $r_t$ 的未来路径. BDT 模型说明由流动且无套利资产价格中推导出无套利动态方程的方法.[②]

BDT 模型的基本思想与其他任意校准方法的相同. 假设它是隐含的二叉树, 即隐含在资产价格中的状态价格的估计或风险中性概率的估计. 模型假设已知基准零附息债券的无套利价格和这些市场上的相关波动率报价. 这些波动率报价来自在第 15 章和第 18 章中讨论的流动的上限、下限或互换. 此程序一共有三步: 首先是获得基准债券的无套利价格和相关波动率; 其次, 从这些数据提取出相应变量的无套利动态方程; 最后, 利用无风险动态方程对其他利率敏感证券进行定价.

本节说明了利用三期二叉树的过程. 为了简化符号, 将重点放在主要思想的理解上, 本节假设时间区间 $\Delta$ 等于一年, 而且在 Libor 设定中, 日计数参数 $\delta$ 也等于 1. 读者可以很容易地推广这个简单例子.

### 12.3.2 提取 Libor 树

假设已知 3 个无风险基准零附息债券的无套利价格为 $\{B(t_0,t_1), B(t_0,t_2), B(t_0,t_3)\}$. 再假设我们观察到了 Libor 利率 $L_{t_0}, L_{t_1}, L_{t_2}$ 的波动率报价为 $\sigma_i, i = 0,1,2$.

首先定义 $\sigma_0$ 等于 0, 因为这个变量在 $t_0$ 时已经观测到. 然后假设已知如下数

---

① 对于感兴趣的读者, Ross(2002) 中的文章是很好的入门资料.

② 除了 BDT 方法, 固定收入的惯例在不同方向有所发展. 一方面是远期 Libor 模型, 另一方面是三叉树利率模型.

据:

$$\sigma_1 = 15\%, \tag{52}$$

$$\sigma_2 = 20\%, \tag{53}$$

$$B(t_0, t_1) = 0.95, \tag{54}$$

$$B(t_0, t_2) = 0.87, \tag{55}$$

$$B(t_0, t_3) = 0.79. \tag{56}$$

从这些数据, 我们提取出 Libor 利率 $L_{t_i}$ 的未来无套利运动的信息. 首先需要某些定价函数将债券无套利价格与 Libor 利率的动态方程联系起来. 这些定价函数很容易从基本定理得到.

**定价函数**

考虑 $t_0$ 和 $t_3$ 时的基本定理. 假设在 $t_3$ 时有 $k$ 种状态, 考虑第 11 章中讨论的矩阵方程:

$$\boldsymbol{S}_{kx1} = \boldsymbol{D}_{kxk}\boldsymbol{Q}_{kx1}, \tag{57}$$

这里, $\boldsymbol{S}$ 是 $t_0$ 时无套利资产价格的 $(kx1)$ 向量, $\boldsymbol{D}$ 是 $t_3$ 时的支付矩阵, 而 $\boldsymbol{Q}$ 是 $t_3$ 时正状态价格的 $(kx1)$ 向量.

假设第一项资产是一年期以 Libor 利率为基础的存款, 第二项资产是 $t_3$ 时到期支付 1 美元的债券 $B(t_0, t_3)$. 那么, 矩阵方程 (57) 的前两行如下:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_{(t_0,t_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^1 & \cdots & [(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^k \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q^k \end{pmatrix}, \tag{58}$$

这里 $[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^i$ 表示 $t_3$ 时第 $i$ 个状态下存款储蓄投资的回报. 将第二行写为

$$B(t_0, t_3) = \sum_{i=1}^{k} Q^i. \tag{59}$$

利用存款账户进行标准化得

$$B(t_0, t_3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^i}{[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^i} Q^i. \tag{60}$$

重新定义风险中性概率

$$\tilde{p}_i = [(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^i Q^i, \tag{61}$$

整理得

$$B(t_0,t_3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})]^i} \tilde{p}_i. \tag{62}$$

因此, $t_3$ 到期的债券的定价方程是:

$$B(t_0,t_3) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right]. \tag{63}$$

同理, 我们可以得到其他两个债券的定价方程为:

$$B(t_0,t_1) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})}\right], \tag{64}$$

$$B(t_0,t_2) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}\right]. \tag{65}$$

因为 $L_{t_0}$ 在 $t_0$ 时已知, 所以第一个方程是平凡的.

### 12.3.3 求 BDT 树

在这个特殊的例子中, 存在 3 个基准价格和两个波动率. 我们因此将得到 5 个方程:

$$B(t_0,t_1) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})}\right], \tag{66}$$

$$B(t_0,t_2) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}\right], \tag{67}$$

$$B(t_0,t_3) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right], \tag{68}$$

$$Vol(L_{t_1}) = \sigma_1, \tag{69}$$

$$Vol(L_{t_2}) = \sigma_2. \tag{70}$$

一旦确定表示 $L_{t_i}$ 的动态模型, 我们就可以解这些方程从而得到 $L_{t_i}$ 的无套利路径.

1. *确定动态方程*

现在来确定无套利动态方程. 根据传统的树模型, 我们简化符号, 并且利用 $i=0,1,2,3$ 表示 "时间", 字母 $u$ 和 $d$ 表示在每个节点上向上和向下的状态. 首先,

因为存在 5 个方程, 所以从这些方程中至多可以获得 5 条独立信息. 换句话说, 指定的动态过程至多有 5 个未知量. 考虑如下三期二叉树:

$$L_0 \to L_1^u \to L_2^{uu},\ L_2^{ud};\quad L_0 \to L_1^d \to L_2^{du},\ L_2^{dd} \tag{71}$$

动态方程有 7 个未知量, 记为 $\{L_0,L_1^u,L_1^d,L_2^{ud},L_2^{du},L_2^{dd},L_2^{uu}\}$. 未知量比方程数还要多两个. 通过在模型中增加限制, 至少要消除两个未知量. 这要取决于方差的确定, 也就是下面我们要讨论的.

2. $L_i$ 的方差

即期 Libor 利率 $L_i, i=0,1,2$ 存在二叉的情况. 这意味着在任意节点上, 即期利率取两种可能值中的一种. 所以, 在 "时间" $i$ 处于状态 $j$ 的条件下, $L_i$ 的百分比方差 (percentage variance) 是①

$$Var(L_i|j) = E^{\tilde{P}}[(\ln(L_i) - \ln(\bar{L}_i))^2|j], \tag{72}$$

其中

$$\ln\bar{L}_i = E^{\tilde{P}}[\ln(L_i)|j] \tag{73}$$

是 $L_i$ 的条件期望值.

我们再增加两个假设. 第一个假设仅为了符号说明. 令 $j=u$, 即假设处在 "向上" 的状态. $j=d$ 时类似.

第二个假设, 令

$$p_i^u = \frac{1}{2}, \quad \forall i, \tag{74}$$

$$p_i^d = \frac{1}{2}, \quad \forall i. \tag{75}$$

即假设在整个树中, 向上和向下的风险中性概率都是常数且相等. 初看起来这好像是相当强的限制, 但实际不然. 利用这些假设和 Libor 利率的二叉特性, 我们可以很快地计算出:②

$$E^{\tilde{P}}[\ln(L_i)|j=u] = p^u\ln(L_i^{uu}) + (1-p^u)\ln(L_i^{ud}) \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(L_i^{uu}) + \ln(L_i^{ud})], \tag{77}$$

将上式代入方程 (72) 得

① 我们这样计算百分波动率是因为上限/下限市场中的波动率是依这种规定报价的.

② 一般的, 上标中第一个 $u$ 表示计算的节点上的方向, 第二个上标表示 Libor 利率的走向.

$$Var(L_i|j=u)=E^{\widetilde{P}}\left[\left(\ln(L_i)-\frac{1}{2}[\ln(L_i^{uu})+\ln(L_i^{ud})]\right)^2|j=u\right], \tag{78}$$

简化整理得

$$Var(L_i|j=u)=\left(\frac{1}{2}[-\ln(L_i^{uu})+\ln(L_i^{ud})]\right)^2. \tag{79}$$

在时间 $i$ 状态 $u$ 下的波动率是

$$\sigma_i^u=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_i^{uu}}{L_i^{ud}}\right]. \tag{80}$$

同理可得向下状态的结果为

$$\sigma_i^d=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_i^{du}}{L_i^{dd}}\right]. \tag{81}$$

这些波动率估计是在接下来的时间内 Libor 利率浮动可能值的函数. 所以, 已知 Libor 波动率在市场上的报价, 这些公式就可以向后解出 $L_i^{uu}$, $L_i^{ud}$ 的值. 我们将在 12.3.4 节中讨论之.

### 12.3.4 树的校准

二叉树可以根据已观察到的价格进行校准. 利用以下相关假设: (1) 过程 $L_i$ 的二叉树特性; (2) $p^u=p^d$=1/2; (3) 树是可重组的, 我们得到以下 5 个方程:

$$B(t_0,t_1)=\frac{1}{(1+L_0)}, \tag{82}$$

$$B(t_0,t_2)=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)}, \tag{83}$$

$$\begin{aligned}B(t_0,t_3)=&\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{uu})}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{ud})}\right]\\&+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{du})}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{dd})}\right],\end{aligned} \tag{84}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_1^u}{L_1^d}\right]=0.15, \tag{85}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_2^{uu}}{L_2^{ud}}\right]=0.20. \tag{86}$$

在这些方程中, 第一个和第二个是直接的. 我们只需利用风险中性测度来定价基准债券. 当使用这些概率作为权重时, 利用 Libor 利率贴现后的未来支付变成鞅, 从而等于相应债券的当前价格.

第三个方程表示 $t=3$ 时到期的债券的定价函数. 根据这里用到的树, 在 $t=0,1,2$ 期间 Libor 利率存在 4 种可能路径. 它们是

$$\{L_0, L_1^u, L_2^{uu}\}, \tag{87}$$

$$\{L_0, L_1^u, L_2^{ud}\}, \tag{88}$$

$$\{L_0, L_1^d, L_2^{du}\}, \tag{89}$$

$$\{L_0, L_1^d, L_2^{dd}\}. \tag{90}$$

根据模型中概率 $p^u$ 和 $p^d$ 的选择方式, 每条路径是等可能发生的. 由此得到第三个方程.

最后两个等式是每个节点上的波动率. 我们发现波动率仅依赖时间标记 $i$,

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_2^{uu}}{L_2^{ud}}\right]=0.20, \tag{91}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_2^{du}}{L_2^{dd}}\right]=0.20, \tag{92}$$

这表示

$$L_2^{uu}L_2^{dd}=L_2^{ud}L_2^{du}. \tag{93}$$

这个方程是继前 5 个方程之后的另一个, 它使得未知量的数目同方程数相等. 在进一步假设树是可重组后, 我们得到

$$L_2^{uu}L_2^{dd}=(L_2^{ud})^2. \tag{94}$$

现在由方程 (82)~(86) 和 (93)~(94) 可以解出 7 个未知量 $\{L_0, L_1^u, L_1^d, L_2^{ud}, L_2^{du}, L_2^{dd}, L_2^{uu}\}$.

因为系统是递归的, 所以解方程的最简单的方法是从 $i=0$ 开始推进操作. 从第一个方程可以得到 $L_0$. 第二和第四个方程可以得到 $L_1^u$ 和 $L_1^d$, 剩下的 3 个方程可以解出最后 3 个未知量. 需要说明的是, 方程 (82)~(86) 的系统不是线性的. 所以, 可以用非线性爬山法 (hill-climbing solution) 确定未知量.

**例**

如图 12-1 所示, 存在三个期间. 所以存在相应零附息债券价格的三个贴现和三个波动率. 由于已知 $L_0$ 的值, 故第一个波动率是 0.

方程 (82)~(86) 的系统可以递归解出. 首先, 得到 $L_0$, 然后是 $L_1^u$ 和 $L_1^d$, 最后是 $t=2$ 的 Libor 利率. 利用 Mathematica 解非线性方程得到如下结果:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & L_2^{uu}=11.8\% \\
 & & L_1^u=6.39\% & \nearrow & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
L_0=5.26\% & & & & L_2^{ud}=L_2^{du}=7.9\% \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & L_1^d=4.73\% & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & L_2^{dd}=5.3\%
\end{array}
\tag{95}
$$

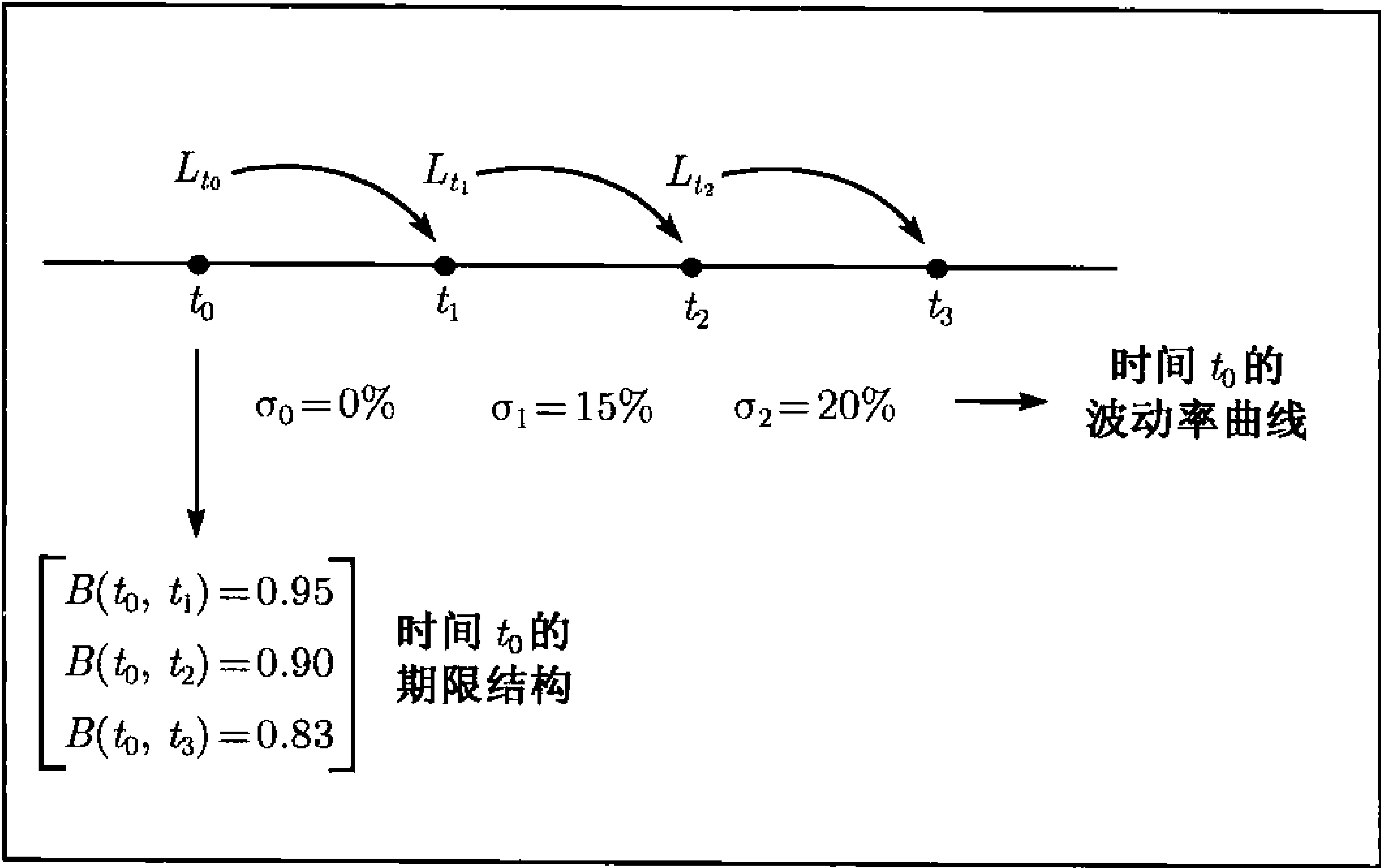



图 12-1

现在讨论如何利用 Libor 利率或其他即期利率的无套利路径的 BDT 树.

### 12.3.5 树的使用

无套利树有很多用途: (1) 可以对标的 Libor 利率 $L_i$ 的篮子期权定价, 即所谓的上限与下限 (caps and floors), 且具有很强的流动性; (2) 可以利用树方法定价互换及相关衍生产品; (3) 最后, 我们还可以利用树方法为远期上限、下限以及互换定价. 讨论下面的例子.

1. 应用: 上限定价

caplet 是以特定 Libor 利率 $L_{t_i}$ 为标的的期权. 选取一个上限利率 $L_K$ 为执行价, 如果 Libor 利率变动超过 $L_K$, 那么 caplet 的购买人将获得补偿. 见图 12-2 和图 12-3. 到期日是 $t_i$, 清算日是 $t_{i+1}$. caplet 将购买人的利率费用 "封顶". 一系列相继标的 $L_{t_i}, L_{t_{i+1}}, \cdots, L_{t_{i+\tau}}$ 的 caplet 构成一个 $\tau$ 期利率上限. 假设需要定价如下 caplet:

- $t_i$ 满足 $t_i - t_{i-1} = 12$ 个月;
- 在 $t_2$ 时可以观察到 Libor 利率 $L_{t_2}$.
- 在 $t_0$ 时本金 $N$ 已选定. 令

$$N = 1\text{百万美元}; \tag{96}$$

- 如果 Libor 利率 $L_{t_2}$ 超过利率上限$L_K$=6.5%, 购买者将在 $t_3$ 时得到支付:

$$C(t_3) = \frac{N(L_{t_2} - L_K)}{100}, \tag{97}$$

  否则没有支付;
- 为了获得 "保险", 购买者需要支付权利金 $C(t_0)$.

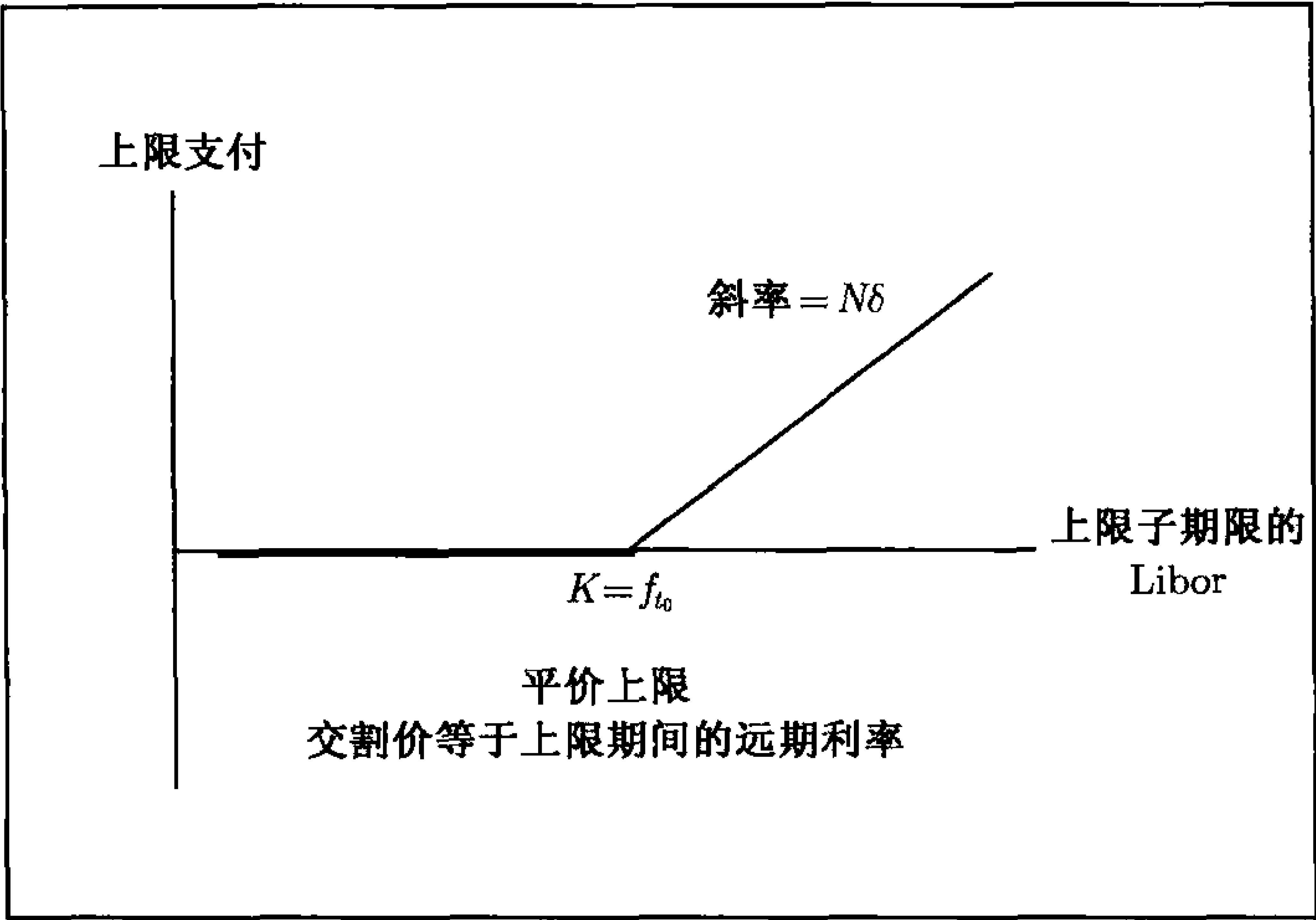



图　12-2

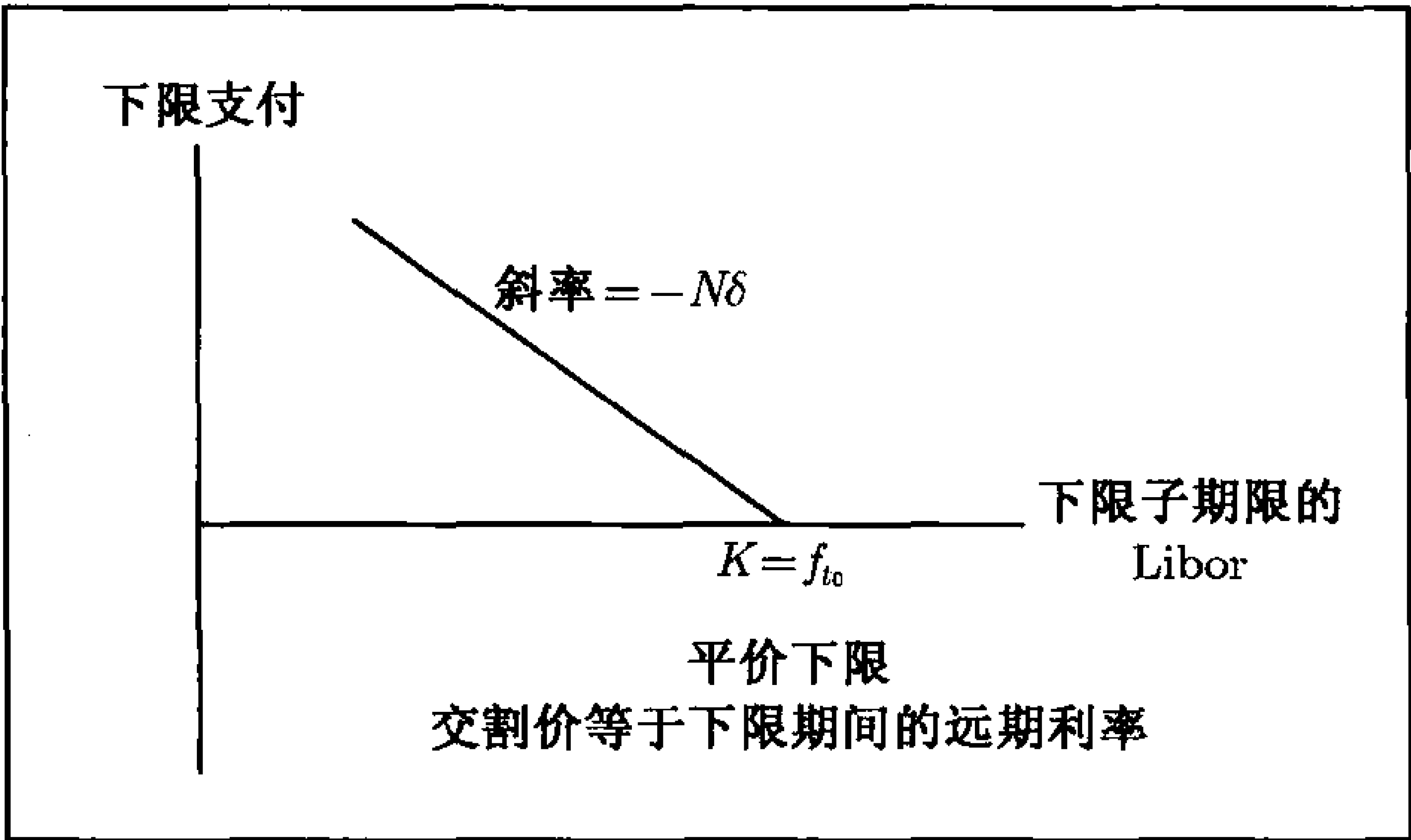



图　12-3

问题是如何确定 caplet 权利金 $C(t_0)$ 的无套利价值. 基本定理指出如果利用风险中性概率计算期望, 那么用无风险利率贴现后的到期日支付的期望价值等于

$C(t_0)$. 换句话说, 记 $\delta$=1, 有

$$C(t_0) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{C(t_3)}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right], \tag{98}$$

到期支付为

$$C(t_3) = N\max\left[\frac{(L_{t_2}-L_K)}{100},0\right]. \tag{99}$$

caplet 的定价可以通过此前确定的 BDT 树来完成. 这个例子中树有 4 个可能的路径, 每个路径的发生概率是 1/4. 利用这些我们可以计算出 caplet 的价格.

根据 BDT 树, caplet 的 4 个路径中有 3 个已经在价内终止. 计算每种情况的可能支付, 然后除以贴现因子, 可得到方程 (99) 中期望的数值解为

$$C_0 = 0.25\left[\frac{53\ 000}{(1.052\ 6)(1.063\ 9)(1.118)} + \frac{14\ 400}{(1.052\ 6)(1.047\ 3)(1.079\ 3)} + \frac{14\ 400}{(1.052\ 6)(1.063\ 9)(1.079\ 3)}\right] = 16\ 587\text{美元}.$$

需要强调的是, 在这些情况下, 贴现因子是随机变量. 不能将它们提到期望算符的外面. 同时, 中间节点是可重组的, 所以导致 $L_2^{ud}$ 和 $L_2^{du}$ 的值相同, 它需要不同的贴现因子, 因为在两个中间路径上平均利率是不同的.

2. 模型的一些假设

这里有必要总结一下前面讨论用到的假设.

- BDT 方法是单因素模型的例子, 因为假设短期利率 (这里为 Libor 利率 $L_i$) 是确定债券价格的唯一变量. 这意味着所有债券价格是完全相关的.
- 利率的分布是对数正态的.
- 关于框架做了一些简化假设. 如不存在税收和交易费用.

最基本的过程还建立在原始数据是无套利的前提下.

3. 注记

BDT 方法可能过于简单. 但是直到第 13 章中要介绍的远期 Libor 利率模型 (Forward Libor Model) 出现之前, 市场专业人士还是喜欢使用 BDT 方法, 而不是那些复杂的模型. 一个简单的模型可能不能确切地模拟现实, 但它有三个重要的优点.

- 第一, 如果模型依赖的参数较少, 那么需要确定的参数就少, 从而发生错误的机会也很小.
- 第二, 如果模型简单, 交易员或风险管理者将会利用个人经验调整模型的不足.

- 第三，一个存在众所周知的缺点但被大量试用的简单模型，可能要比那些虽然复杂却没有试用记录的模型好.

由于类似的原因，另一个存在众所周知的缺点的模型即 Black-Scholes 模型受到了交易者们的偏爱.

### 12.3.6 真实世界的复杂性

前面例子中的 BDT 模型基于某些符号参数，例如两种状态、易获得的纯贴现债券价格等等. 如前所述，它还依赖于一些限制性的假设.

在真实世界中，上面讨论的例子中需要增加如下条件：(1) 日计数惯例需要检验和更正；(2) 由于在 $t=2$ 时清算，此后的贴现可能需要从 $t=3$ 到 $t=2$ 进行；(3) 在市场应用中，要为多个而不是单个 caplet 组成的利率上限定价.

## 12.4 应用 3：交叉货币

到目前为止，有关基本定理应用的前两个都是数值例子. 交叉货币合约的定价是基本定理概念方面的另一个应用，它能很好地说明第 11 章中介绍的技术如何应用到模型的构建中去. 本节将完成第 9 章中开始的交叉货币资产金融工程方面的讨论.

交叉外币资产是按已知汇率以本国货币完成未来支付的资产. 汇率 $x_t$ 在开始时选定，合约在 $T$ 时终止. 例如，利用交叉货币，在消除了对汇率变动的隐含货币敞口后，以美元为基础的投资者可以从外国股票市场潜在的向上状态中获利.

### 12.4.1 交叉货币定价

我们从交叉货币远期的定价开始讨论基本定理的下一个应用. 令 $S_t^*$ 表示以外国货币标价的外国股票，$x_t$ 为汇率，即每单位外国货币兑换的本国货币数量. 利用本国风险中性测度 $\widetilde{P}$ 和基本定理可以得到远期合约在 $t_0$ 时的价值：

$$V(t_0)=\mathrm{e}^{-r(T-t_0)}E_{t_0}^{\widetilde{P}}x_{t_0}[S_T^*-F_{t_0}]. \tag{100}$$

$F_{t_0}$ 是外国股票在时间 $T$ 的远期价值，它由外国货币度量. 令 $\mathrm{V}(t_0)$ 等于 0，得到远期价格 $F_{t_0}$ 为

$$F_{t_0}=E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*] \tag{101}$$

因此，为了计算 $F_{t_0}$，我们需要在本国风险中性测度 $\widetilde{P}$ 下计算外国货币表示的 $S_T^*$ 的期望：

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*]. \tag{102}$$

事实上, 由于基本定理中的状态价格 $Q^i$ 以本国货币表示, 而 $S_t^*$ 以外国货币表示, 这使得上面的计算并非是平凡的.

但是, 如果使用得当, 仍然可以利用基本定理得到 (102) 式中的期望. 为了保持连续性, 我们利用第 11 章中的简单框架. 特别地, 假设仅存在两个期限, $t_0$ 以及在 $T$ 时有 $n$ 个状态的 $T$. 其他符号保持不变.

考虑关于三种资产基本定理的矩阵方程. 第一种是本国存款 $B_t$, 由 1 美元开始, 从中获得本国年利率 $r$. 第二种是外国存款 $B_t^*$, 由 1 单位的外币开始, 获得外国利率 $r^*$. 假设这些利率是常数. 外币在 $t_0$ 时的价值为 $x_{t_0}$ 美元. 最后, 我们获得外国股票 $S_{t_0}^*$.

将这些变量代入基本定理的矩阵方程中得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{t_0} \\ x_{t_0}S_{t_0}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r(T-t_0) & \cdots & 1+r(T-t_0) \\ x_T^1[1+r^*(T-t_0)] & \cdots & x_T^n[1+r^*(T-t_0)] \\ x_T^1 S_T^{*1} & \cdots & x_T^n S_T^{*n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q^n \end{pmatrix}. \tag{103}$$

这里, $x_T^i$ 和 $S_T^{*i}$ 的上标 $i$ 表示它们在时间 $T$ 的值依赖于 $T$ 时的状态. 这个系统包括本国状态价格, 因此外国股票 $S_{t_0}^*$ 的价值需要通过乘以 $x_{t_0}$ 转化成本国货币. $Q^i, i=1,\cdots,n$ 是已知的状态价格且为正.

首先由第 11 章中讨论的方法得到的两个结果开始. 定义本国风险中性测度 $\widetilde{P}$ 为:

$$\tilde{p}_i = (1+r(T-t_0))Q^i, \tag{104}$$

然后, 从 (103) 的第三行得到等式

$$x_{t_0}S_{t_0}^* = \frac{1}{1+r(T-t_0)}\sum_{i=1}^{n} x_T^i S_T^{*i}\tilde{p}_i. \tag{105}$$

这意味着

$$x_{t_0}S_{t_0}^* = \frac{1}{1+r(T-t_0)}E_{t_0}^{\widetilde{P}}[x_T S_T^*]. \tag{106}$$

利用 (103) 中的第二行, 得到汇率的类似等式. 将 $Q^i$ 换成风险中性概率 $\widetilde{P}$ 后得

$$x_{t_0} = \frac{1+r^*(T-t_0)}{1+r(T-t_0)}E_{t_0}^{\widetilde{P}}[x_T]. \tag{107}$$

在计算期望值 $E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*]$ 时, 利用了方程 (106) 和 (107). 由统计学的基本知识知

$$\mathrm{Cov}(S_T^*, x_T) = E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^* x_T] - E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*]E_{t_0}^{\widetilde{P}}[x_T], \tag{108}$$

整理得

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*] = \frac{E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^* x_T] - Cov(S_T^*, x_T)}{E_{t_0}^{\widetilde{P}}[x_T]}, \tag{109}$$

将 (106) 和 (107) 代入得

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*] = \frac{[1 + r(T - t_0)]x_{t_0} S_{t_0}^* - Cov(S_T^*, x_T)}{x_{t_0}\left[\frac{1+r(T-t_0)}{1+r^*(T-t_0)}\right]}. \tag{110}$$

利用相关系数 $\rho$ 以及 $x_t$ 和 $S_t^*$ 的百分比年波动率 $\sigma_x$ 和 $\sigma_s$, 我们能将上式写成另一种形式. 令

$$\mathrm{Cov}(S_T^*, x_T) = \rho\sigma_x\sigma_s(x_{t_0} S_{t_0}^*)(T - t_0). \tag{111}$$

(110) 中的表达式变为

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*] = \frac{1 + r^*(T - t_0)}{1 + r(T - t_0)}[1 + (r - \rho\sigma_x\sigma_s)(T - t_0)]S_{t_0}^*. \tag{112}$$

我们可用下式来近似它:①

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}}[S_T^*] \cong [1 + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T - t_0)]S_{t_0}^*. \tag{113}$$

这给出了以本币表示的交叉货币远期的外币价格:

$$F_{t_0} \cong [1 + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T - t_0)]S_{t_0}^*.$$

它的本币现值是交叉货币的即期价格:

$$V_{t_0} = x_{t_0}\frac{1}{1 + r(T - t_0)}[1 + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T - t_0)]S_{t_0}^*.$$

若使用连续复利利率, 可以重新写出以下关系式:

$$V_{t_0} = \mathrm{e}^{-r(T-t_0)}\mathrm{e}^{(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)}x_{t_0}S_{t_0}^*.$$

根据这个表达式, 交叉货币的价值依赖于汇率变动和外国股票的价值之间的相关性的符号. 如果相关性为正, 那么交叉货币价值为负; 如果相关性为负, 则交叉货币的价值为正;②如果相关性为 0, 交叉货币的值也是 0.

① 对于很小的 $z$, 我们可利用估计 $\frac{1}{1+z} = 1 - z$. 在这个估计中, 忽略 $(T - t_0)^2$ 以及更高阶项.

② 假设相关性为正, 那么当外国股票的价格上升时, 外国货币一般也将升值. 交叉货币从股票持有者的角度消除了这个机会, 因此是负值而且交叉货币资产更便宜.

### 12.4.2 PDE 方法

下例说明了如何利用基本定理得到交叉货币工具的偏微分方程 (PDE). 我们将在连续时间下进行论述. 考虑相同的两种货币, 本国存款和外国存款分别定义为 $B_t$ 和 $B_t^*$. 为了简便, 假设相应的连续复利利率是常数, 记为 $r$ 和 $r^*$. 这意味着存款的价值按照以下 (常) 微分方程逐渐增加:

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t, \qquad t \in [0, \infty), \tag{114}$$

$$\mathrm{d}B_t^* = r^*B_t^*\mathrm{d}t, \qquad t \in [0, \infty). \tag{115}$$

令 $x_t$ 为汇率, 表示 1 单位的外币相当于多少本国货币. 在适当的鞅测度下, $x_t$ 满足如下 SDE:

$$\mathrm{d}x_t = \mu_x x_t\mathrm{d}t + \sigma_x x_t\mathrm{d}W_{1t}, \quad t \in [0, \infty). \tag{116}$$

首先, 我们得到经 $B_t$ 标准化后的汇率动态方程. 注意 $B_t^*$ 是可交易资产, 它的价格以本国货币表示为 $x_tB_t^*$. 根据第 11 章中的结果, $B_t$ 标准化后在相应的风险中性测度 $\tilde{P}$ 下, 比值

$$\frac{x_tB_t^*}{B_t} \tag{117}$$

应该是鞅. 这意味着隐含的动态方程的漂移应该为 0. 求全导数, 得[①]

$$E_t^{\tilde{P}}\left[\mathrm{d}\frac{x_tB_t^*}{B_t}\right] = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{B_t^*}{B_t}\mathrm{d}x_t + \frac{x_t}{B_t}\mathrm{d}B_t^* - \frac{x_tB_t^*}{B_t^2}\mathrm{d}B_t\right] = 0, \tag{118}$$

将 (114), (115) 和 (116) 代入得到[②]

$$\frac{B_t^*}{B_t}\mu_x x_t\mathrm{d}t + \frac{x_t}{B_t}r^*B_t^*\mathrm{d}t - \frac{x_tB_t^*}{B_t^2}rB_t\mathrm{d}t = \frac{x_tB_t^*}{B_t}[\mu_x + r^* - r]\mathrm{d}t. \tag{119}$$

为了使漂移为 0, 必须在 $\tilde{P}$ 下始终有

$$\mu_x + r^* - r = 0. \tag{120}$$

将此漂移代入 (116) 得到 $\tilde{P}$ 下的汇率动态方程为

$$\mathrm{d}x_t = (r - r^*)x_t\mathrm{d}t + \sigma_x x_t\mathrm{d}W_{1t}, \quad t \in [0, \infty). \tag{121}$$

然后, 考虑外国股票 $S_t^*$ 的 $\tilde{P}$ 动态方程

$$\mathrm{d}S_t^* = \mu_s S_t^*\mathrm{d}t + \sigma_s S_t^*\mathrm{d}W_{2t}, \quad t \in [0, \infty). \tag{122}$$

---

① 我们在期望算子内进行微分. 需要强调的是, 这是有意义的, 因为随机微分只是某种极限的符号.

② 熟悉随机积分的读者容易看到, 因为 $x_t$ 在公式中是线性的, 所以 Ito 引理的二阶项为 0. 此外, $B_t$ 是确定性的.

经 $B_t$ 标准化后, 外国股票的本币价值应该是鞅. 利用 Ito 引理

$$E_t^{\widetilde{P}}\left[\mathrm{d}\frac{x_tS_t^*}{B_t}\right]=E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{S_t^*}{B_t}\mathrm{d}x_t+\frac{x_t}{B_t}\mathrm{d}S_t^*-\frac{x_tS_t^*}{B_t^2}\mathrm{d}B_t+\frac{\mathrm{d}x_t\mathrm{d}S_t^*}{B_t}\right]=0, \tag{123}$$

替换微分项, 化简得

$$\begin{aligned}&\frac{S_t^*}{B_t}(r-r^*)x_t+\frac{x_t}{B_t}\mu_sS_t^*-\frac{x_tS_t^*}{B_t^2}rB_t+\frac{\rho\sigma_x\sigma_sx_tS_t^*}{B_t} \\ &=\frac{x_tS_t^*}{B_t}[(r-r^*)+\mu_s-r+\rho\sigma_x\sigma_s]=0.\end{aligned} \tag{124}$$

为了使漂移为 0, 必须在 $\widetilde{P}$ 下始终有

$$\mu_s=r^*-\rho\sigma_x\sigma_s. \tag{125}$$

无套利股票价格的动态方程为

$$\mathrm{d}S_t^*=(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)S_t^*\mathrm{d}t+\sigma_sS_t^*\mathrm{d}W_{2t},\quad t\in[0,\infty). \tag{126}$$

这些动态方程表明了

$$E_t^{\widetilde{P}}[S_T^*]=\mathrm{e}^{(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)(T-t)}S_t^*, \tag{127}$$

这正如前一节所讨论的. 这里利率 $r$ 和 $r^*$ 应解释为连续复利利率. 在前一节中, 它们是区间 $T-t_0$ 上的精算利率.

交叉货币的 PDE

最后, 利用这些结果, 可以得到标的为外国经济风险的套利交叉货币资产的 PDE. 令这个外币资产为 $S_t^*$, 并令 $V_t$ 表示这个交叉货币在时间 $t$ 的价值,

$$V(t)=x_tV(S_t^*,t). \tag{128}$$

$V(\cdot)$ 是资产的定价函数, 它有待确定. $x_t$ 是写入交叉货币合约的初始汇率, 所以 $V(t)$ 以本国货币表示. 在 $B_t$ 标准化下, $V(t)$ 应该是一个鞅. 利用 Ito 引理得①

$$E_t^{\widetilde{P}}\left[\mathrm{d}\frac{V(t)}{B_t}\right]=E_t^{\widetilde{P}}\left[\frac{V_t}{B_t}\mathrm{d}t+\frac{V_s}{B_t}\mathrm{d}S_t^*-\frac{V}{B_t^2}\mathrm{d}B_t+\frac{1}{2}\frac{V_{ss}\sigma_s^2(S_t^*)^2}{B_t}\mathrm{d}t\right]=0, \tag{129}$$

替换随机微分, 化简偏微分方程得

$$V_t+(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)S_t^*V_s+\frac{1}{2}V_{ss}\sigma_s^2(S_t^*)^2-rV=0, \tag{130}$$

终端条件是

$$V(T)=x_tV(S_T^*,T). \tag{131}$$

我们将 PDE 应用到两个特殊的例子中.

① $V_t$ 表示 $V(\cdot)$ 关于 $t$ 的偏微分, 不要与 $V(t)$ 混淆. 此外, 在第 8 章的附录中简要讨论了 Ito 引理. 相关的知识可以参考 Neftci(2000). 比较严格的论述见 Oksendal(2003).

### 12.4.3 交叉货币远期

假设已知交叉货币远期价值为

$$V(t) = q(t)S_t^*, \tag{132}$$

但是时间函数 $q(t)$ 未知. 前一节引入的 PDE 可以用来求解 $q(t)$. 对方程 (132) 进行微分得偏导数

$$V_t = \frac{\partial q(t)}{\partial t} S_t^* = \dot{q} S_t^*, \tag{133}$$

$$V_s = q(t), \tag{134}$$

$$V_{ss} = 0. \tag{135}$$

将这些项代入交叉货币的 PDE, 得

$$\dot{q} S_t^* + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s) q(t) S_t^* - r q(t) S_t^* = 0, \tag{136}$$

终端条件为

$$V(T) = x_t S_T^*. \tag{137}$$

消除一般项 $S_t^*$, 由这个常微分方程可以解出 $q(t)$ 为

$$q(t) = x_t \mathrm{e}^{(r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T-t)}, \tag{138}$$

这和此前得到的结果相同.

### 12.4.4 交叉货币期权

假设交叉货币资产的支付 $V(T)$ 与标的外国股票 $S_t^*$ 的欧式看涨期权的关系式为

$$V_T = x_t \max[S_T^* - K^*, 0], \tag{139}$$

其中 $K^*$ 表示标的股票价格的外国货币值, $T$ 是到期日. 可以利用等价的 Black-Scholes 公式解 (130) 中的 PDE, 来得到欧式交叉货币看涨期权的定价公式为

$$C(t) = x_t [S_t^* \mathrm{e}^{(r^* - r - \rho\sigma_x\sigma_s)(T-t)} N(b_1) - K^* \mathrm{e}^{-r(T-t) N(b_2)}],$$

其中

$$b_1 = \frac{\ln \frac{S_t^*}{K^*} + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s + 0.5\sigma_s^2)(T-t)}{\sigma_s\sqrt{T-t}},$$

$$b_2 = b_1 - \sigma_s\sqrt{T-t}.$$

看涨期权的价值将用本国货币度量.

Black-Scholes 和红利

现在我们说明如何变换 (130) 中的 PDE, 来得到如上简单交叉货币股票期权的 Black-Scholes 型公式. 为此, 需要假设在期权期限内标的股票支付的红利率为常数, 由此导出 Black-Scholes 公式的等价形式.

类似 Black-Scholes 世界中的标准推导, 可以得到以常数利率 $Q$ 支付红利的股票 $S_t$ 为标的的欧式看涨权利金为

$$C(t) = \mathrm{e}^{-Q(T-t)}S_tN(\tilde{d}_1) - K\mathrm{e}^{-(r)(T-t)}N(\tilde{d}_2),$$

其中

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - Q + 0.5\sigma_s^2)(T-t)}{\sigma_s\sqrt{T-t}},$$
$$\tilde{d}_s = \tilde{d}_1 - \sigma_s\sqrt{T-t}.$$

这里 $S_t$ 表示分红的股票.

现在, 将 (136) 中的 PDE 写为

$$V_t + (r-Q)S_t^*V_s + \frac{1}{2}V_{ss}\sigma_s^2(S_t^*)^2 - rV = 0,$$

其中 $Q$ 是红利率, 它可写为

$$Q = r - r^* + \rho\sigma_x\sigma_s,$$

然后将 $Q$ 作为已知的红利率代入标准 Black-Scholes 公式中, 从而得到交叉货币看涨期权的权利金.

### 12.4.5 如何对冲交叉货币

交叉货币合约要求进行动态对冲. 交易商将构造由标的外国资产、外国货币 (或更好的 FX 远期) 以及本国借贷组成的资产组合. 组合的权重需要动态调整, 使得它能够复制交叉货币合约的价值变化. 从对冲调整中实现交易收益 (损失) 形成了交叉货币溢价或贴现的基础.

### 12.4.6 现实生活中的考虑

本节中的货币资产是在简单的、抽象的和非现实环境中讨论的. 此外, 我们还利用了如下假设: (1) 标的过程服从对数正态分布, 这意味着 SDE 是几何的; (2) 在期权期限内相关系数和波动率参数是常数; (3) 类似地, 虽然相应汇率是随机的, 但利率是常数.

这些假设在大多数现实应用中不能满足. 对于交叉货币特别重要的是, 汇率和其他风险因子的相关系数不稳定. 因此, 本节中讨论的模型是基本定理在理论上的应用. 它们不能提供现实世界交叉货币定价的表达式.

## 12.5 结　论

本章讨论了资产定价基本定理的三个应用. 一般地, 当资产的静态复制不可行时, 金融工程师需要使用这些方法. 盯市要求或新产品的构造经常需要内部计算无套利价格, 而不是借助通过市场交易资产合成的方法来定价. 本章中提出的方法给出了这种定价的一些标准途径.

## 参考文献

本章通过一些简单的例子进行介绍, 读者还可以参考其他一些文献. 我们推荐 Clewlow 和 Strickland(1998), 它们提供了计算机应用的一些编码. Jackle(2002) 是介绍金融中的 Monte Carlo 方法的新书. Avellaneda(2001) 中的一系列文章深入讨论了关于校准问题. 最后, 原始的 Black, Derman 和 Toy(1985) 模型依然是关于 BDT 模型的启发性读物. 对于交叉货币资产及其相关讨论可以参看 Hull(2003). Wilmott(2000) 对于学习本节有关技术的深入应用非常有用.

## 习　题

1. 观察下面无违约的贴现债券价格 $B(t,T_i)$, 其中时间单位为年:

$$B(0,1)=95, B(0,2)=93, B(0,3)=91, B(0,4)=89. \tag{140}$$

假设这些价格是无套利的. 此外, 还已知如下的上限–下限波动率 (cap-floor volatilities) 为

$$\sigma(0,1)=0.20, \sigma(0,2)=0.25, \sigma(0,3)=0.20, \sigma(0,4)=0.18, \tag{141}$$

其中 $\sigma(t,T_i)$ 是 $T_i$ 时观测到的 Libor 利率 $L_{T_i}$ 的 (常数) 波动率, 区间长度为 1 年.

(a) 利用 Black-Derman-Toy 模型, 校准这些数据的二叉树.

(b) 假设一个债券看涨期权有如下特点: 标的 $B(2,4)$ 是两年期债券, 到期日是 $T=2$, 交割价是 $K_B=93$. BDT 树是无套利 Libor 动态方程的很好近似. $B(2,4)$ 的未来价格是多少?

(c) 利用 BDT 方法计算这个看涨期权的无套利价格.

2. 已知欧元/美元汇率 $e_t$ 服从现实世界的动态方程:

$$\mathrm{d}e_t=\mu\mathrm{d}t+0.15e_t\mathrm{d}W_t. \tag{142}$$

汇率当前值是 $e_0=1.101\ 5$. 已知 1 年期 USD 贴现债券的价格是

$$B(t,t+1)^{US}=98.93, \tag{143}$$

而相应的欧元标的债券价格是

$$B(t, t+1)^{EU} = 98.73. \tag{144}$$

这两个价格都是无套利的而且不存在信用风险.

(a) 在 $t$ 时两种货币的 1 年 Libor 期利率是多少?

(b) 连续复利利率 $r_t^{US}, r_t^{EUR}$ 是多少?

(c) 写出 $e_t$ 的无套利动态方程. 特别地说明我们需要的是利用连续复利还是 Libor 利率.

(d) 是否存在利用 Libor 利率的连续动态方程?

3. 再次考虑前一个问题给出的数据.

(a) 利用 $\Delta$=1 年来离散化系统.

(b) 创造 5 个标准正态随机数集合, 每个集合含 5 个随机数. 如何知道这 5 条路径是套利的?

(c) 利用这些路径计算下面期权的价值. 交割价是 0.95, 期限是 3 年而且是欧式期权.

4. 假设已知比索–美元汇率是 1 美元比 3.75 比索. 墨西哥比索的年波动率是 20%. 墨西哥利率是 8%, 而美国利率是 3%. 需要为标的为墨西哥比索的美元期权定价. 期权是欧式的, 期限是 270 天. 已知所有过程都是几何的.

(a) 利用标准 Monte Carlo 模型给期权定价. 选择序列的数目、近似时间区间的长度和 Monte Carlo 使用中的其他参数.

(b) 假设墨西哥的外汇储备服从几何 SDE, 年波动率是 10%, 年漂移系数是 5%. 储备金现值是 7 百万 USD. 如果储备金降至 6 百万 USD 以下, 将会出现百分之一的贬值. 这个信息对于期权定价重要吗? 请作解释.

(c) 利用重要性抽样法重新定价期权. 假设定价考虑要贬值的风险.

# 第 13 章　固定收益工具工程框架

## 13.1　引　　言

本章将扩展关于互换类型金融工具的讨论，并且给出固定收益证券的定价框架，这个简单的框架涉及期限结构模型. 除此之外，本章还将介绍一些正逐渐成为行业基准的模型.

模拟短期利率是近期固定收益证券定价和风险管理中最常用的方法，1992 年发表的 Heath-Jarrow-Merton(HJM) 方法使得多因素期限结构模型的无套利定价模型变得可能，但市场实际上仍继续使用短期模型. 然而现在，情况正在发生改变，远期 Libor 模型和 Brace-Gatarek-Musiela(BGM) 模型正逐渐成为定价和风险管理的市场标准.

本章将以互换市场和互换衍生物市场为背景，从实际应用的观点来考虑问题. 我们感兴趣的是提供一个用于分析互换和互换衍生物机制的框架，在这个框架中，可以将互换分解为一些更简单的工具，并且能够利用互换及互换衍生物合成更复杂的工具. 以这个框架为基础，可以很自然地建立起近期提出的固定收益模型.

我们先来回顾一下第 5 章中关于互换的一些基本原理. 首先，几乎所有的互换都被设计为初始价值为 0，这是现代互换型 "利差工具" 的一个特点；其次，互换利差或互换利率使得互换的初始价值为 0；再次，互换不止一个交割日，这意味着，不论互换利率或互换利差的价值是多少，它们最终都是一些期限更短的浮动利率或利差的某种加权平均. 这不仅将一些简单的套利条件加于相关市场利率上，而且通过在互换中加入期权，还可以为我们提供一种有关这些利率平均值波动率的交易方法. 又由于互换是流动的，因此它们是互换期权的很好标的物，这样互换期权就与利率的波动率联系起来了. 这种结构对理解和设计诸如固定期限互换 (CMS) 这样更复杂的互换产品很有帮助. CMS 是我们用来说明远期 Libor 模型优点的一个例子.

最后，本章将进一步利用得到的框架来阐明测度变换方法的优点，并通过在各种 T 远期测度之间的转换，来说明怎样计算凸性效应.

本章中的大多数讨论先以三期互换为例，然后将结果一般化. 这是因为少量的现金流更易于操作和理解. 接下来，我们将给出固定收益工具更具技术性的框架，最终这些框架将演变成为远期 Libor 模型. 在我们的框架中，使用 Girsanov 型转换

的测度变换作为金融工程的基本工具而出现. 本章还将讨论在远期 Libor 模型的模拟中怎样利用测度变换来进行实际定价, 并将这些工具应用到 CMS 互换中, 传统工具在 CMS 互换的定价中显得相当困难.

## 13.2　互 换 框 架

我们研究的对象是远期固定支付利率互换和它的 "即期" 等价互换. 它们在以下意义下是标准产品, 即这些产品是预先设计好的且同质. 它们可以流动、询价差较窄, 并且每个市场参加者都熟悉它们的属性以及相关惯例.

为了简化讨论, 我们假设互换的期限是 3 期, 如图 13-1 所示, 考虑到本章后面一些更复杂的方法将沿用前面介绍过的互换参数, 所以在这里有必要重复一下这些相关的参数.

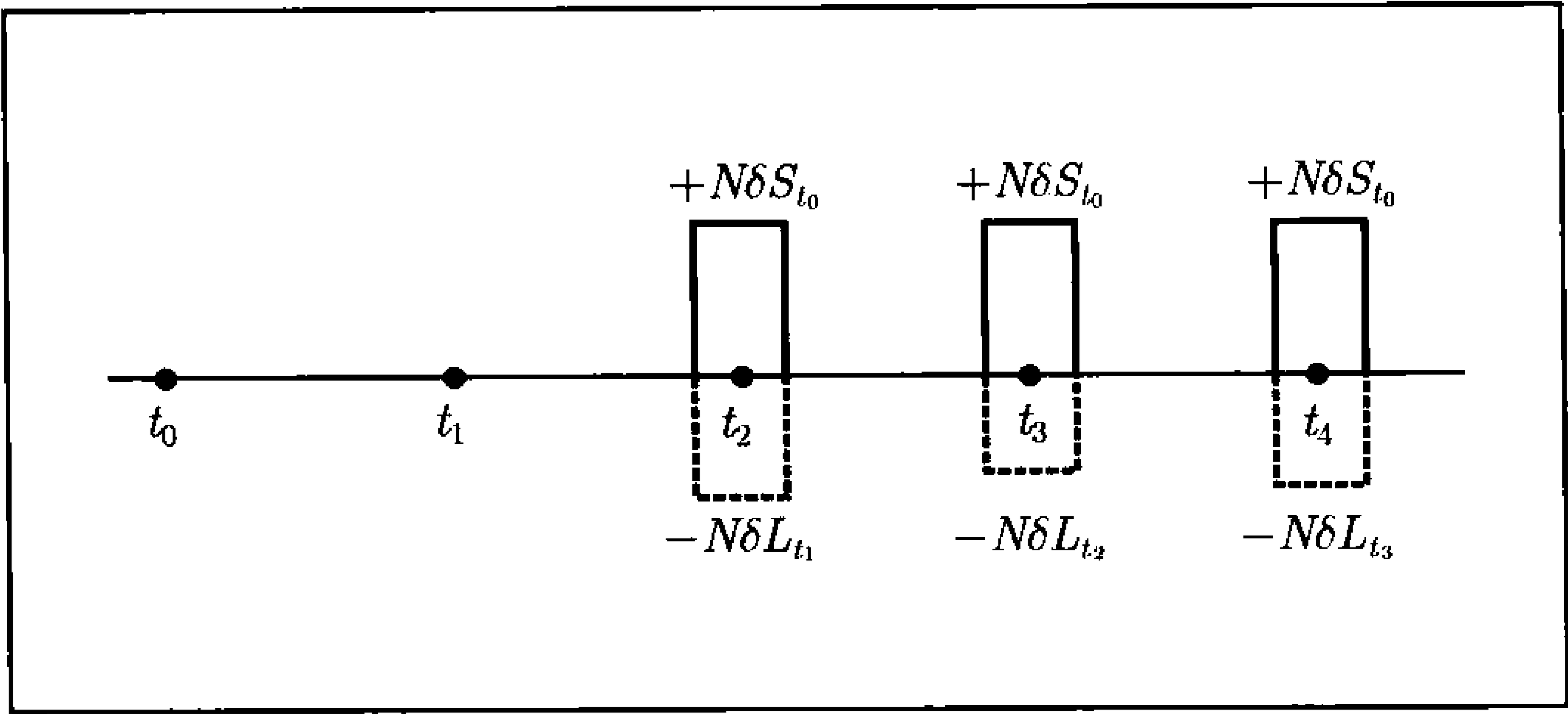



图　13-1

(1) 名义本金为 $N$, 标的 Libor 利率的期限是 $\delta$, 它表示一个日历年的百分比, 和通常一样, 如果一年用 1 表示, 则对于 3 个月 Libor, $\delta$ 等于 1/4.

(2) 互换的有效期是 3 期, 在时间 $T=t_4$ 互换结束, 签订互换合约的时间是 $t_0$, 但是交换起始于时间 $t_1$, 因此我们使用远期互换这个词.[①]

(3) 时间 $\{t_1, t_2, t_3\}$ 是**重置日期**, 在这些时间点上决定相关的 Libor 利率 $L_{t_1}, L_{t_2}$, $L_{t_3}$,[②]并且它们之间的间隔是 $\delta$.

(4) 时间 $\{t_2, t_3, t_4\}$ 是**结算日期**, 每个 $t_{i+1}$, 由 Libor 利率 $L_{t_1}, L_{t_2}, L_{t_3}$ 决定的浮动现金流 $\delta N L_{t_i}$ 用来交换固定现金流 $\delta N s_{t_0}$. 在这种结构中, 从互换合约的签订到互换开始这段时间, 也就是 $t_1-t_0$, 并不要求等于 $\delta$, 但是, 令其等于 $\delta$ 会使我们的讨论更方便.

① 一个即期互换的情形, 我们可以看到互换开始于 $t_0$, 交割三次.

② 也就是由某些客观的和先前定义的权威机构, 比如说英国银行协会 (BBA) 决定.

我们的目的是提供一个系统的框架, 使得在这个框架中能够有效地对这种互换以及基于它们构造的各种工具进行定价和风险管理.

互换是固定收益模型中的一个主要组成部分. 除此之外, 还需要另外两种工具. 同样我们也是通过一个简单的例子来引入它们. 如图 13-2, 我们给出的是三种无违约风险贴现债券的支付图, 在 $t_0$ 支付债券的价格 $B(t_0, T_i)$, 然后在到期日 $T = T_i$ 得到 1 美元同样的货币. 假定这些债券是无违约风险的, 则 $t_i$ 时的回报是确定的, 并且 $B(t_0, T_i)$ 可以视为 $t_i$ 时 1 美元的现值. 这意味着这些债券实际上就是贴现因子, 或用市场的语言来说: $t_i$ 时的贴现. 注意, 由于

$$T_1 < T_2 < T_3 < T_4, \tag{1}$$

所以不论收益率曲线的斜率如何,[①]债券的价格必须满足

$$B(t_0, T_1) > B(t_0, T_2) > B(t_0, T_3) > B(t_0, T_4). \tag{2}$$

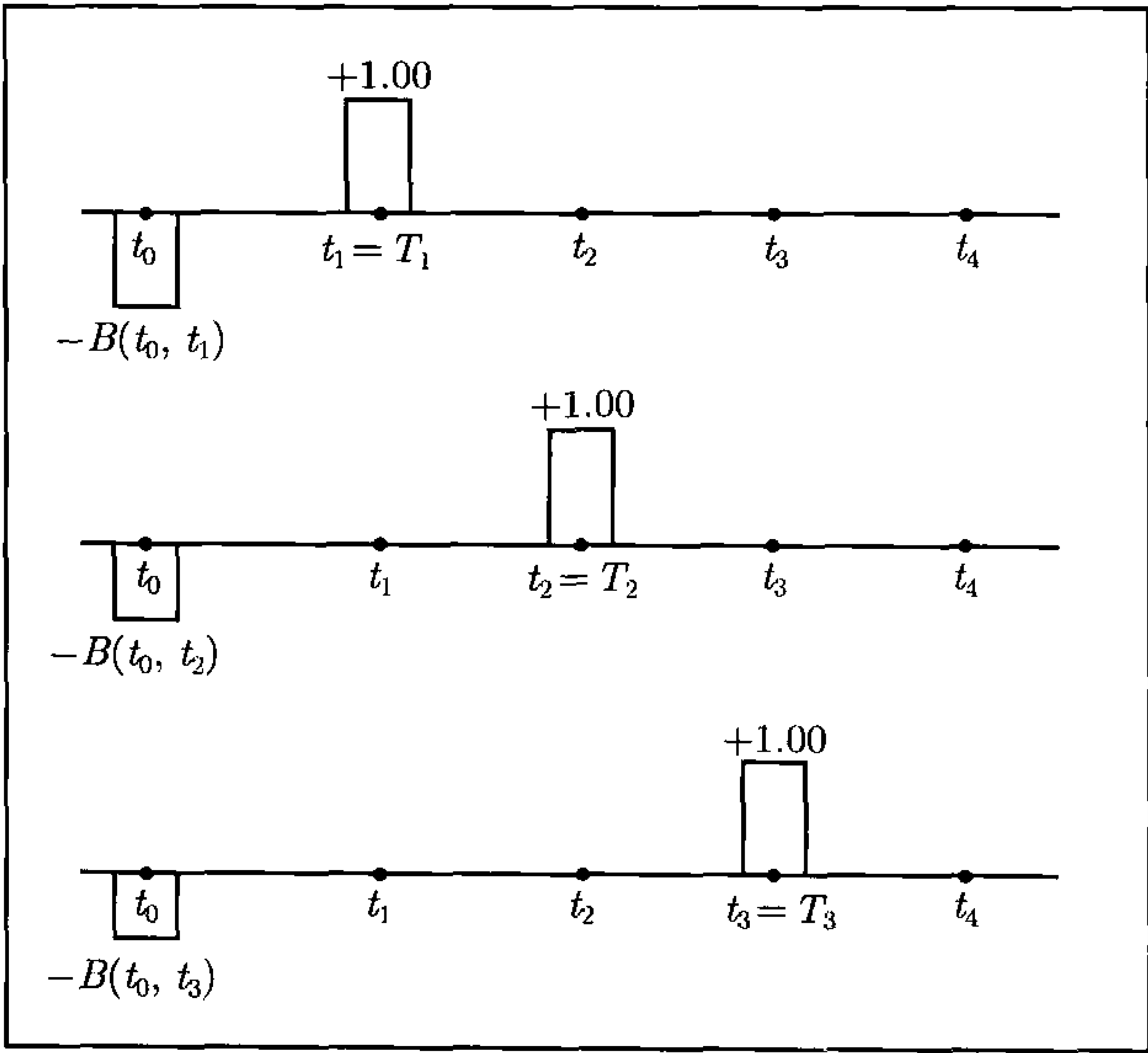



图 13-2

这些价格可以作为贴现因子来计算各种发生在未来交割时刻 $t_i$ 的现金流的现值, 因此, 它们在一系列互换的交割中很有用, 并成为我们框架中第二个主要组成部分.

固定收益框架的第三个组成部分如图 13-3 所示, 在这里, 我们给出的是三个后付 FRA 的现金流. 这些 FRA 分别为 $t_1 \times t_2, t_2 \times t_3, t_3 \times t_4$. 对于每一个 FRA 来

① 正如前面所看到的, 如果我们通过卖空一个长期债券来为一个短期债券的多头融资, 那么资金将不够用.

说, 浮动 (随机) 的支付用来交换一个已知 (确定) 的支付, FRA 在 $t_{i+1}$ 时的净现金流为

$$[L_{t_i} - F(t_0, t_i)]N\delta. \tag{3}$$

这里 $F(t_0, t_i)$ 是一个假想在 $t_0$ 时签订远期贷款和约的远期利率, 远期贷款在 $t_i$ 时生效, 并在 $t_{i+1} = t_i + \delta$ 时偿还贷款. 我们应该注意到, 这些固定支付并不一样. 尽管所有的 FRA 利率在 $t_0$ 时已知, 但是, 一般而言, 它们并不相等, 也不等于互换中固定一支的 $\delta N s_{t_0}$.

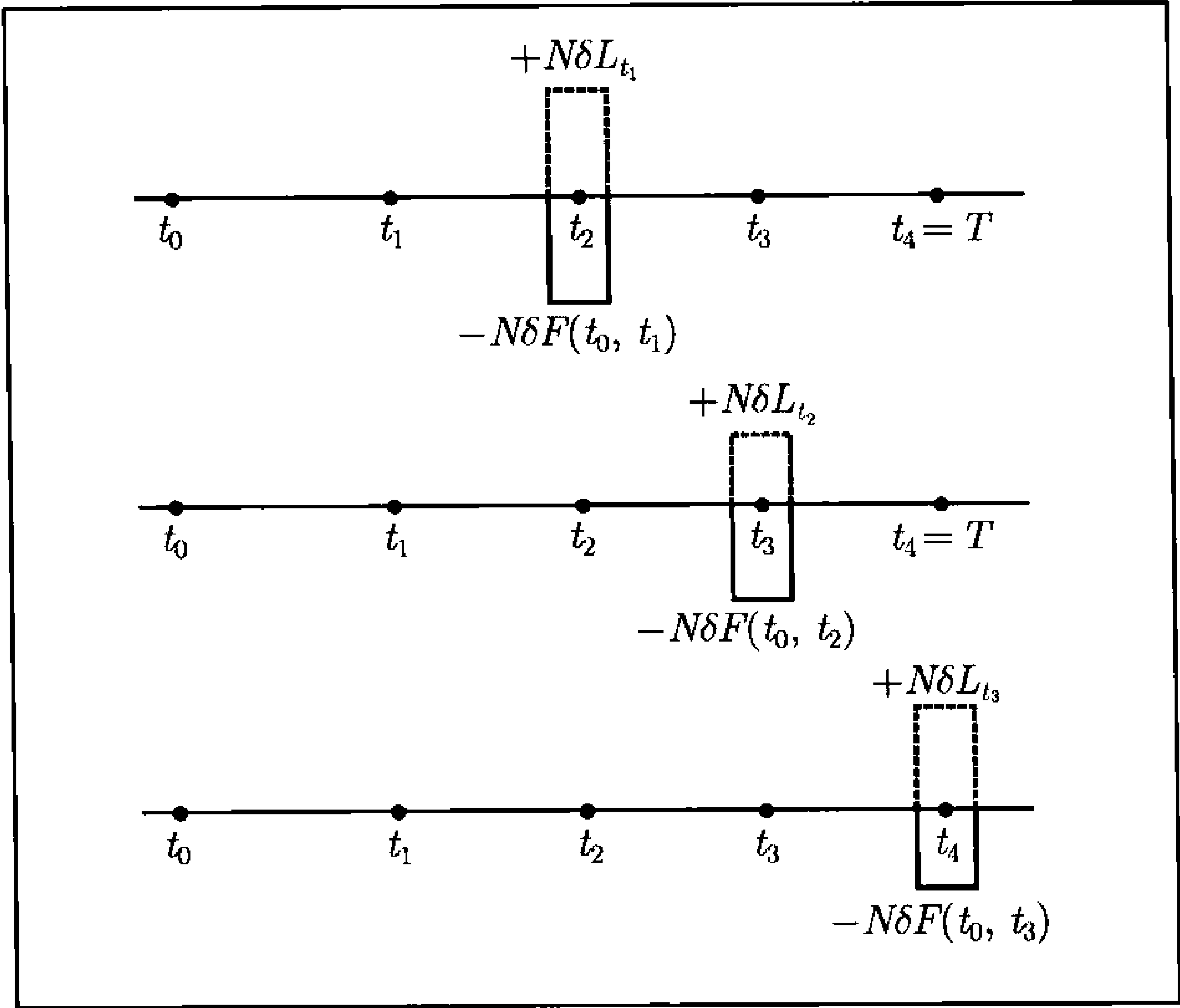



图 13-3

现在可以利用这个框架导出一些重要结果, 并将其应用到一般的金融工程中.

### 13.2.1 现金流的等价性

本章讨论的第一个金融工程原理与现金流的可观察等价性有关. 如图 13-3 所示, 这里有一系列的浮动现金流:

$$\{N\delta L_{t_1}, N\delta L_{t_2}, N\delta L_{t_3}\}, \tag{4}$$

并且在给定观察到的流动性价格的条件下, 市场愿意用这些随机的现金流交换已知 (固定) 的现金流:

$$\{N\delta F(t_0, t_1), N\delta F(t_0, t_2), N\delta F(t_0, t_3)\}. \tag{5}$$

根据这一点, 如果这些 FRA 在时间 $t_0$ 是流动的, 则 (5) 中这些已知的现金流序列就被市场认为是用来交换未知的浮动支付流 (4) 的正确选择. 如果我们这时考

虑如图 13-1 所示的互换现金流, 我们会发现这正是 (4) 中的这些浮动现金流被用来交换互换中已知且固定的那一支

$$\{N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}\}. \tag{6}$$

不但如此, 这些现金流的交割日也一样. 在这两个交换中, 任何一方都不需要在 $t_0$ 时进行初始支付, 所以我们可以在 $t_0$ 时刻将这两个交换结合起来考虑, 得到如下的结果.

市场愿意在时间 $t_0$ 没有任何初始补偿的情况下, 用固定、已知的现金流

$$\{N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}\} \tag{7}$$

交换可变的已知现金流

$$\{N\delta F(t_0,t_1), N\delta F(t_0,t_2), N\delta F(t_0,t_3)\}. \tag{8}$$

这一点很重要, 它意味着这两列现金流在 $t_0$ 时的价值相同, 否则, 一方就会要求得到一个初始支付. 假定现金流在 $t_0$ 时已知, 由它们的等价性可以得到一个用于定价的方程, 读者可以在下面内容中看到, 那里将使用远期 Libor 模型进一步讨论.

### 13.2.2 互换的定价

我们已经决定了两列在没有附加费用下市场愿意交换的已知现金流. 利用这些信息, 可以计算出这两列现金流 $t_0$ 时的价值. 为了得到这些价值, 我们要用到框架中的第二个成分, 也就是如图 13-2 所示的贴现债券价格.

假设无套利价格为 $B(t_0,t_i), i=1,2,3,4$ 的纯贴现债券可在市场中活跃地交易, 这样我们就能够利用 $\{B(t_0,t_2), B(t_0,t_3), B(t_0,t_4)\}$ 来分别确定在时间 $t_2$, $t_3$ 和 $t_4$ 的现金流价值①. 事实上, 将每个现金流乘以交割日对应的贴现因子, 然后求和就得到了现金流序列

$$\{N\delta F(t_0,t_1), N\delta F(t_0,t_2), N\delta F(t_0,t_3)\} \tag{9}$$

在 $t_0$ 时的价值. 用无违约风险贴现债券的价格作为贴现因子, 得到 FRA 的固定现金流的现值为

$$\begin{aligned}&B(t_0,t_2)N\delta F(t_0,t_1) + B(t_0,t_3)N\delta F(t_0,t_2) + B(t_0,t_4)N\delta F(t_0,t_3)\\ &= [B(t_0,t_2)F(t_0,t_1) + B(t_0,t_3)F(t_0,t_2) + B(t_0,t_4)F(t_0,t_3)]N\delta.\end{aligned} \tag{10}$$

类似地, 可以计算互换的固定现金流在 $t_0$ 时的价值

$$\begin{aligned}&B(t_0,t_2)N\delta_{s_{t_0}} + B(t_0,t_3)N\delta_{s_{t_0}} + B(t_0,t_4)\delta N_{s_{t_0}}\\ &= [B(t_0,t_2) + B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)]\delta N_{s_{t_0}}.\end{aligned} \tag{11}$$

① 我们利用一个无违约风险折现债券来计算一个私有方的现金流, 这个事实就暗示我们提取所有的对方风险和信用风险.

根据前面的结果, 这两个现金流的价值必须相等

$$\begin{aligned}&[B(t_0,t_2)F(t_0,t_1)+B(t_0,t_3)F(t_0,t_2)+B(t_0,t_4)F(t_0,t_3)]N\delta\\=&[B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)]\delta N_{s_{t_0}}.\end{aligned}\tag{12}$$

这个等式至少有两点重要含义: 第一, 它暗示了互换的价值在 $t_0$ 时为 0; 第二, 这个等式可以作为解一个未知量的*方程*. 实际上, 互换的定价意味着确定满足这个方程的 $s_{t_0}$ 值, 将 $s_{t_0}$ 作为未知的, 我们可以整理等式 (12), 化简后得到

$$s_{t_0}=\frac{B(t_0,t_2)F(t_0,t_1)+B(t_0,t_3)F(t_0,t_2)+B(t_0,t_4)F(t_0,t_3)}{B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)}.\tag{13}$$

这个定价公式可以很容易从 3 期的互换扩展到一个从时间 $t_2$ 开始的一共 $n$ 次支付的普通 (远期) 互换, 这时我们有

$$s_{t_0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}B(t_0,t_{i+1})F(t_0,t_i)}{\sum_{i=1}^{n}B(t_0,t_{i+1})}.\tag{14}$$

这是一个将本章正在使用的固定收益模型中的三个重要成分联系起来的合约公式.

#### 互换利率的解释

(远期) 互换无套利价格公式有一个很好的解释, 简单起见, 我们回到 3 期的情况, 将等式 (13) 改写成

$$\begin{aligned}s_{t_0}=&\frac{B(t_0,t_2)}{[B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)]}F(t_0,t_1)\\&+\frac{B(t_0,t_3)}{[B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)]}F(t_0,t_2)\qquad(15)\\&+\frac{B(t_0,t_4)}{[B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)]}F(t_0,t_3).\qquad(16)\end{aligned}$$

根据此表达式, 我们可以看出 “正确” 的互换利率是在互换生命过程中后付 FRA 利率的加权平均

$$s_{t_0}=\omega_1F(t_0,t_1)+\omega_2F(t_0,t_2)+\omega_3F(t_0,t_3).\tag{17}$$

权重由

$$\omega_i=\frac{B(t_0,t_{i+1})}{[B(t_0,t_2)+B(t_0,t_3)+B(t_0,t_4)]}\tag{18}$$

给出, 并且权重之和为 1:

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=1.\tag{19}$$

同样, 它对于一般的 $n$ 次支付的互换也成立:

$$s_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i F(t_0, t_i), \tag{20}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1. \tag{21}$$

所以, (远期) 互换利率是后付 FRA 利率的平均. 我们强调的是, 只要 FRA 是后付的, 这个结论就正确. 另一方面, 还有所谓的后付 Libor FRA, 此时要进行凸性调整后上述结论才成立.[①]

正如第 4 章和第 12 章中提到的, 权重 $\{w_i\}$ 从纯贴现债券得到, 而这些债券的价格本身就是远期利率的函数:

$$B(t_0, t_i) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{i-1}(1 + \delta F(t_0, t_j))}. \tag{22}$$

根据这些公式, 我们框架中的三个重要成分——互换市场、FRA 市场、债券市场, 通过远期利率的非线性函数互相联系起来了. 在这些公式中远期利率所扮演的重要角色表明, 获得后面这些市场远期利率的无套利机制, 是对互换衍生物进行定价所必需的, 而远期 Libor 模型正好做到了这点. 因为这个模型是在符合市场机制的条件下建立的, 并且它也是切实可行的.

但是, 在我们更进一步讨论一些概念之前, 最好来看一个例子. 在实际中, 互换市场和 FRA 市场是流动的, 做市商给出相关利率的报价, 但在实际的债券市场中, 纯贴现债券却不是流动的, 甚至可能不存在.[②] 在下面这个例子中, 我们假设可以得到所有想要的报价, 即使这样, 还是会存在着一些重要的技术性问题.

**例**

*假设我们观察到下面的后付 FRA 报价:*

| 期限 | 买价/卖价 |
|---|---|
| 0 × 6 | 4.05−4.07 |
| 6 × 12 | 4.15−4.17 |
| 12 × 18 | 4.32−4.34 |
| 18 × 24 | 4.50−4.54 |

① 我们重复术语的区别. 其中一个工具如果是*置后支付*, 另一个工具是 Libor 置后. 这里, 交割日 $t_i$ 的 Libor 用来决定时间 $t_i$ 的现金流. 后付的 FRA 使用的则是前一个交割日 $t_{i-1}$ 的 Libor.

② 在美国, 与这些贴现债券最接近的是剥离国库券. 它们是从现存的美国国库券现金流中剥离出来的, 但是他们并不具有很强的流动性, 并且由于各种原因, 它们的市场报价一般不能用来代替 $B(t_0, t_i)$.

同时观察到的还有国库券的价格:

| 成熟期 | 买价/卖价 |
|---|---|
| 12 个月 | 96.00–96.02 |
| 18 个月 | 93.96–93.99 |
| 24 个月 | 91.88–91.92 |

我们可以问两个问题: 第一, 这些观察到的价格是否为无套利价格, 从而可用来获得无套利互换利率? 第二, 如果它们是无套利价格, 那么 6 个月后开始, 24 个月后结束的远期互换的隐含远期利率是多少?

第一个问题的答案可以用下面的无套利方程来验证, 按照市场的惯例, 记贴现债券的面值为 100 美元, 则

$$B(t_0, t_i) = \frac{100}{\prod_{j=0}^{j-1}(1+\delta F(t_0, t_j))}, \tag{23}$$

在这个例子中 $\delta$ 的值为 1/2. 将前面观察到的远期利率值代入 (23), 我们就能够发现给出的贴现债券的值正好满足方程. 例如, 对于 $B(0,2)^{ask}$, 我们有

$$B(0,2)^{ask} = \frac{100}{(1+0.5(0.0405))(1+0.5(0.0415))} = 96.02. \tag{24}$$

对于其他的贴现债券的价格也满足相应的方程, 这意味着我们观察到的数据是无套利的, 并且可以用于计算上面提到的远期互换的无套利利率.

将数据代入下面的式子

$$s_{t_0}^{ask} = \omega_1^{ask} F(t_0, t_1)^{ask} + \omega_2^{ask} F(t_0, t_2)^{ask} + \omega_3^{ask} F(t_0, t_3)^{ask}, \tag{25}$$

$$\omega_i^{ask} = \frac{B(t_0, t_{i+1})^{ask}}{[B(t_0, t_2)^{ask} + B(t_0, t_3)^{ask} + B(t_0, t_4)^{ask}]}, \tag{26}$$

我们得到

$$\omega_1^{ask} = \frac{96.02}{[96.02+93.99+91.92]} = 0.341, \tag{27}$$

$$\omega_2^{ask} = \frac{93.99}{[96.02+93.99+91.92]} = 0.333, \tag{28}$$

$$\omega_3^{ask} = \frac{91.92}{[96.02+93.99+91.92]} = 0.326 \tag{29}$$

则互换利率的要价是

$$s_{t_0}^{ask} = (0.341)4.17 + (0.333)4.34 + (0.326)4.54 = 4.34. \tag{30}$$

类似地, 我们可以计算出互换的竞价利率

$$s_{t_0}^{bid} = (0.341)4.15 + (0.333)4.32 + (0.326)4.50 = 4.32. \tag{31}$$

值得注意的是权重近似相等.

现在进一步考虑本节中提出的固定收益框架在金融工程中的应用.

### 13.2.3 一些应用

首先, 我们考虑在新的框架内合成互换. 目的是通过将前面的公式进行变形得到另外一种互换合成方法. 在第 5 章中, 我们讨论过一种复制互换的方法. 我们还证明了, 通过卖空某种附息债券并同时买入一定数量的浮动利率债券就能够合成出互换, 这是经典的互换合成方法, 它将作为下面讨论的起点.

1. 另一个公式

我们已经导出了一个关于 (远期) 互换利率 $s_{t_0}$ 的无套利值的公式

$$s_{t_0} = \frac{[B(t_0,t_2)F(t_0,t_1) + B(t_0,t_3)F(t_0,t_2) + B(t_0,t_4)F(t_0,t_3)]}{[B(t_0,t_2) + B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)]}, \tag{32}$$

或者一般形式

$$s_{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_{i+1})F(t_0,t_i)}{\sum_{i=1}^{n} B(t_0,t_{i+1})}. \tag{33}$$

现在我们修改这个公式, 就会得到关于互换利率的另一种解释. 我们首先讨论在第 4 章中得到的有关贴现债券价格 $B(t_0,t_i)$ 与远期利率 $F(t_0,t_i)$ 的无套利关系:

$$1 + \delta F(t_0,t_i) = \frac{B(t_0,t_i)}{B(t_0,t_{i+1})}. \tag{34}$$

重新整理出 $F(t_0,t_i)$ 为

$$F(t_0,t_i) = \frac{1}{\delta}\left[\frac{B(t_0,t_i)}{B(t_0,t_{i+1})} - 1\right], \tag{35}$$

将这个表达式代入方程 (32) 得到

$$s_{t_0} = \frac{1}{\delta[B(t_0,t_2) + B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)]}\left\{B(t_0,t_2)\left[\frac{B(t_0,t_1)}{B(t_0,t_2)} - 1\right]\right. \tag{36}$$

$$\left. + B(t_0,t_3)\left[\frac{B(t_0,t_2)}{B(t_0,t_3)} - 1\right] + B(t_0,t_4)\left[\frac{B(t_0,t_3)}{B(t_0,t_4)} - 1\right]\right\}, \tag{37}$$

对等式右边的公共项 $B(t_0,t_i)$ 化简, 得到

$$s_{t_0} = \frac{1}{\delta\sum_{i=1}^{3} B(t_0,t_{i+1})}([B(t_0,t_1) - B(t_0,t_2)] \tag{38}$$

$$+ [B(t_0,t_2) - B(t_0,t_3)] + [B(t_0,t_3) - B(t_0,t_4)])$$
$$= \frac{1}{\delta \sum_{i=1}^{3} B(t_0,t_{i+1})}[B(t_0,t_1) - B(t_0,t_4)]. \tag{39}$$

我们试着去发现这个公式的含义, 通过整理然后重新组合, 得

$$\delta_{s_{t_0}}[B(t_0,t_2) + B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)] = [B(t_0,t_1) - B(t_0,t_4)], \tag{40}$$

$$B(t_0,t_1) - [\delta_{s_{t_0}} B(t_0,t_2) + \delta_{s_{t_0}} B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)(1 + \delta_{s_{t_0}})] = 0 \tag{41}$$

等式给出两条相等的现金流, $B(t_0,t_1)$ 是在 $t_1$ 时得到 1 美元的 $t_0$ 价值, 这样, 这个头寸需要一个到期日 $t_1$ 的贴现债券的多头头寸. 其次, 等式中有 $t_2, t_3, t_4$ 时固定的利息支付$\delta s_{t_0}$, 并在 $t_4$ 时支付 1 美元的面值,[①]因此, 这个头寸是 (远期) 卖空一个到期日 $t_4$ 的息票利率为 $s_{t_0}$ 的附息债券.

总结上面的分析, 得到这个特定的远期固定收入的利率互换等价于

$$\text{远期固定收入的利率互换} = \{\text{买入 } t_1 \text{ 贴现债券, 远期卖出到期日为 } t_4 \text{的附息债券}\} \tag{42}$$

这个合成复制了远期互换的价值, 注意, 我们没有必要复制浮动现金流, 这是因为, 在一个远期互换中, 互换现金流与未来的存贷款相联系, 而这个存贷款的利率在未来决定, 因此, 在时间 $t_i$ 发放、$t_{i+1}$ 收回的贷款的价值是

$$100 - \frac{100(1 + L_{t_i})}{(1 + L_{t_i})} = 0. \tag{43}$$

所以, 在时间 $t_0$ 合成的互换不必复制它.

这里我们得到了一个有趣的启示, 当合成远期产品时, 加入未来的浮动利率贷款等于在代数方程中加上 0, 未来浮动利率的贷款的加减不改变现金流的估值. 这就是为什么市场更愿意在互换类型工具的结构中使用基于 Libor 的浮动支付.

2. 盯市

我们可以用同样的框架来讨论盯市, 假设初始时间是 $t_0$, 就像前面讨论过的, 市场愿意支付已知现金流

$$\{N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}, N\delta_{s_{t_0}}\}, \tag{44}$$

换取随机的现金流

$$\{N\delta L_{t_1}, N\delta L_{t_2}, N\delta L_{t_3}\}. \tag{45}$$

---

① 这些支付被贴现到现在, 这就得到了括号中相应债券的价格的表示形式.

现在, 经过一个很短但非无穷小的时间间隔 $\Delta$ 后, 就会有一个新的互换利率 $s_{t_0+\Delta}$, 这个利率在所有可能的情况下都不同于 $s_{t_0}$. 这意味着市场现在愿意支付新的已知现金流

$$\{N\delta_{s_{t_0+\Delta}}, N\delta_{s_{t_0+\Delta}}, N\delta_{s_{t_0+\Delta}}\}, \tag{46}$$

换取同样的随机现金流

$$\{N\delta L_{t_1}, N\delta L_{t_2}, N\delta L_{t_3}\}. \tag{47}$$

这意味着, 在 $t_0$ 签署的初始互换的价值不为 0 了, 它的价值为下面的差:

$$[N\delta_{s_{t_0+\Delta}} - N\delta_{s_{t_0}}][B(t_0+\Delta, t_2) + B(t_0+\Delta, t_3) + B(t_0+\Delta, t_4)]. \tag{48}$$

这可以看成是固定*支付方*的盈利或损失. 在时间 $t_0+\Delta$, 得到的浮动支付的价值由 (48) 给出, 并且实际的浮动支付会抵消掉.[①] 我们可以将推理同样用于 FRA 利率, 计算出初始互换的盯市价值为

$$\left(N\delta\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_{it_0}F(t_0,t_i)\right] - N\delta\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_{i(t_0+\Delta)}F(t_0+\Delta,t_i)\right]\right)\sum_{i=1}^{n}B(t_0+\Delta,t_{i+1}). \tag{49}$$

这种表达形式给出固定*收入一方*的盈利和损失. 这里应该注意的是权重 $w_i$ 具有时间下标, 因为它们随时间的改变而改变. 所以, 管理一个互换账簿将非线性地依赖于远期利率的机制.[②]

## 13.3 期限结构模型

本章给出的框架刻画出了互换、债券、FRA 市场之间的联系. 现在我们来讨论前面得到的公式中隐藏的期限结构. 该公式表明, 只要给出其中*两个*市场的信息, 原则上就能够求得另一个市场的无套利价格.[③] 期限结构模型不仅仅关系到远期利率, *还包括*即期利率. 实际上, 传统的收益率曲线构建方法首先是获得即期收益率, 然后过渡到远期利率. (本章结尾部分的附录简单地给出了传统收益率曲线分析方法.)

沿用这个传统的方法, 并且注意到*即期互换*比*远期*互换更具流动性, 因此本节将 $n$ 年的*即期*互换利率表示为 $s_{t_0}^n$. 不失一般性, 可以假设互换的到期日 $n$ 取遍 $n=1,\cdots,30$, 最长期限的互换是 30 年的.[④] 我们的讨论将用即期互换利率来表述.

① 代入 (47) 式中用来替代 Libor 利率的利率的确是变化的. 但是, 我们现在估值的是互换的固定一支, 考虑将固定支付看成随机的、不确定的浮动利率的补偿. 这些随机变量保持不变.

② 这些远期利率仍然需要与后付 FRA 或远期贷款联系起来.

③ 这里假设所有到期日的标的工具都是交易活跃的, 通常并不是这种情况.

④ 互换在两年后开始交易. 一个交换的是 1 年期 Libor 的 1 年期的互换实际上等价于一个平凡的 FRA.

### 13.3.1 由互换确定远期利率

给定足够数量可观察的无套利即期互换利率 $\{s_{t_0}^n\}$ 的值, 并且利用等式

$$s_{t_0}^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B(t_0, t_{i+1}) F(t_0, t_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} B(t_0, t_{i+1})}, \tag{50}$$

和

$$\frac{B(t_0, t_i)}{B(t_0, t_{i+1})} = (1 + \delta F(t_0, t_i)), \tag{51}$$

对 $\delta = 1$ 情形, 我们可以得到所有的远期利率. 由第一组方程中解出 $B(t_0, t_i)$, 得到关于 $n$ 个远期利率的 $n$ 个方程.[①] 当 $\delta = 1/2$ 或 $\delta = 1/4$ 时, 如果互换的期限以年计, 则未知量 $F(t_0, t_i)$ 个数多于方程的个数. 在这些条件下, $t_i$ 是 1/4 的倍数而 $s_{t_0}^n$ 中的上标 $n = 1, 2, \cdots$. 这是因为互换的报价以年为间隔, 而交割通常是半年或每个季度一次. 这时需要对互换利率或建模进行某种插值, 即使在传统的收益率曲线计算中插值也是要经常用到的.

### 13.3.2 由远期利率确定 $B(t_0, t_i)$

如果从市场或 $\{s_{t_0}^n\}$ 得到了远期利率 $\{F(t_0, t_i)\}$ 和当时的 Libor 曲线, 我们可以利用公式

$$B(t_0, t_{i+1}) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{i} (1 + \delta F(t_0, t_j))} \tag{52}$$

计算相应的纯贴现债券的无套利价格. 我们可以从观察到的 $\{F(t_0, t_i)\}$ 和 $\{s_{t_0}^n\}$ 推出 $B(t_0, t_i)$ 的价值, 这个方法叫做*曲线算法*.

### 13.3.3 决定互换利率

我们也可以从相反的方向进行讨论. 给定无套利远期利率, 原则上可以使用同样的公式求出互换利率, 我们所需要做的事情是: (1) 由远期利率计算出贴现债券的价格; (2) 将这些债券的价格连同相应的远期利率代入公式

$$s_{t_0}^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B(t_0, t_{i+1}) F(t_0, t_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} B(t_0, t_{i+1})}. \tag{53}$$

对 $s_{t_0}^n$ 重复所有可能的 $n = 1, \cdots, 30$, 就得到了无套利互换曲线, 这种情况下, 我们将从即期和远期 Libor 曲线得到 (即期) 互换曲线.

---

① 记住 $F(t_0, t_0)$ 等于当时的 Libor, 它是一个平凡的远期利率.

### 13.3.4 现实中的复杂性

当然, 实际中关于远期利率、贴现债券和互换利率的情况复杂多了, 我们主要指出三点. 第一, 正如前面的几节中提到的, 互换的交易以年为间隔, 而 FRA 或欧洲美元合约是 3 个月或 6 个月期, 这意味着如果我们要从互换报价得到远期利率报价, 就必须要对 1 年期互换利率进行插值.

第二, 观察到的远期利率报价并不一定是后付 FRA 的报价, 市场中交易的 FRA 在 Libor 利率知道后就进行交割, 而并不是在相应区间的终点进行交割. 市场中产生的这些 FRA 利率与前面的公式一致. 另一方面, 某些交易商使用利率期货或更具体地说是欧洲货币期货来对冲他们手中的互换, 因为期货市场比 FRA 市场更透明, 并且具有很强的流动性. 但是从期货市场得到的远期利率在被用于本章前面所讨论的公式前必须进行凸性调整.

第三, FRA 的流动性和互换利率取决于所考虑的到期日. 正如前面提到的, FRA 在曲线的前端流动性更强, 而互换却在曲线后端更强. 这意味着, 对到期日超过 5 年的互换利率可能不能由 FRA 利率得来. 类似地, 对较短的到期日, 可能没有可观察的互换报价.

**注记**

我们要提到的另一个重要的问题是, 在实际中, Libor 利率适用的信用等级是 AA, 它隐含在 BBA Libor 的确定过程中. BBA 的组成银行通常情况下具有 AA 或 AA− 信用等级, 它们所支付的利率也反映了这一信用风险的水平, 而在一般学术上通常是把 "Libor" 视为无违约风险的贷款.

因此如果金融工程遵循上述程序, 所得到的曲线是互换曲线而不是国库券曲线或主权曲线, 这条互换曲线在国库券曲线或主权曲线的上面, 两条曲线的差就是互换利差.

## 13.4 期限结构动态机理

在本章的剩余部分, 我们将看到远期 Libor 模型是获得期限结构动态机理 (Dynamics) 的正确途径. 这种方法的基本思想是将每个远期利率的动态机理通过适当的测度变换转化为一个鞅. 按照本章各节间的联系, 一旦得到这样的动态机理, 我们就可以由它们得到其他固定收益工具的一般动态机理.

大多数有关远期 Libor 模型的结论是第 11 章中讨论的资产定价基本定理的应用, 所以我们继续使用第 11 章中的有限状态模型. 关于远期 Libor 或互换模型, 大部分是浅显易懂的, 只有一点可能理解起来有些难. 根据工具的不同, 不同远期利率的无套利动态机理可能会要求在同一个远期测度下表示出来, 这使方法变得更复

杂了. 因为它要求以递推方式对远期利率进行一系列的 Girsanov 测度变换, 否则, 单个远期利率的无套利动态机理就不能正确地表示出来了.

Girsanov 定理是一个很有用的工具, 但是想出这样一系列的测度变换并不容易. 在离散情况下, 使用离散方法构造这些测度对于理解无套利定价动态机理及其思想有很大帮助. 而这正是本章第二部分所要考虑的.

### 13.4.1 框架

我们先分析一种简单的离散情况, 然后推广到一般公式. 考虑这样一个市场, 市场中的工具可以在离散时间定价, 时间的间隔是 $\delta$:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \tag{54}$$

其中

$$t_i - t_{i-1} = \delta. \tag{55}$$

作为开始, 我们考虑前三个时间点 $t_0, t_1, t_2$, 在这个框架中, 我们考虑四种简单的固定收益证券:

- 到期日在 $t_2$ 的无违约风险的零息债券 $B(t_0, t_2)$;
- 到期日在 1 期后 $t_3$ 的无违约风险的零息债券, 它的现值为 $B(t_0, t_3)$;
- 支付离散时间简单利率 $L_{t_i}$ 的储蓄账户, 其中 $L_{t_i}$ 在时间 $t_i$ 观察到, 这样的话, 储蓄账户在 $t_2$ 时的回报是

$$R_{t_2} = (1 + \delta L_{t_0})(1 + \delta L_{t_1}), \tag{56}$$

注意从初始时刻 $t_0$ 开始观察, 且 $L_{t_1}$ 将是随机变量;

- 一个在 $t_0$ 时签订的 FRA, 合约中买方将在 $t_2$ 得到或支付固定利率 $F(t_0, t_1)$ 和浮动利率 $L_{t_i}$ 之差. 我们令这个工具的面值是 1, 并且将此远期利率简记为 $F_{t_0}$, 则最终的回报可以写成

$$(L_{t_1} - F_{t_0})\delta. \tag{57}$$

这些资产在 $t_2$ 时的回报可以按第 11 章中的方法写成下面矩阵 $D$ 的形式, 假设在每个时间点 $t_i$, 标的随机过程从每个节点出发只有两种可能的运动, 这些运动用 $u, d$ 表示, 则我们可以将 $D$ 写成:[①]

$$D = \begin{bmatrix} R_{t_2}^{uu} & R_{t_2}^{ud} & R_{t_2}^{du} & R_{t_2}^{dd} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ B_{t_2}^{uu} & B_{t_2}^{ud} & B_{t_2}^{du} & B_{t_2}^{dd} \\ \delta(F_{t_0} - L_{t_1}^{u}) & \delta(F_{t_0} - L_{t_1}^{u}) & \delta(F_{t_0} - L_{t_1}^{d}) & \delta(F_{t_0} - L_{t_1}^{d}) \end{bmatrix}, \tag{58}$$

① 这个表格可以视为二叉树中的第二层.

其中 $B_{t_2}^{ij}$ 是到期日为 $t_3$ 的贴现债券在 $t_2$ 时的价值, 这个值取决于在 $t_2$ 时的状态, 因为债券是在 1 期后 $t_3$ 到期的, 所以如果从 $t_0$ 看, 这是个随机量. 显然, 有了这个矩阵 $D$ 我们可以极大地简化记号, 在这里我们假设只有 4 个状态, 远期利率 $F(t_0,t_2)$ 简单表示为 $F_{t_0}$, $B(t_2,t_3)^{ij}$ 简记为 $B_{t_2}^{ij}$.

如果 FRA、储蓄账户以及这两个债券的价格使得套利机会不存在, 则根据资产定价的基本定理, 存在着下面的线性表示:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ B(t_0,t_2) \\ B(t_0,t_3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{t_2}^{uu} & R_{t_2}^{ud} & R_{t_2}^{du} & R_{t_2}^{dd} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ B_{t_2}^{uu} & B_{t_2}^{ud} & B_{t_2}^{du} & B_{t_2}^{dd} \\ \delta(F_{t_0}-L_{t_1}^{u}) & \delta(F_{t_0}-L_{t_1}^{u}) & \delta(F_{t_0}-L_{t_1}^{d}) & \delta(F_{t_0}-L_{t_1}^{d}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{uu} \\ Q^{ud} \\ Q^{du} \\ Q^{dd} \end{bmatrix}, \tag{59}$$

其中 $\{Q^{ij}, i,j=u,d\}$ 是 $t_2$ 时的 4 个状态价格, 在无套利条件下, 对所有状态 $i,j$, 状态价格存在且为正[①]

$$Q^{ij} > 0, \tag{60}$$

这个矩阵方程包含了以下几点思想: (1) FRA 的公平价格在初始时为 0; (2) 开始时, 将 1 美元投资于储蓄账户; (3) 债券无违约风险, 它们在 $t_2$ 和 $t_3$ 到期; 最后, $R_{t_2}^{ij}$ 表示银行账户在 $t_2$ 时的总回报. 因为 $t_i$ 时的利息在 $t_{i+1}$ 时支付, 所以可以将这些总回报表示成标的 Libor 利率的函数:

$$R_{t_2}^{uu} = R_{t_2}^{ud} = (1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1}^{u}), \tag{61}$$

$$R_{t_2}^{dd} = R_{t_2}^{du} = (1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1}^{d}). \tag{62}$$

我们现在给出 Libor 市场模型以及在这个简单框架中的测度变换方法. 这个框架可以用来方便地引出固定收益工程中所需要的绝大多数工具和概念. 其中第一个重要的概念就是我们在第 11 章中介绍的远期测度.

### 13.4.2 规范化和远期测度

为了得到 $t_2$ 和 $t_3$ 的远期测度, 我们首先从风险中性概率开始, 说明为什么风险中性概率在前面提到的固定收益环境中不是一个好的工作测度, 然后说明如何把一个风险中性概率转换为所希望的远期测度.

1. 风险中性测度的不方便之处

和通常一样, 我们将使用下面矩阵方程的第一行来定义风险中性测度 $\{\tilde{p}_{ij}\}$:

$$1 = R_{t_2}^{uu}Q^{uu} + R_{t_2}^{ud}Q^{ud} + R_{t_2}^{du}Q^{du} + R_{t_2}^{dd}Q^{dd}, \tag{63}$$

① 通常, 我们省略了状态价格的时间上标, 因为很显然, 现在处理的是 $t_2$ 时的支付.

重新标号为

$$\tilde{p}_{uu} = R_{t_2}^{uu} Q^{uu}, \tag{64}$$

$$\tilde{p}_{ud} = R_{t_2}^{ud} Q^{ud}, \tag{65}$$

$$\tilde{p}_{du} = R_{t_2}^{du} Q^{du}, \tag{66}$$

$$\tilde{p}_{dd} = R_{t_2}^{dd} Q^{dd}. \tag{67}$$

于是 $\tilde{p}_{ij}$ 具有概率分布的特征, 并可以用于相关的鞅等式.

从第 11 章中我们知道, 在每种资产的价格都是无套利的条件下 $\{Q^{ij}, i, j = u, d\}$ 存在, 并且都是正数, 而且 $\tilde{p}_{ij}$ 就是风险中性概率. 于是利用方程 (59) 中的最后一行可以写出下面的等式:

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\delta(F_{t_0} - L_{t_1}^u)\frac{1}{R_{t_2}^{uu}}\right]\tilde{p}_{uu} + \left[\delta(F_{t_0} - L_{t_1}^u)\frac{1}{R_{t_2}^{ud}}\right]\tilde{p}_{ud} + \left[\delta(F_{t_0} - L_{t_1}^d)\frac{1}{R_{t_2}^{du}}\right]\tilde{p}_{du} \\ &+ \left[\delta(F_{t_0} - L_{t_1}^d)\frac{1}{R_{t_2}^{dd}}\right]\tilde{p}_{dd}, \end{aligned} \tag{68}$$

这里, $(F_{t_0} - L_{t_1}^i), i = u, d$ 被 "贴现" 以使得 $Q^{ij}$ 可以替换为 $\tilde{p}_{ij}$. 注意, 在这个等式中, $F_{t_0}$ 是在 $t_0$ 时决定的, 因此可以作为因子提出来, 分组并整理得到

$$F_{t_0} = \frac{\left(\left[L_{t_1}^u \frac{1}{R_{t_2}^{uu}}\right]\tilde{p}_{uu} + \left[L_{t_1}^u \frac{1}{R_{t_2}^{ud}}\right]\tilde{p}_{ud} + \left[L_{t_1}^d \frac{1}{R_{t_2}^{du}}\right]\tilde{p}_{du} + \left[L_{t_1}^d \frac{1}{R_{t_2}^{dd}}\right]\tilde{p}_{dd}\right)}{\left(\frac{1}{R_{t_2}^{uu}}\tilde{p}_{uu} + \frac{1}{R_{t_2}^{ud}}\tilde{p}_{ud} + \frac{1}{R_{t_2}^{du}}\tilde{p}_{du} + \frac{1}{R_{t_2}^{dd}}\tilde{p}_{dd}\right)}, \tag{69}$$

上式可以用期望的形式写为

$$F_{t_0} = \frac{1}{E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{R_{t_2}}\right]} E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{L_{t_1}}{R_{t_2}}\right]. \tag{70}$$

根据最后一个等式, 如果 $R_{t_2}$ 是一个随机变量, 而且与 $L_{t_1}$ 并不独立,[①] 则它就不能够从条件期望里面提出来, 换句话说, 对于一般的 $t$,

$$F(t, t_i) \neq E_t^{\tilde{P}}[L_{t_i}], \quad t < t_i. \tag{71}$$

也就是说, 在风险中性测度 $\tilde{P}$ 下, $t_i$ 时的远期利率不是远期 Libor 利率 $L_{t_i}$ 的无偏"估计". 实际上, 不难看出 $E_t^{\tilde{P}}[L_{t_i}]$ 是一个欧洲美元在时间 $t$ 决定的期货利率, 这个 "偏差" 是由于凸性调整而产生的.

① 尽管我们知道一般情况不是这样, 因为短期投资于欧元货币市场是有回报的.

另一种说法是 $F_t$ 不是一个关于风险中性测度 $\tilde{P}$ 的鞅, 代表 $F_t$ 动态机理的随机差分方程一般具有一个趋向:

$$F_{t+\Delta} - F_t = a(F_t, t)F_t\Delta + \sigma(F_t, t)F_t[W_{t+\Delta} - W_t], \tag{72}$$

其中 $a(F_t, t)$ 不为 0, 表示在测度 $\tilde{P}$ 下远期利率的期望变化率.

由于 $F_t$ 不是关于 $\tilde{P}$ 的鞅, 这使得风险中性测度在固定收益的定价和风险管理中使用起来很不方便. 在使用 (72) 之前, 我们需要标校正 (calibrate)$a(F_t, t)$, 这首先需要得到漂移项在概率测度 $\tilde{P}$ 下的函数表示形式. 通过使用连续复合远期瞬时利率, HJM 的原始文章提出了关于这些漂移项的函数形式. 但这种方法需要构造一个环境, 它与 Libor 驱动的市场以及这里用到的精算利率 $L_{t_i}$ 非常不同[①].

2. **远期测度**

现在我们利用无违约风险的到期日为 $t_2$ 的零息债券来给考虑的状态定义一组新的测度. 首先考虑最简单的情形, 利用方程组 (59) 中的第二行:

$$B(t_0, t_2) = Q^{uu} + Q^{ud} + Q^{du} + Q^{dd}, \tag{73}$$

然后用 $B(t_0, t_2)$ 除式中每一项, 我们得到一个新的测度, 称为远期 $t_2$ 测度 $\tilde{P}^{t_2}$

$$1 = \tilde{p}^{t_2}_{uu} + \tilde{p}^{t_2}_{ud} + \tilde{p}^{t_2}_{du} + \tilde{p}^{t_2}_{dd}, \tag{74}$$

其中每个状态的概率是由相应的 $Q^{ij}$ 除以债券在 $t_0$ 时的价格来获得:

$$\tilde{p}^{t_2}_{ij} = \frac{Q^{ij}}{B(t_0, t_2)}. \tag{75}$$

在固定收益模型中, 远期测度的上标 $t_2$ 很重要, 因为对于别的远期利率我们需要其他的远期测度, 而这个上标是标记测度的好方法. 对某些工具, 这些测度需要进行相应的转换.

正如第 11 章中所讨论的, 利用 $t_2$ 远期测度, 我们可以对任何在 $t_2$ 时支付为 $C^{ij}_{t_2}$ 的资产进行定价

$$C_{t_0} = [B(t_0, t_2)C^{uu}_{t_2}]\tilde{p}^{t_2}_{uu} + [B(t_0, t_2)C^{ud}_{t_2}]\tilde{p}^{t_2}_{ud} + [B(t_0, t_2)C^{du}_{t_2}]\tilde{p}^{t_2}_{du} + [B(t_0, t_2)C^{dd}_{t_2}]\tilde{p}^{t_2}_{dd}. \tag{76}$$

这意味着, 对任何一种在 $T$ 交割的资产, 在没有其他的支付时, 它的一般定价方程为

$$C_t = B(t, T)E^{\tilde{P}^T}_t[C_T], \tag{77}$$

① 进一步的问题是使用连续复利数值计算不稳定.

其中 $\tilde{P}^T$ 是 $T$ 远期测度, $C_T$ 是时间 $T$ 的支付. 根据这个等式, 下面的比值

$$Z_t = \frac{C_t}{B(t,T)}, \tag{78}$$

是关于测度 $\tilde{P}^T$ 的一个鞅. 实际上, 将 $B(t,T)$ 作为时间 $T$ 的贴现因子从而小于 1, $Z_t$ 事实上就是 $C_t$ 的 $T$ 远期价值. 这意味着远期测度运算可以用鞅来表示, 而后者是用 $T$ 时的美元来度量的. 如果我们像早些时候关于风险中性测度那样, 在 FRA 的定价中进行同样的变换, 那么立即就会看出远期测度 $\tilde{P}^T$ 的优越性了.

3. **远期利率的无套利 SDE**

为了得到远期利率的无套利动态机理, 我们回到方程组 (59) 的简单模型, 将方程组中的第 4 行同除以 $B(t_0,t_2)$, 重新整理得

$$\frac{F_{t_0}}{B(t_0,t_2)}[Q^{uu}+Q^{ud}+Q^{du}+Q^{dd}] = \frac{L^u_{t_1}}{B(t_0,t_2)}Q^{uu} + \frac{L^u_{t_1}}{B(t_0,t_2)}Q^{ud} + \frac{L^d_{t_1}}{B(t_0,t_2)}Q^{du} + \frac{L^d_{t_1}}{B(t_0,t_2)}Q^{dd}. \tag{79}$$

如同第 11 章中那样, 利用

$$\tilde{p}^{t_2}_{ij} = \frac{1}{B(t_0,t_2)}Q^{ij}.$$

将 $t_2$ 远期概率代入上面的 (79), 方程变为

$$F_{t_0} = [L^u_{t_1}]\tilde{p}^{t_2}_{uu} + [L^u_{t_1}]\tilde{p}^{t_2}_{ud} + [L^d_{t_1}]\tilde{p}^{t_2}_{du} + [L^d_{t_1}]\tilde{p}^{t_2}_{dd}, \tag{80}$$

推广到 $m$ 种离散状态的一般情形

$$F_{t_0} = \sum_{i=1}^{m} L^i_{t_1}\tilde{p}^{t_2}_i, \tag{81}$$

这显然是一个期望

$$F_{t_0} = E^{\tilde{P}^{t_2}}_{t_0}[L_{t_1}]. \tag{82}$$

这意味着, 在远期测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下, $[t_1,t_2]$ 区间内的远期测度是相应的 Libor 利率的无偏估计.

如果采用一般的符号 $(t,T)$, 则过程

$$F_t = F(t,T,T+\delta) \tag{83}$$

是 $(T+\delta)$ 远期测度 $\tilde{P}^{T+\delta}$ 下的鞅. 假设离散化所产生的误差很小, 它在长度为 $\Delta$ 的一个小区间上的动态机理可以被描述为[①]

$$F_{t+\Delta} - F_t = \sigma_t F_t \Delta W_t, \tag{84}$$

① 离散误差参见本章结尾的参考文献.

其中 $W_t$ 是 $\tilde{P}^{T+\delta}$ 下的 Wiener 过程, $\Delta W_t$ 是 Wiener 过程的增量:

$$\Delta W_t = W_{t+\Delta} - W_t. \tag{85}$$

这个 (近似) 方程没有漂移项, 这是因为根据套利理论, 对一般的 $t, T$, 我们有

$$1 + \delta F(t,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}. \tag{86}$$

很显然, 从第 11 章中关于规范化的论述知, 在测度 $\tilde{P}^{T+\delta}$ 以及由 $B(t,T+\delta)$ 规范化下, 等式右边的比是一个关于 $\widetilde{P}^{T+\delta}$ 的鞅, 这使得相应的远期利率也是一个鞅, 所以在这个 SDE 中没有漂移项.

但应注意, 由下式给出的区间 $[T-\delta, T]$ 上的远期利率在同样的远期测度 $\tilde{P}^{T+\delta}$ 下不再是一个鞅:

$$1 + \delta F(t,T-\delta) = \frac{B(t,T-\delta)}{B(t,T)}. \tag{87}$$

但它关于自己的远期测度 $\tilde{P}^T$ 为鞅, 后者要求通过 $B(t,T)$ 进行正规化. 因此我们得到一个关于远期 Libor 模型的关键结果:

每个远期利率 $F(t,T_i)$ 在它自己的远期测度 $\tilde{P}^{T_i+\delta}$ 下存在一个鞅表示 .

这意味着每个远期利率的动态机理可以近似地表示为一个没有漂移项的差分方程形式, 在这个动态机理中唯一一个需要刻画的参数是相应远期利率的波动率.

### 13.4.3 无套利动态机理

上一节讨论了在它们自己的远期测度下的远期利率的动态机理. 现在来看看, 当我们对适用于两个相继区间的两个远期利率使用一个远期测度时会出现什么情况. 此时, 其中一个远期利率在自身远期测度下的动态机理利率估值要在与它自身远期测度不同的测度下进行, 因此鞅性就遭到了破坏. 然而, 我们也能够得到这个新的漂移项.

为了简化这个问题, 我们继续考虑方程组 (59) 中的基本模型, 只是要多加上一个时间区间, 使我们能够利用两个非平凡的远期利率以及它们各自的远期测度. 这是一个最简单的模型, 用它可以说明如何运用测度变换技术. 利用前面得到的远期测度, 如图 13-4 所示, 现在来定义两个Libor 过程 $\{F(t_0,t_1), F(t_0,t_2)\}$ 的远期利率动态机理. 第一个用 $B(t_0,t_2)$ 规范后是鞅, 第二个用 $B(t_0,t_3)$ 规范后也是鞅, 这意味着 $\tilde{P}^{t_2}$ 和 $\tilde{P}^{t_3}$ 是远期 Libor 利率过程 "各自" 的远期测度.

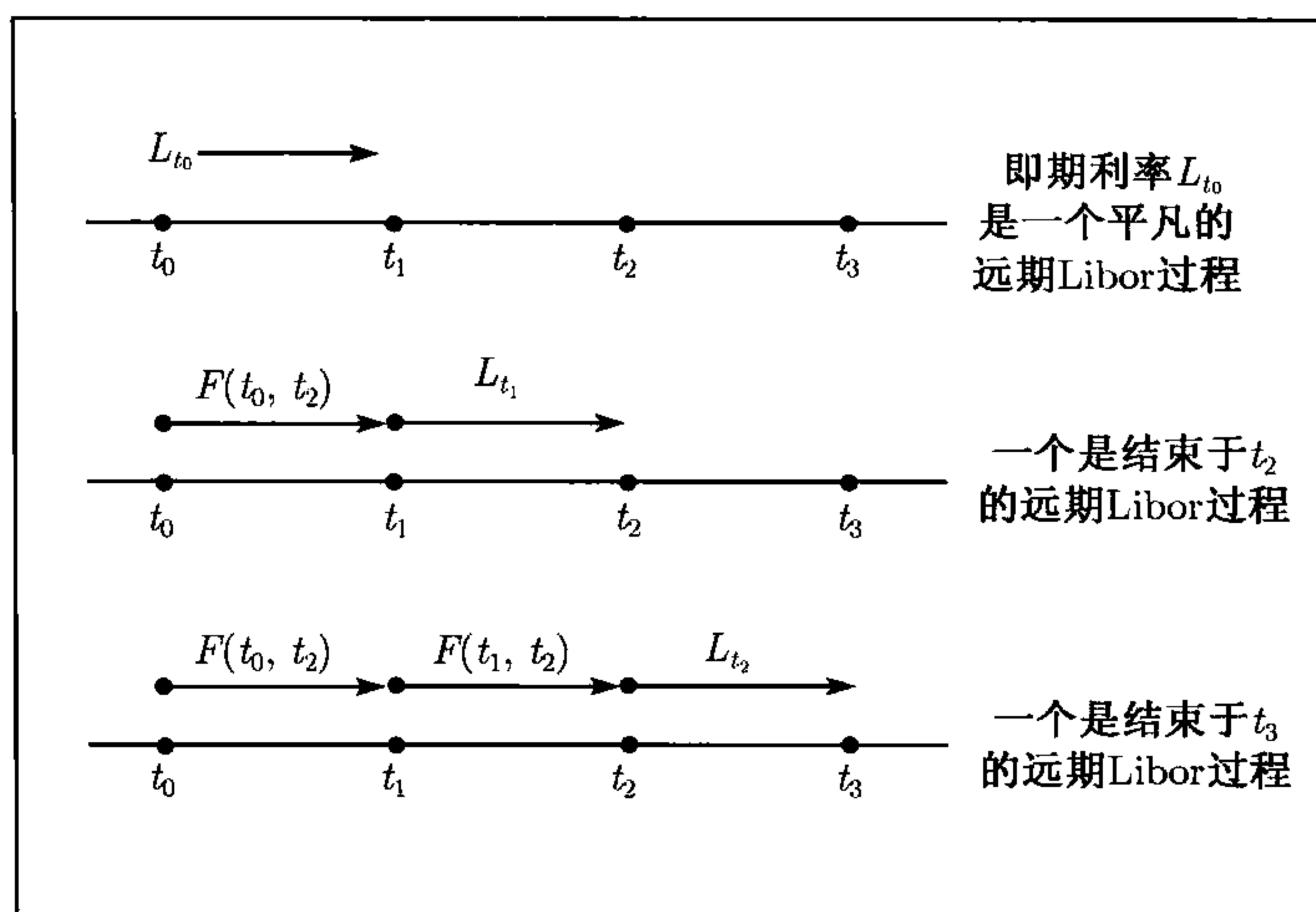



图 13-4

下面讨论一种非常简单的情形, 它涉及 4 个时期 $t_0, t_1, t_2, t_3$. 首先来讨论远期利率 $F(t_0, t_2)$ 的无套利动态机理, 我们只观察这个远期利率在 $t_1, t_2$ 时的未来值, 它们由下式给出:

$$F(t_1, t_2) - F(t_0, t_2) = \sigma_2 F(t_0, t_2) \Delta W_{t_1}^{t_3},$$
$$F(t_2, t_2) - F(t_1, t_2) = \sigma_2 F(t_1, t_2) \Delta W_{t_2}^{t_3}. \tag{88}$$

$\Delta W_{t_i}^{t_3}, i = 1, 2$ 中的上标表示 Wiener 过程的增量在测度 $\tilde{P}^{t_3}$ 下的期望为 0, 这两个等式表明了远期利率的 "当前" 值 $F(t_0, t_2)$ 是怎样变为 $F(t_1, t_2)$, 进而最后变为 $F(t_2, t_2)$(也就是 $L_{t_2}$) 的.

对于 "更近" 的远期利率 $F(t_0, t_1)$, 我们仅仅需要一个由债券 $B(t_0, t_2)$ 规范化 (即 $\tilde{P}^{t_2}$ 测度) 的方程,①这个差分方程的漂移项为 0:

$$F(t_1, t_1) - F(t_0, t_1) = \sigma_1 F(t_0, t_1) \Delta W_{t_1}^{t_2}. \tag{89}$$

类似地, $\Delta W_{t_1}^{t_2}$ 中的上标表示 Wiener 过程的增量在测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下的期望为 0, 这里的 $F(t_1, t_1)$ 就是 Libor 利率 $L_{t_1}$. 需要重新强调的是, 每个动态机理都是在不同的测度下定义的. 在这些不同的远期测度下, 每个远期 Libor 利率过程满足鞅性,②因而在每个方程中都没有漂移项.

幸好, 只要我们分别运用这些方程, 就不需要估计或校正无套利的漂移项, 需要决定的唯一参数是两个远期利率的波动率: $F(t_0, t_2)$ 的波动率 $\sigma_2$ 和 $F(t_0, t_1)$ 的

① 这个远期利率过程将在 $t_2$ 终止.
② 我们再次假设离散化的偏差可以忽略.

波动率 $\sigma_1$.[1]

实际上, 每个 Wiener 增量在各自的测度下都是零期望的. 例如, 这两个远期利率的 Wiener 增量满足, 对时间 $t_0 < t_1$, 有

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}_{t_2}}[\Delta W_{t_1}^{t_2}] = 0, \tag{90}$$

和

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}_{t_3}}[\Delta W_{t_1}^{t_3}] = 0. \tag{91}$$

然而, 在测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下计算这些期望时, 有

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}_{t_2}}[\Delta W_{t_1}^{t_2}] = 0, \tag{92}$$

和

$$E_{t_0}^{\widetilde{P}t_2}[\Delta W_{t_1}^{t_3}] = \lambda_{t_0}^{t_2}\Delta \neq 0. \tag{93}$$

这里的 $\lambda_{t_0}^{t_2}$ 是我们需要做出的平均更正 (mean correction), 因为这时 Wiener 过程增量的期望是在不同于它自己的远期测度 $\tilde{P}^{t_3}$ 下计算的, 这也就意味着 $F(t_0, t_2)$ 的动态机理丧失了它的鞅特征.

现在讨论二阶矩, 即方差和协方差. 假设每个 Wiener 过程的增量在两个测度下具有相同的方差, Girsanov 定理保证了在连续情况下这个假设的正确性, 而对离散时间的情形它近似成立. 最后, 假设我们考虑的市场环境是单因素的[2], 因此在两个不同远期测度下定义的 Wiener 过程在相同区间上的增量是完全相关的, 也就是说, 尽管各自的期望不同, 但它们的协方差近似地为

$$E^{\tilde{P}^{t_3}}[\Delta W_t^{t_3}\Delta W_t^{t_2}] = E^{\tilde{P}^{t_2}}[\Delta W_t^{t_3}\Delta W_t^{t_2}] = \Delta.$$

对于方差, 类似的等式也成立.[3]

**小结**

到目前为止获得的结果表明, 对于与股票相关资产的定价和风险管理, 使用风险中性测度很方便, 因为这时使用对数正态模型很容易, 无套利的漂移项也容易表示出来, 它就是无风险利率的函数. 所以只要考虑的是权益产品, 假设短期利率为常数是一个很合理的近似, 尤其对于较短的到期日. 但是, 对于那些与利率的未来

① 注意, 根据这里的特征, 波动率参数是不允许随时间变化的, 此假设可以被适当放宽, 但我们更愿意考虑这个简单的假设, 因为大多数市场应用中都是使用常数波动率.

② 这里要提醒读者, 单因素模型假设所有涉及的随机过程除了一个常数因子外, 都具有相同的不可预料的成分. 换句话说, 这些过程之间的相关系数是 1.

③ 当 $\Delta$ 趋于 0, 这种关系仍保持.

值有关的合约, 在风险中性测度下就失去了鞅性, 从而使得无套利动态机理变得很复杂, 相应的无套利漂移项可能会很难校正 (calibrate).

相反, 即使这些动态机理中漂移项不为 0, 使用远期测度也能够很方便地校正这些漂移项. 因此, 对于固定收益类产品来说, 远期测度是更合适的工作概率.

### 13.4.4 Monte Carlo 实现

假设我们想要从有关远期利率 $F(t_i,t_1)$ 和 $F(t_i,t_2)$ 的两个离散化的 SDE 生成两条 Monte Carlo“路径”,

$$F(t_i,t_1)-F(t_{i-1},t_1)=\sigma_1 F(t_{i-1},t_1)\Delta W_{t_i}^{t_2}, \tag{94}$$

$$F(t_i,t_2)-F(t_{i-1},t_2)=\sigma_2 F(t_{i-1},t_2)\Delta W_{t_i}^{t_3}, \tag{95}$$

其中, 第二个方程中的 $i=1,2$, 第一个方程中的 $i=1$.

如果在它们各自的远期测度下, 利用这些鞅等式, 很容易做到分别为每一个利率产生一条路径. 考虑以下的方法.

假设波动率 $\sigma_1,\sigma_2$ 可以在市场中观察到, 使用伪随机数生成器, 从以下的分布中选择两个随机变量 $\{\Delta W_1^3,\Delta W_2^3\}$:

$$\Delta W_i^3 \sim N(0,\Delta), \tag{96}$$

然后从观察到的$F(t_0,t_2)$ 开始, 按如下方式顺序计算随机生成的远期利率

$$F(t_1,t_2)^1=F(t_0,t_2)+\sigma_2 F(t_0,t_2)\Delta W_1^3, \tag{97}$$

$$F(t_2,t_2)^1=F(t_1,t_2)^1+\sigma_2 F(t_1,t_2)^1\Delta W_2^3, \tag{98}$$

其中左边的上标表示这些值是第一个 Monte Carlo 路径, 按顺序计算, 等式右边的所有项都是已知的, 这就给出了第一个模拟的 “路径”$\{F(t_0,t_2),F(t_1,t_2)^1,F(t_2,t_2)^1\}$. 重复这个算法, 就能得到 $M$ 条这样的路径, 它们均可潜在地用于定价过程.

对于远期 Libor, 过程 $F(t_0,t_1)$ 意味着什么呢? 我们是否可以在关于 $F(t_0,t_1)$ 的鞅方程中, 使用同样的随机生成随机变量 $\Delta W_1^3$, 从下式得到第一条路径 $\{F(t_0,t_1),F(t_1,t_1)^1\}$ 呢?

$$F(t_1,t_1)=F(t_0,t_1)+\sigma_1 F(t_0,t_1)\Delta W_1^3. \tag{99}$$

答案是否定的. 正如前面提到的, Wiener 过程的增量 $\{\Delta W_{t_1}^{t_2}\}$ 只是在测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下具有 0 期望, 而第一组随机变量 $\Delta W_1^3$ 是在 $\tilde{P}^{t_3}$ 下生成的, 因此在 $\tilde{P}^{t_2}$ 下, 这些变量的期望不为 0, 而是服从下述分布:

$$N(\lambda_{t_0}^{t_2}\Delta,\Delta). \tag{100}$$

所以, 如果使用和等式 (99) 中相同的 $\Delta W_1^3$, 必须修正 $\lambda_{t_0}^{t_2}\Delta$ 这一项, 为此我们要计算 $\lambda_{t_0}^{t_2}$ 的数值.

一旦完成这一步, $F(t_0,t_1)$ 的动态机理可以写成

$$F(t_1,t_1)=F(t_0,t_1)-\sigma_1 F(t_0,t_1)(\lambda_{t_0}^{t_2}\Delta)+\sigma_1 F(t_0,t_1)\Delta W_{t_1}^{t_3}. \tag{101}$$

为看到其原因, 在等式右边取关于测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 的期望, 并利用方程 (100) 中的信息:

$$E_{t_1}^{\tilde{P}^{t_2}}[F(t_0,t_1)-\sigma_1 F(t_0,t_1)(\lambda_{t_0}^{t_2}\Delta)+\sigma_1 F(t_0,t_1)\Delta W_{t_1}^{t_3}]=F(t_0,t_1).$$

于是, 经过校正期望后, 我们得到了测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下的正确结果. 很显然, 在随机生成的 Brow 运动增量被用到计算之前, 我们需要确定这些校正因子.

应注意到以下的简单情形. 如果我们考虑的工具具有可加的现金流, 并且这些现金流只取决于单一的一个远期利率时, 我们可以分别利用每一个零漂移方程来生成这些路径. 很多的流动性工具都可以这样做, 例如, FRA 和只依赖于一个 Libor 利率的互换. 可以使用单个的零漂移方程分别为互换的每一支进行定价, 然后利用观察到的零息债券价格把这些价格加总. 但是对于固定到期日互换就不能这样做, 因为它每个交割的一支都非线性地依赖于多个远期利率.

现在, 我们进一步考虑怎样得到期望校正, 使得所有的远期利率可以投影到一个远期测度中. 这将允许使用个体现金流依赖于多个远期利率的情形.

## 13.5 测度变换技术

我们介绍一个相对一般的框架, 然后将结论应用到前面的简单例子中. 我们需要前面导出的三个关系为基础. 设 $t_i$ 满足

$$t_0<t_1<\cdots<t_n=T,$$

并且

$$t_{i+1}-t_i=\delta,$$

表示某种基本利率互换结构的交割期, 我们只考虑在 $t_i$ 开始订合同, 而在 $t_i+\delta$ 支付的相继远期贷款的远期利率. 图 13-4 就是这样一个例子.

- 结果 1

起始于 $t_i$, 结束于 $t_i+\delta$ 且以 Libor 为基础的远期贷款, 它在 $t$ 时的远期利率 $F(t,t_i)$ 满足下面的无套利关系:

$$1+F(t,t_i)\delta=\frac{B(t,t_i)}{B(t,t_{i+1})},\quad t<t_i, \tag{102}$$

其中, $B(t,t_i)$ 和 $B(t,t_{i+1})$ 分别是到期日为 $t_i$ 和 $t_{i+1}$ 的无违约风险的零息债券在时间 $t$ 的价格. 等式的左边是总的远期回报, 右边是一种交易资产价格 $B(t,t_i)$ 关于另一种资产价格 $B(t,t_{i+1})$ 的规范化. 因此, 这个比值在某个适当的测度下是鞅, 该测度这里就是用 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ 表示的远期测度.

- 结果 2

在离散的 $k$ 个状态下假设所有资产的价格是无套利的, 时间 $t_i$ 的状态价格 $Q^j>0, j=1,\cdots,k$ 存在, 则远期测度 $\tilde{P}^{t_i}$ 的 $t_i$ 值为①

$$\tilde{p}_1^{t_i}=\frac{1}{B(t,t_i)}Q^1,\tilde{p}_2^{t_i}=\frac{1}{B(t,t_i)}Q^2,\cdots,\tilde{p}_k^{t_i}=\frac{1}{B(t,t_i)}Q^k. \tag{103}$$

这些概率满足

$$\tilde{p}_1^{t_i}+\tilde{p}_2^{t_i}+\cdots+\tilde{p}_k^{t_i}=1, \tag{104}$$

并且

$$0<\tilde{p}_j^{t_i}\forall j.$$

将 $\{Q^j\}$ 转换成 $\tilde{P}^{t_i}$ 的比例因子对所有 $j$ 都相等.

- 结果 3

在同样的假设下, 与 $t_{i+1}$ 远期测度 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ 相关的 $t_i$ 时概率为

$$\tilde{p}_1^{t_{i+1}}=\frac{B(t_i,t_{i+1})^1}{B(t,t_{i+1})}Q^1,\tilde{p}_2^{t_{i+1}}=\frac{B(t_i,t_{i+1})^2}{B(t,t_{i+1})}Q^2,\cdots,\tilde{p}_k^{t_{i+1}}=\frac{B(t_i,t_{i+1})^k}{B(t,t_{i+1})}Q^k, \tag{105}$$

其中 $B(t_i,t_{i+1})^j$ 是 $t_{i+1}$ 到期的债券在 $t_i$ 时的状态相关价值. 这里, $t_i$ 时的现金流用到期日为 $t_{i+1}$ 的债券来贴现. 因为到期日为 $t_{i+1}$, 所以 $B(t_i,t_{i+1})^j$ 在 $t_i$ 时不是常数, 也就是说, 将 $\{Q^j\}$ 转化为 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ 的因子也不再是常数了.

我们利用这些已知的结论来讨论测度变换的机制. 假设需要定价的工具同时取决于两个远期 Libor 利率 $F(t,t_i)$ 和 $F(t,t_{i+1})$, 我们知道每个 Libor 过程在各自的远期测度下是一个鞅, 并且满足零漂移项的 SDE.

在单因素模型下, 某个 Wiener 过程引起这两个远期利率的波动. 假设对于起始时间 $t<t_i, i=1,\cdots,n$, 并且一个很小的时间间隔 $h$, 有 $t+h<t_i$. 通过加入一个高斯波动率结构, 我们可以将两个相继的远期利率 $F(t,t_i)$ 和 $F(t,t_{i+1})$ 各自的离散化无套利动态机理写为

$$F(t+h,t_i)-F(t,t_i)=\sigma^i F(t,t_i)\Delta W_{t+h}^1, \tag{106}$$

$$F(t+h,t_{i+1})-F(t,t_{i+1})=\sigma^{i+1}F(t,t_{i+1})\Delta W_{t+h}^2. \tag{107}$$

① 读者可以察觉到记号有些改变, 这是由本节的相关背景决定的.

这两个远期利率的变化在各自远期测度下的期望为 0, 因此没有漂移项. 这意味着实际世界中唯一的 Wiener 过程在两个方程中表示为 $\Delta W^1_{t+h}$ 和 $\Delta W^2_{t+h}$, 它们在各自的远期测度下服从期望为零、方差为 $h$ 的正态分布. $W^1_{t+h}$ 和 $W^2_{t+h}$ 中的上标分别表示 $t_{i+1}$ 和 $t_{i+2}$ 时的远期测度.[①]最后, 我们简化波动率的特征, 并假设它们是常数.

鞅动态机理在金融工程中使用起来很方便, 它们各自的漂移项是 0, 因此我们不需要对漂移项建立模型, 市场从业人员的主要任务就是得到它们的波动率 $\sigma^i$ 和 $\sigma^{i+1}$.

但是, 某些证券的价格可能会以非线性的方式依赖于多个远期利率, 它们的值可能必须作为单一测度下的期望来计算. 例如, 假设一种证券的价格 $S_t$ 通过一个定价关系依赖于 $F(t,t_i)$ 和 $F(t,t_{i+1})$, 使得

$$S_t = E_t^{\tilde{P}}[g(F(t,t_i),F(t,t_{i+1}))], \tag{108}$$

其中 $g(\cdot)$ 是一个已知的非线性函数. 那么, 这个期望必须在唯一一个测度下计算, 这个概率可以是时间 $t_{i+1}$ 或时间 $t_{i+2}$ 的远期测度, 因此我们不得不选择一个具有鞅动态机理的远期利率方程, 然后通过期望校正得到另一个正确的无套利动态机理. 具有鞅性的远期测度就被视为*工作概率分布*, 而其他的方程可以通过一系列的测度变换用这个唯一的概率分布表示出来. 下面将进行详细讨论.

### 13.5.1 测度变换的机制

对 (106) 和 (107) 中定义的关于 $\Delta W^1_{t+h}$ 和 $\Delta W^2_{t+h}$ 的期望, 有

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[\Delta W^1_{t+h}] = 0, \tag{109}$$

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W^2_{t+h}] = 0. \tag{110}$$

在它们各自的远期测度下, 每个 Wiener 过程增量的期望为 0. 如果选择 $\tilde{P}^{t_{i+2}}$ 作为工作测度, 则其中一个方程就要改变, 我们有[②]

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W^1_{t+h}] = \lambda_t h, \tag{111}$$

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W^2_{t+h}] = 0, \tag{112}$$

其中 $\lambda_t$ 的值给出了此情形下为了获得无套利动态机理必须使用的修正因子 (correction factor).

我们从初始的期望开始:

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[\Delta W^1_{t+h}] = \sum_{j=1}^{k} \Delta W^{1j}_{t+h} \tilde{p}_j^{t_{i+1}} = 0, \tag{113}$$

---

① 记住, 时间 $t_i$ 的远期利率以某个时间 $t_{i+1}$ 的远期测度作为它自己的测度.

② 在一般的情形中, 会有 $m$ 个远期利率, 除了一个等式外其他的等式都将发生改变.

其中 $\tilde{P}_j^{t_{i+1}}$ 是每个状态 $j=1,\cdots,k$ 时的概率值, 现在利用等式

$$\frac{B(t,t_{i+2})B(t_i,t_{i+2})^j}{B(t,t_{i+2})B(t_i,t_{i+2})^j} \equiv 1, \tag{114}$$

我们可以重新将它写为

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[\Delta W_{t+h}^1] = \sum_{j=1}^{k}(\Delta W_{t+h}^{1j})\left[\frac{B(t,t_{i+2})B(t_i,t_{i+2})^j}{B(t,t_{i+2})B(t_i,t_{i+2})^j}\right]\tilde{p}_j^{t_{i+1}}, \tag{115}$$

重新组合并使用结果 3 所隐含的 $t_{i+1}$ 和 $t_{i+2}$ 的远期测度定义, 有

$$\tilde{p}_j^{t_{i+1}} = \frac{B(t_i,t_{i+1})^j}{B(t,t_{i+1})}Q^j,$$

和

$$\tilde{p}_j^{t_{i+2}} = \frac{B(t_i,t_{i+2})^j}{B(t,t_{i+2})}Q^j.$$

用适当的因子重新标度 $\{Q^j\}$, (115) 变为

$$\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_{t+h}^{1j})\left[\frac{B(t,t_{i+2})}{B(t,t_{i+1})}\frac{B(t_i,t_{i+1})^j}{B(t_i,t_{i+2})^j}\right]\tilde{p}_j^{t_{i+2}} = 0. \tag{116}$$

这些概率随着用来改变 $\{Q^j\}$ 的因子不同而不同, $W_{t+h}^1$ 中的上标没有改变.

推导的下一步是试图 “识别” 出这个期望中的元素. 利用结果 1, 我们可以得到等式

$$1+\delta F(t_i,t_{i+1})^j = \frac{B(t_i,t_{i+1})^j}{B(t_i,t_{i+2})^j}, \tag{117}$$

进行代换并消掉与状态无关的项, 整理后得到

$$\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_{t+h}^{1j})(1+\delta F(t_i,t_{i+1})^j)\tilde{p}_j^{t_{i+2}} = 0, \tag{118}$$

乘法展开得

$$\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_{t+h}^{1j})\tilde{p}_j^{t_{i+2}} = -\left(\sum_{j=1}^{k}(\Delta W_{t+h}^{1j})F(t_i,t_{i+1})^j\tilde{p}_j^{t_{i+2}}\right)\delta, \tag{119}$$

使用条件期望算子将其写成以下形式

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W_{t+h}^1] = -E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W_{t+h}^1 F(t_i,t_{i+1})]\delta. \tag{120}$$

在最后一个表达式中, 左边是想要的 $\Delta W_{t+h}^1$ 在新测度 $\tilde{P}^{t_{i+2}}$ 下的期望. 当等式右边的随机变量相关时这个期望将不为零, 并且只要远期利率是相关的这个期望将不为 0. 为了得到这个期望值, 我们需要计算协方差.

设协方差由 $-\lambda_t h$ 给出, 我们有

$$\delta E_t^{\tilde{P}^{t_{i+2}}}[\Delta W_{t+h}^1 F(t_i, t_{i+1})] = -\lambda_t h. \tag{121}$$

利用 $\lambda_t$ 可以转换$F(t,t_i)$ 动态机理中的概率. 从最初鞅动态机理开始:

$$F(t+h, t_i) = F(t, t_i) + \sigma^i F(t, t_i)\Delta W_{t+h}^1, \tag{122}$$

在等式右边加一项, 减一项, 重新组合得

$$F(t+h, t_i) = F(t, t_i) - \sigma^i F(t, t_i)\lambda_t h + \sigma^i F(t, t_i)[\lambda_t h + \Delta W_{t+h}^1]. \tag{123}$$

令

$$\Delta W_{t+h}^2 = [\lambda_t h + \Delta W_{t+h}^1], \tag{124}$$

我们刚刚已经证明了等式右边表达式的期望在 $\tilde{P}^{t_{i+2}}$ 下为 0, 所以在 $\tilde{P}^{t_{i+2}}$ 下, 我们可以将 $F(t,t_i)$ 新的动态机理写为

$$F(t+h, t_i) = F(t, t_i) - \sigma^i F(t, t_i)\lambda_t h + \sigma^i F(t, t_i)\Delta W_{t+h}^2. \tag{125}$$

从这个式子可以看出, 新的动态机理具有非零的漂移项, $F(t,t_i)$ 在新的测度下不是一个鞅. 然而这个过程是无套利的, 并且容易运用 Monte Carlo 方法进行模拟. 既然两个动态机理都在同一个测度下表示出来了, 那么这套描述两个远期利率动态机理的方程就可以用于与这两个远期利率有关的定价工具中, 而且可以在这两个 SDE 中使用同一个伪随机数. 最后, 读者应记住本节的讨论依赖于 SDE 中的离散近似.

### 13.5.2 一般化

将前面的讨论一般化就可得到远期 Libor 模型. 假设有 $n$ 个远期利率, $F(t_0, t_i)$, $i = 0, \cdots, n-1$, 它们分别对应于开始时间为 $t_i$, 结束时间为 $t_{i+1} = t_i + \delta$ 的贷款. $F(t_0, t_0)$ 是平凡的远期利率, 即关于 $\delta$ 的即期 Libor. 终结时间为 $t_n$.

类似于前面几节的讨论, 假设只存在单一的因素.[①]利用 $t_{i+1}$ 远期测度我们可以得到每个远期利率 $F(t_0, t_i)$ 的无套利的鞅动态机理

$$\mathrm{d}F(t, t_i) = \sigma^i F(t, t_i) W_t^{i+1}, \quad t \in [0, \infty). \tag{126}$$

① 关于多因素模型以及远期 Libor 模型的推广可以参考 Musiela 和 Ruthowski(1998), Brigo 和 Mercurio(2001) 以及 Rebonato(2002).

Brown 运动 $W_t^{i+1}$ 的上标意味着[1]

$$E_t^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[\mathrm{d}W_t^{i+1}] = 0.$$

这些无套利动态机理非常有用, 因为它们不涉及任何利率模型, 而仅仅依赖各自波动率的正确指定. 但是, 当证券的支付非线性地依赖多个远期利率时, 这个过程必须在唯一的工作测度下表示出来.

假设我们选择 $\tilde{P}^{t_n}$ 作为工作测度[2], 前面几节讨论的方法可以进一步推广得到如下的无套利 SDE系统(它们在单因素情形涉及递归的漂移修正.):

$$\mathrm{d}F(t,t_i) = -\left[\sigma^i F(t,t_i)\sum_{j=i}^{n-1}\frac{\delta\sigma^j F(t,t_j)}{1+F(t,t_j)\delta}\right]\mathrm{d}t + \sigma^i F(t,t_i)\mathrm{d}W_t^{t_n}, \quad t\in[0,\infty)$$

其中 $\mathrm{d}W_t^{t_n}$ 中的上标表示工作测度为 $\widetilde{P}^{t_n}$, 系统中这些方程是关于这个远期测度的. 然而, 只有最后一个方程具有鞅动态机理

$$\mathrm{d}F(t,t_{n-1}) = \sigma^{n-1}F(t,t_{n-1})\mathrm{d}W_t^{t_n}, \quad t\in[0,\infty).$$

其他所有的 SDE 都涉及右边第一项给出的相继的修正因子. 应注意, 这些因子中的所有项都可以在时间 $t$ 观察到, 因此这些动态机理不需要对实际漂移项建立模型.

## 13.6　应　　用

远期测度和测度变换技术跟许多工具的定价相关, 但是现在在市场中有一类工具相当流行, 并且它也可以用这种测度变换的方法来定价, 这类工具就是固定到期日互换 (CMS). 它们的一些性质可能解释迄今所用方法间的某些微妙差别, 为了对它们进行定价, 需要同时设计所有远期利率.

首先, 我们先给出关于这类工具的一段材料, 该材料显示了人们对固定到期日互换的兴趣.

**例**

预期欧元区的利率将会上升, 机构投资者们在过去的一个月内已经陆续购买了超过 40 亿的息票支付与固定期限互换 (CMS) 利率联系起来的票据. 由于对这些产品需求的膨胀复苏了市场中的可赎回债券, 并使得欧洲期权市场中的长期期限结构趋于平衡. CMS 的兴起是由那些热衷于投机于更高欧洲利率的欧洲机构投资者们所驱动的.

CMS 交易的结构非常典型, 并且早在 1999 年就有类似的发行. 意大利发行是

① 这里实际上使用了随机微分.

② 它有时也称为终止测度.

典型的, 它第一年向投资者提供 4%的息票, 剩余 19 年的利率是 10 年期 CMS 利率的 78%. 大多数交易包括了一个下限, 限制了投资者的下端息票率.

在当前的收益率曲线环境中, 基于 CMS 的产品显得很有吸引力. 它们提供了一个高于市场首次息票以及投机于未来市场利率上涨的机会. 它们还保证了至少 4%的最小息票利率. (IFR, 第 1281 期)

CMS 互换是一种建立在普通互换上的工具. 在一个普通互换中, 固定利率只与特定交割期有关的浮动 Libor 利率相交换. 而在一个 CMS 互换中, 这一点被一般化了. 它仍然是固定利率交换浮动利率, 但是浮动利率不是"单个时期" 的利率, 它本身就是一个在未来时刻决定的多期互换利率.

CMS 互换的交换形式有很多种, 作为一个例子, 我们考虑下面的情形. 假设一方决定在未来 3 年内支付 4%以接受一个 2 年期的互换利率, 后者在每年的年初确定. 这个未来的互换利率在时间 $t_0$ 是未知的, 它被视为浮动支付, 但是这个浮动利率不仅仅只取决于某一特别年份的波动率, 而是一年利率的平均. 显然, 这些互换具有很强的非线性, 并且我们不能用普通互换的金融工程方法来处理它们.

图 13-5 给出一个 CMS 互换的例子, 读者可以看到, 在每个交割日用来交换固定利率的浮动利率是多个远期利率的函数. 在这些条件下, 要利用不同远期测度下的单个零漂移随机微分方程来设计每个远期利率是行不通的. 每个 CMS 互换的一支都依赖于多个远期利率, 这些利率需要在同一个远期测度下进行设计.

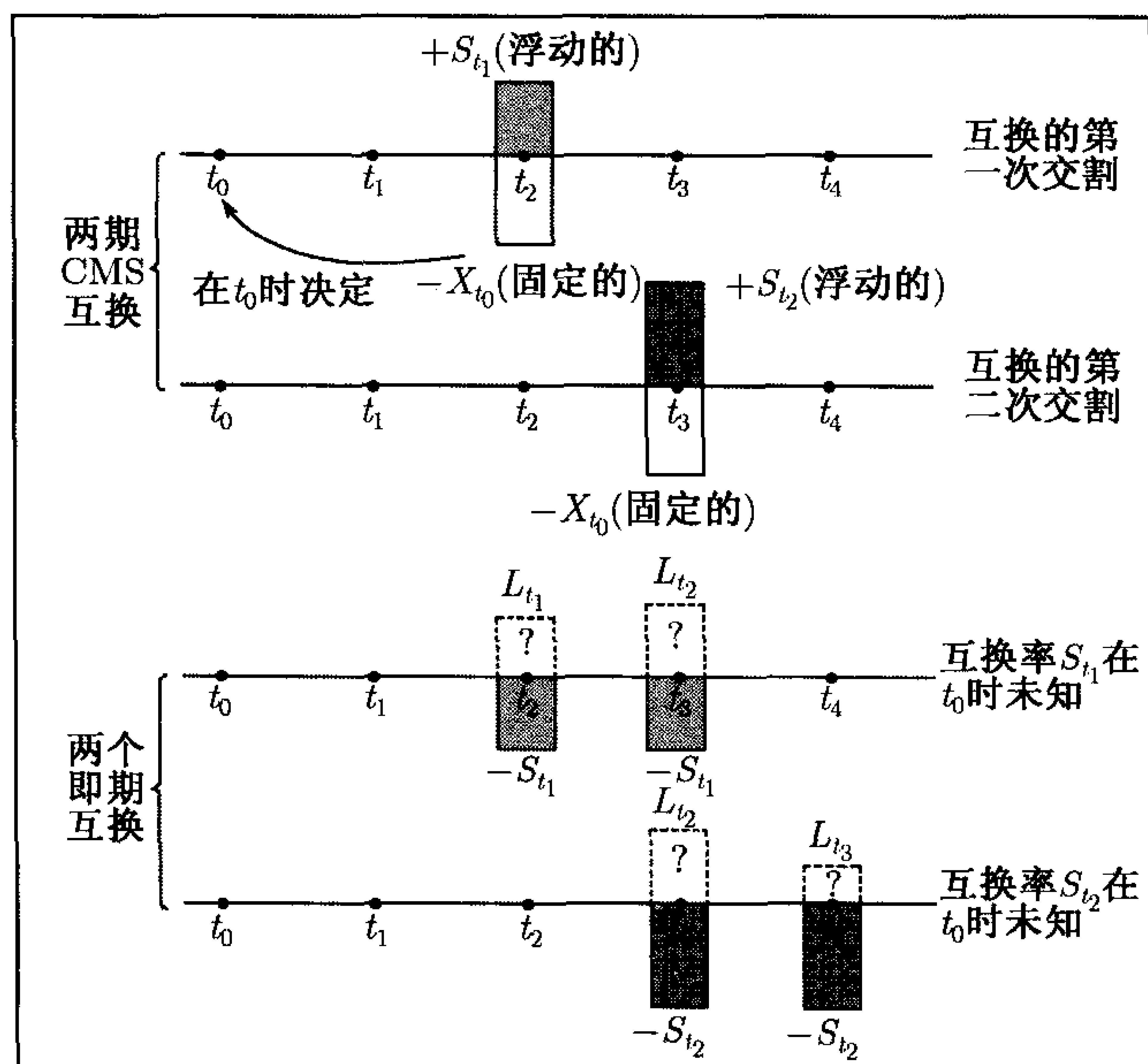



图 13-5

### 13.6.1 测度变换的另一个例子

本节给出了测度变换方法在 FRA 市场中的另一个应用, 后付 FRA 在时间 $t_{i+1}$ 的支付是

$$N\delta[F(t_0,t_i)-L_{t_i}].$$

而市场交易的 FRA, 在时间 $t_i$ 的交割为

$$\frac{N\delta[F(t_0,t_i)-L_{t_i}]}{(1+\delta L_{t_i})}.$$

最后, 我们有 Libor 后付 FRA, 它在时间 $t_i$ 的交割为

$$N\delta[f(t_0,t_i)-L_{t_i}].$$

正如我们在第 9 章中看到的, Libor 后付的交割方式是 "非自然" 的, 因为与 $L_{t_i}$ 有关的支付正常情况下应该在时间 $t_{i+1}$ 进行.

我们现在来证明, 由后付 FRA 和市场交易的 FRA 得到的远期利率相同. 首先, 回忆在后付 FRA 的远期测度 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ 下, 有

$$F(t_0,t_i)=E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[L_{t_i}],$$

也就是说, FRA 利率是 Libor 利率所有可能值的平均

$$F(t_0,t_i)=\sum_{j=1}^{k}L_{t_i}^{j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}, \tag{127}$$

其中 $j$ 表示可能的状态, 这些状态假设是离散和可数的.

现在, 考虑市场交易的 FRA 的交割额

$$\frac{N\delta[F(t_0,t_i)-L_{t_i}]}{(1+\delta L_{t_i})} \tag{128}$$

这个合约所隐含的远期利率和后付 FRA 一样吗?

答案是肯定的, 利用测度变换技术, 我们来讨论它的证明. 想法是先考察这个交割额在测度 $\tilde{P}^{t_i}$ 下的期望, 并证明它导致相同的远期利率. 于是我们从下式开始:

$$E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{N\delta[F(t_0,t_i)-L_{t_i}]}{(1+\delta L_{t_i})}\right], \tag{129}$$

令其等于 0, 重新整理得到定价方程:

$$F(t_0,t_i)=\frac{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{N\delta L_{t_i}}{(1+\delta L_{t_i})}\right]}{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{N\delta}{(1+\delta L_{t_i})}\right]}. \tag{130}$$

下面转换方程 (130) 右边的测度. 现在有两个期望, 我们将在它们之间进行测度转换. 先令 $N=1,\delta=1$.

考虑分子

$$E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{L_{t_i}}{(1+L_{t_i})}\right]=\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{t_i}^{j}}{(1+L_{t_i}^{j})}\tilde{p}_j^{t_i}. \tag{131}$$

我们知道在时间 $t_i$, 有

$$\begin{aligned}\tilde{p}_j^{t_i}&=\frac{1}{B(t_0,t_i)}Q^j,\\ \tilde{p}_j^{t_{i+1}}&=\frac{B(t_i,t_{i+1})^j}{B(t_0,t_{i+1})}Q^j.\end{aligned} \tag{132}$$

所以

$$\tilde{p}_j^{t_i}=\frac{1}{B(t_0,t_i)}\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_i,t_{i+1})^j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}},$$

代入 (131) 的右边, 得到

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{t_i}^{j}}{(1+L_{t_i}^{j})}\frac{1}{B(t_0,t_i)}\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_i,t_{i+1})^j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}.$$

在这个表达式中, 我们看到

$$\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_0,t_i)}=\frac{1}{1+F(t_0,t_i)},$$

和

$$\frac{1}{B(t_i,t_{i+1})^j}=1+L_{t_i}^{j},$$

利用这两个关系, 得到等价性

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{t_i}^{j}}{(1+L_{t_i}^{j})}\frac{1}{B(t_0,t_i)}\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_i,t_{i+1})^j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}=\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{t_i}^{j}}{(1+L_{t_i}^{j})}\frac{1}{1+F(t_0,t_i)}(1+L_{t_i}^{j})\tilde{p}_j^{t_{i+1}},$$

将等式右边化简为

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{L_{t_i}^{j}}{1+F(t_0,t_i)}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}.$$

我们立即发现这是一个期望表示:

$$E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}\left[\frac{L_{t_i}^{j}}{1+F(t_0,t_i)}\right].$$

现在, 考虑 (130) 中的分母

$$E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{1}{1+L_{t_i}}\right]=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(1+L_{t_i}^{j})}\tilde{p}_j^{t_i},$$

利用 (132), 将其转换到测度 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+L_{t_i}^{j}}\tilde{p}_j^{t_i}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+L_{t_i}^{j}}\frac{1}{B(t_0,t_i)}\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_i,t_{i+1})^j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}},$$

使用 (132) 中的等价性并代换得

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+L_{t_i}^{j}}\frac{1}{B(t_0,t_i)}\frac{B(t_0,t_{i+1})}{B(t_i,t_{i+1})^j}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+L_{t_i}^{j}}\frac{1}{1+F(t_0,t_i)}(1+L_{t_i}^{j})\tilde{p}_j^{t_{i+1}}.$$

注意, 随机项 $(1+L_{t_i}^{j})$ 被消掉了. 从等式的右方得到

$$\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+F(t_0,t_i)}\tilde{p}_j^{t_{i+1}}\\&=\frac{1}{1+F(t_0,t_i)}.\end{aligned}$$

对一般的 $N,\delta$, 将分子、分母放在一起, 有

$$F(t_0,t_i)=\frac{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{N\delta L_{t_i}}{1+\delta L_{t_i}}\right]}{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_i}}\left[\frac{N\delta}{1+\delta L_{t_i}}\right]}=\frac{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}\left[N\delta\frac{L_{t_i}^{j}}{1+F(t_0,t_i)\delta}\right]}{\frac{N\delta}{1+F(t_0,t_i)\delta}},$$

对上式进行化简, 得到

$$F(t_0,t_i)=E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[L_{t_i}^{j}].$$

这样就得到了想要的结果: 后付 FRA 的 FRA 利率与市场交易 FRA 的 FRA 利率是一样的, 并且是 Libor 利率 $L_{t_i}$ 的无偏估计.

下面以另一个简单的例子结束本节.

**例**

我们同样可以将远期测度变换应用于盯市, 后付 FRA 在时间 $t_{i+1}$ 的交割是

$$[L_{t_i}-F(t_0,t_i)]N\delta,$$

那么这个合约在时间 $t_1$ 的价值是多少呢, 这里 $t_0<t_1<t_i$?

市场的惯例是用相应 $t_1$ 时间的远期利率替代随机变量 $L_{t_i}$, 由此得到

$$[F(t_1,t_i)-F(t_0,t_i)]N\delta,$$

通常情况下，它的值不等于 0，那么我们怎么知道这是合约正确的盯市方法呢？我们简单地取 $t_1$ 时 $[L_{t_i}-F(t_0,t_i)]N\delta$ 在远期测度下 $t_{i+1}$ 时的期望，得到

$$E_{t_1}^{\tilde{P}^{t_{i+1}}}[L_{t_i}-F(t_0,t_i)]N\delta=[F(t_1,t_i)-F(t_0,t_i)]N\delta.$$

这里的等号用到下述结果：在测度 $\tilde{P}^{t_{i+1}}$ 下，$F(t_1,t_i)$ 是 $L_{t_i}$ 的无偏估计.

### 13.6.2 CMS 互换的定价

CMS 互换的定价很显然要涉及凸性调整. 仍然在本章使用的简单框架下考虑问题，行业首先得到 $t_1\times t_2$ 和 $t_2\times t_3$ 的互换期权的波动率. 然后，根据互换在第 18 章中的 "年金" 测度下是一个鞅这一结果，就可以在具体的假设下作各种各样的变换，这样就可以估计出对于远期互换利率的凸性修正 (convexity correction). 换句话说，业界使用下列方程来计算 $\varepsilon_t$：

$$cms_t=s_t^f+\varepsilon_t,$$

其中 $cms_t$ 是 CMS 利率，$s_t^f$ 是相关的远期互换利率，$\varepsilon_t$ 就是凸性修正.

很自然想到将前面讨论的远期 Libor 动态机理用于 CMS 互换的定价，然后通过一系列递归的测度变换得出所需要的期望修正. 由于 CMS 互换的定价是一个很好的测度变换的例子，所以我们接下来考虑一种简单的情形.

考虑一个两期的 CMS 互换，这里在时间 $t_2$ 和 $t_3$ 支付固定的 CMS 利率 $x_{t_0}$，以此交换同样时刻两期现金互换的互换利率，在远期测度 $\tilde{P}^{t_3}$ 下，CMS 互换的现金流现值为

$$\begin{aligned}0=E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_3}}\Bigg[&(x_{t_0}-s_{t_1})\frac{1}{(1+L_{t_0}\delta)(1+L_{t_1}\delta)}\\&+(x_{t_0}-s_{t_2})\frac{1}{(1+L_{t_0}\delta)(1+L_{t_1}\delta)(1+L_{t_2}\delta)}\Bigg]N,\end{aligned}\tag{133}$$

其中假设交割区间的长度为 1，$N$ 是互换的名义额，$s_{t_1}$ 和 $s_{t_2}$ 是两个 $t_0$ 时未知的两期互换利率，它们可由 (50) 中通常的即期互换公式给出.

令 $\delta=1$，整理这个方程得到

$$x_{t_0}=\frac{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_3}}\left[s_{t_1}\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}+s_{t_2}\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right]}{E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_3}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}+\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right]}.\tag{134}$$

因此，为了得到 CMS 利率 $x_{t_0}$ 的值，我们需要做的是在同一个远期测度 $\tilde{P}^{t_3}$ 下写出远期 Libor 过程 $F(t_0,t_1)$ 和 $F(t_0,t_2)$ 的动态机理，然后选择 Monte Carlo 路径.

很显然，这样做以及从远期 Libor 的无套利动态机理获得 Monte Carlo 路径需要校正 (calibrate) 出各自的波动率. 一旦完成这些工作后，Monte Carlo 路径的选

择就很自然了. 因此 CMS 利率就可以由

$$x_{t_0}=\frac{\sum_{j=1}^{M}\left[s_{t_1}^{j}\frac{1}{(1+L_{t_0}^{j})(1+L_{t_1}^{j})}+s_{t_2}^{j}\frac{1}{(1+L_{t_0}^{j})(1+L_{t_1}^{j})(1+L_{t_2}^{j})}\right]}{\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0}^{j})(1+L_{t_1}^{j})}+\frac{1}{(1+L_{t_0}^{j})(1+L_{t_1}^{j})(1+L_{t_2}^{j})}\right]} \tag{135}$$

计算出来. 其中互换利率 $s_{t_i}^{j}$ 本身依赖于同样的远期利率路径, 因此可以由选好的路径计算出来.

从对波动率和初始远期利率进行扰动开始, 我们可以重复同样的练习, 从而获得风险管理所需要的相关希腊字母.

## 13.7　结　　论

本章主要是致力于找到互换、FRA 以及债券市场之间的联系, 我们的讨论导致的问题是怎样构建一条令人满意的收益率曲线, 这也是金融工程中一个很基本的任务. 本章介绍两个主要的工具: 第一个是远期测度; 第二个就是相关测度的变换技术. 这使我们可以方便地建立起一系列远期利率的无套利动态机理, 然后这些动态机理用作一个工具, 根据连接互换利率、远期利率以及它们的衍生品的公式计算出所需要的量.

接下来的话题将是远期 Libor 模型. 这里, 主要的想法是获得序列的关系因素来表达在一个简单远期测度下的各种远期利率的动态机理.

下一个讨论的问题是远期 Libor 模型. 其基本思想是在单个远期测度下, 寻找序列相关因子来表示各种远期利率的动态机理.

## 参 考 文 献

本章的标准参考文献将是金融工程师的有趣读物. Brace, Gatarek, Musiela (1997) 和Jamshidian(1997) 是基本的阅读材料. Miltersen, Sandmann和Sondermann (1997) 是另外一本重要的参考文献. Glasserman和Zhao(2000) 是关于 BGM 模型离散化的重要来源, 最后, Brigo和Mercurio(2001) 的课本提供了所有这些材料的综合处理. 最近出版的Rebonato(2002) 是一本很好的入门读物.

## 附录 13-1

**实际中的收益率曲线的计算**

传统计算收益率曲线的方法是首先获得流动债券的价格, 然后得到贴现和相关

的收益. 该方法先要计算隐含的零息债券价格, 然后从可观察到的附息债券价格计算出相应的收益率和远期利率.

我们将简要回顾收益率曲线计算的这种方法, 它对没有利率衍生工具交易的市场也是很有用的. 首先概述有关概念.

1. 票面收益率曲线

考虑一个直接附息债券, 它的息票率 $c$ 正好等于时间 $t$ 同样期限的收益率, 这个 "票面" 债券 $t$ 时的价格将正好是它的面值 100. 这样一个债券的到期收益率就是*票面收益率*. 这种债券的价格等于 100, 它们的息票率表明了同样期限和信用债券在特定时间的正确收益率.

可以将一个年付息的三期票面债券的现值写为

$$100 = \frac{100c}{(1+y)} + \frac{100c}{(1+y)^2} + \frac{100(1+c)}{(1+y)^3},$$

这里票面收益率意味着 $c = y$.

此特性正是我们想要的, 因为对于附息债券, 到期日并没有给出平均现金流的正确回收时间, 并且如果我们考虑的债券息票率不同于票面收益率的话, 这个债券的久期和隐含收益率是不同的.

2. 零息收益率曲线

同样可以通过求解下面的方程从面值为 100 的零息债券计算一条收益率曲线:

$$B(t,T) = \frac{100}{(1+y_t^T)^{T-t}},$$

其中 $y_t^T$ 是期限为 $T-t$ 的零息债券的收益率.

票面收益率曲线和零息收益率曲线一般是不同的.

现在给出一个计算的例子.

**例**

我们想要获得票面收益率和零息收益率之间的关系.

假设已给下面的零息债券的价格:

$$B(0,1) = 96.00, \quad B(0,2) = 91.00, \quad B(0,3) = 87.00.$$

(1) 零息收益率是多少?

(2) 相同到期日的票面收益率是多少?

为了计算零息收益率, 我们从下面的公式:

$$B(t,T) = \frac{100}{(1+y_t^T)^{T-t}},$$

得到

$$96.00=\frac{100}{(1+y_0^1)^1},\quad 91.00=\frac{100}{(1+y_0^2)^2},\quad 87.00=\frac{100}{(1+y_0^3)^3},$$

解关于未知数零息收益率的方程得

$$y_0^1=0.041\ 67,\quad y_0^2=0.048\ 28,\quad y_0^3=0.047\ 52.$$

现在来计算票面收益率, 利用下面的关系 $(t_n=T)$:

$$P(t_0,T)=\sum_{i=0}^{n}\tilde{y}B(t_0,t_i)+B(t_0,T)=100,$$

满足方程的 $\tilde{y}$ 就是到期日为 $T$ 的票面收益率. 这里的想法是, 当我们使用正确的贴现率进行贴现时, 由一个面值债券所生成的现金流的总和应该等于 100, 即必须有 $p(t_0,T)=100$, 对每个 $T$ 只有一个 $\tilde{y}$ 使得该等式成立.

计算出票面收益率, 得到

$$\tilde{y}_0^1=y_0^1=0.041\ 67,\quad \tilde{y}_0^2=0.048\ 13,\quad y_0^3=0.047\ 45.$$

正如这些数字所表明的, 票面收益率与零息收益率是有细微的区别的.

3. 由附息债券得到的零息曲线

传统计算收益率曲线的方法需要从附息债券的价格得到零息收益率曲线, 这一过程现在看来有些过时, 但是它对具有新兴发展中金融市场的经济体仍然很有用. 同样, 这个方法也能很好地说明合成资产的创造怎样用于收益率曲线的构造. 记住, 所有这些计算都是关于无违约风险债券的.

考虑一个两年期的附息债券, 这个无违约风险债券的年息票率是 $c\%$, 当前的价格是 $P(t,t+2)$, 到期日的价值是 100. 假设我们知道当前的年利率水平 $r_t$,[1]则下面的投资组合

$$\left\{\frac{100c}{(1+r_t)}\text{单位的时刻}t\text{时借入, 买二期附息债券, }P(t,t+2)\right\}\tag{136}$$

产生的现金流等价于 $1+c$ 单位的二期贴现债券, 因此我们有

$$P(t,t+2)-\frac{100c}{1+r_t}=(100(1+c))/(1+y_t^2)^2.$$

如果这个附息债券的价格 $P(t,t+2)$ 和一年年利率 $r_t$ 是已知的, 则可从此方程计算出两年期零息债券的收益率 $y_t^2$. 其他到期日的零息收益率可以通过构造类似具有较长期限的合成工具递归地计算出来.

[1] 我们也可以假设一年期的零息债券 $P(t,t+1)$ 价格已知.

# 习　题

1. 已知流动后付 FRA 的报价. 假设所有时间间隔都以月度量, 并且每个月是 30 天.

| 期限 | 买价/卖价 |
|---|---|
| 3×6 | 4.5–4.6 |
| 6×9 | 4.7–4.8 |
| 9×12 | 5.0–5.1 |
| 12×15 | 5.5–5.7 |
| 15×18 | 6.1–6.3 |

同时还知道当时的 3 个月 Libor 等于 4%.

(a) 计算贴现债券的价格 $B(t_0, t_i)$, 其中 $t_i = 6, 9, 12, 15, 18$ 个月.

(b) 计算期限从 0 至 18 个月的收益率曲线.

(c) 计算相同期限的互换曲线.

(d) 这两条曲线相同吗?

(e) 计算票面收益率曲线.

(f) 计算零息收益率曲线.

2. 已知流动互换利率的报价, 假设所有时间间隔以年计.

| 期限 | 买价/卖价 |
|---|---|
| 2 | 6.2–6.5 |
| 3 | 6.4–6.7 |
| 4 | 7.0–7.3 |
| 5 | 7.5–7.8 |
| 6 | 8.1–8.4 |

我们知道当时的 12 个月 Libor 利率等于 5%.

(a) 计算接下来 5 年的 FRA 利率, 开始于一个 $1 \times 2$FRA.

(b) 计算贴现债券的价格 $B(t_0, t_i)$, 其中 $t_i = 1, \cdots, 6$ 年.

(c) 计算期限为 0 至 6 年的收益率曲线.

(d) 计算票面收益率曲线.

3. 利用练习 2 的数据, 计算:

(a) 一个 2 年后开始、期限为 3 年的远期互换的买价/卖价, 互换交换的是 12 个月 Libor.

(b) 即将在时间 2 交割的附息债券的远期价格. 这个债券的息票率为 7%, 到期日为 2 年.

# 第 14 章　波动率工程、波动率互换和波动率交易工具

## 14.1　引　　言

对于在财务报表或交易账簿中有各种中性波动率敞口的市场参与者来说, 涉及纯波动率交易的流动性工具非常有用, 第 10 章讨论的古典期权策略在这方面就有严重的缺陷. 交易商建立一个头寸或对冲一种风险时, 他希望标的资产的随机变化对头寸的影响是*已知*的. 标的可能是随机的, 但一个明确定义的合约或头寸的*支付函数*必须是已知的. 大多数古典波动率策略的支付函数随标的风险而变化, 大多数波动率工具在分离这些风险时都具有*缺陷*. 即使交易商预测准确, 他也可能发现由于其他变量的变化标的支付函数已经发生了变化. 因此, 古典波动率策略不能为波动率敞口提供令人满意的对冲. 本章主要讨论这个问题出现的原因以及可能的解决方法.

直到几年前, 传统的波动率交易都是买卖看涨期权和看跌期权的投资组合、跨式期权和宽跨式期权, 然后尽可能地 delta 对冲这些头寸. 但是, 这样的头寸不是*纯*波动率的. 于是人们开始寻找支付函数*只*取决于波动率风险的波动率工具. 方差互换和波动率互换就是两种纯波动率工具. 本章将讨论这些新工具. 至少有两方面的原因使得人们对这些新工具感兴趣. 首先, 对市场参与者来说, 波动率是一种非常重要的风险, 因此必须理解这种风险的对冲和定价方法. 其次, 关于波动率互换的讨论是设计新工具时需要遵循的基本原理的一个很好的例子.

本章使用*方差*互换而不是波动率互换进行讨论. 虽然市场上一般用*波动率*这一术语, 但为了计算方便, 用波动率的平方——*方差*更合适. 一个随机变量的方差是这个随机变量的二阶中心矩, 它可以很自然地从本章的相关公式得出. 波动率 (也就是标准差) 工具需要凸性调整, 而方差工具一般不需要. 因此, 当我们提到 vega 时, 指的是*方差*vega, 这是期权价格关于 $\sigma^2$ 而不是 $\sigma$ 的灵敏度. 事实上, 在本章的讨论中, 波动率和方差这两个术语是可以替换使用的.

## 14.2　波动率头寸

波动率头寸可以用来对冲波动率敞口或预测波动率未来发展趋势. 构成这些头寸的工具要尽可能地分离波动率风险. 为说明后面讨论的背景, 先介绍两个描述

传统波动率头寸的例子.

### 14.2.1 交易波动率期限结构

我们已经看过几个有关利率期限结构变动策略的例子, 称它们为曲线陡峭交易或曲线平直交易. 显然也可以就波动率期限结构建立类似的头寸. 市场上的波动率交易有不同的到期日. 像利率期限结构一样, 我们可以买进一个"到期日"并卖出另一个"到期日", 参考下面的例子.[①]

**例**

一个交易商说他正考虑卖出短期 25delta 欧元看跌/美元看涨期权, 并买入一个长期跨式期权. 昨天买入一个 3 个月跨式期权——资金来自卖出两个 25delta 的一个月看跌期权——要花费 3.9%的期权费.

因为卖出短期波动率所得资金多于买入长期期权的成本, 所以这些波动率交易对投资者来说很有吸引力.

在这个例子中, 交易商关心的不是资产价格水平或回报, 而是价格的波动率. 交易商用卖出一个时间区间的波动率得到的资金去买另一个区间的波动率.

显然, 交易商认为短期欧元波动率将落后于长期欧元波动率. 即使他们的预测是准确的, 这些头寸能在多大程度上满足他们的需求呢? 我们将发现这个头寸的支付函数是随着标的欧元/美元汇率的变化而变化的.

### 14.2.2 不同工具间的波动率交易

第二个例子与利率有关并包含了另一个波动率的"套利"头寸. 如果交易商买入一个风险的波动率并卖出另一个不同风险的相关波动率, 那么这两个波动率就由不同工具产生, 而不像前面的例子那样属于同一工具在不同时间段的波动率.

**例**

交易商正研究欧元上限–下限跨式期权和互换跨式期权的波动率之间的差, 想从 7 年间 5%的波动率差中获益. 所有权交易商卖出一个 6 年后开始、波动率接近 15%的 2 年期上限–下限跨式期权. 对于超过 5 年期、波动率为 10%的互换跨式期权, 这项交易提供了一个很好的替代品. 这个波动率差额的历史水平大概是 2%.

上限–下限和互换是利率工具, 两者既有相似之处也有不同. 我们将在第 15 章对它们进行详细讨论. 卖出一个上限–下限跨式期权本质上是卖空利率波动率. 上例中, 交易商可以对 15%的波动率建立这一头寸. 另一方面, 买入一个互换相当于持有一个波动率多头头寸, 它的波动率是 10%, 那么两个波动率的差为 5%. 例中指出这个波动率差的历史水平大概是 2%. 因此, 通过卖出这个 5%的波动率差, 交易商将从未来这两种工具波动率差变小的趋势中获益.

---

① 这里的"套利"是金融市场意义上而不是理论分析意义上的套利. 下面的套利头寸可能是零成本的并有一个相对较高的成功概率, 但收益绝对不是无风险的.

这个头寸的支付随利率的变化而变化. 即使波动率按人们预期的趋势变动, 依赖于利率水平的波动率也可能会产生出人意料的支付.① 我们下面就讨论为什么这样的波动率头寸有严重的缺陷且需要极其精细的风险管理, 之后我们将考虑纯波动率头寸.

## 14.3　波动率支付的不变性

在前面几章里, 利用凸性把*波动率*作为一种风险分离出来. 第 8 章和第 9 章展示了怎样把标的资产的波动率转化成 "现金", 从而迈出了波动率工程的第一步.

交易商可以用第 8 章和第 9 章讨论的方法对由波动率变化产生的敞口进行对冲和风险管理. 然而, 这些头寸还受波动率之外*其他*一些变量的影响. 下面我们考虑某投资者持有的投机性头寸.

设 $S_t$ 为一风险因素, 并假设此*投资者*在 $t_0$ 时买入 $S_t$ 在未来 $[t_1, T]$ 期间的波动率, 其中 $T$ 为合约到期日. 像每个多头头寸一样, 这意味着这个投资者期望这段时间的*现实*波动率增大. 如果 $[t_1, T]$ 期间的现实波动率超过 $t_0$ 时 "购买" 的波动率, 投资者就有收益. 从这个意义上讲, 这跟其他的多头头寸没有太大区别. 例如, 一个交易商买一只股票, 如果股价上涨, 他将受益. 他可以买一个固定接受方互换, 如果互换价值上升 (互换利率下降), 他将获利. 类似地, 现在的情况是我们收到一个 "固定" 的波动率, 并且当真实波动率超过这个水平时就会有收益.

通过买入看涨看跌期权、跨式期权或宽跨式期权, 然后 delta 对冲这些头寸, 最终交易商一般会持有一个多头头寸. 如果现实波动率增加, 这个头寸就会有收益, 正如第 8 章和第 9 章所讲的. 然而, 这种波动率头寸和其他工具如股票、互换、远期利率协议等的头寸有一个主要的不同之处. 图 14-1 所示的是一个股票多头头寸,

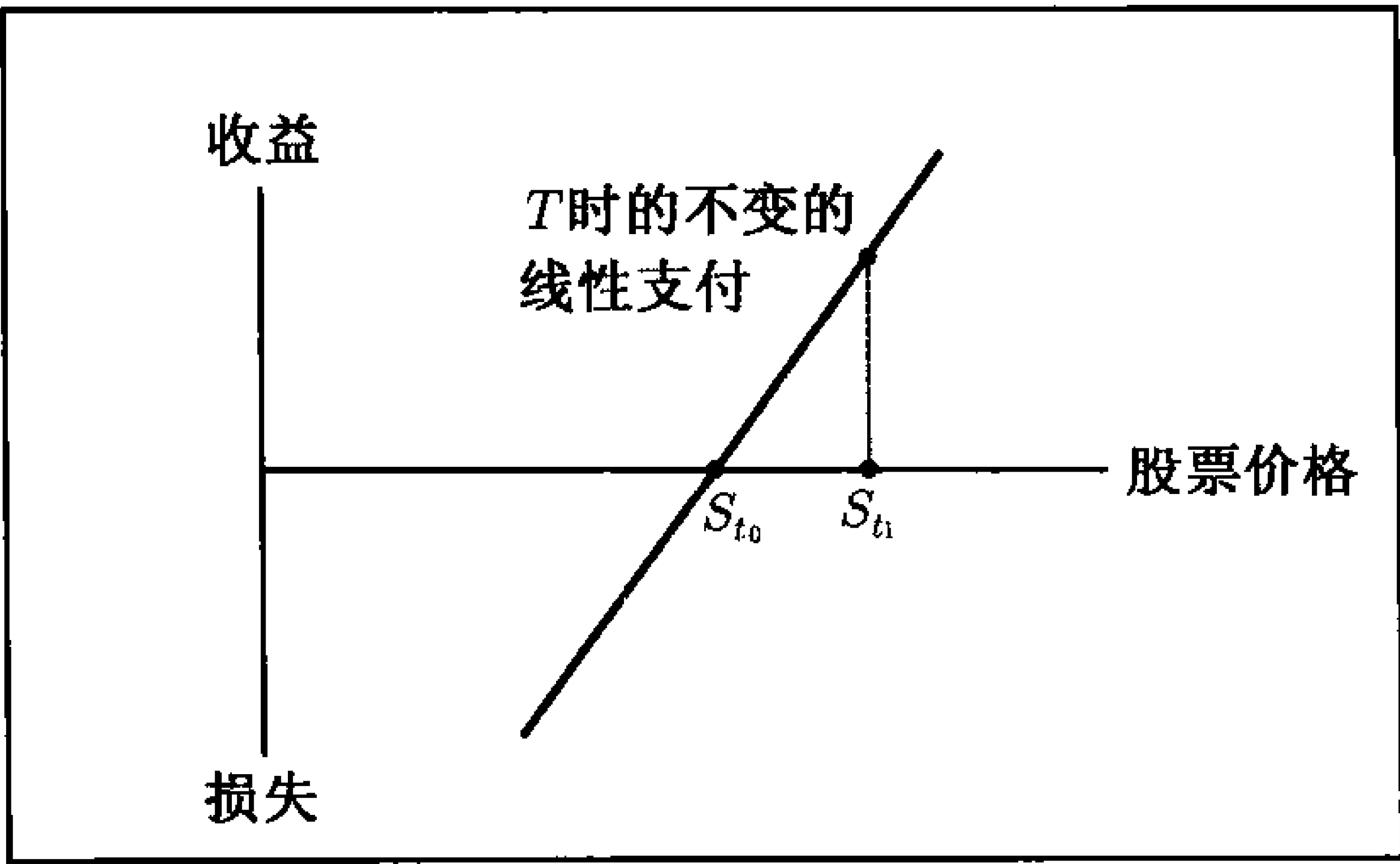



图　14-1

① 必须指出, 上限–下限波动率和互换波动率不同. 事实上, 这个 2% 或 5% 的差额很可能是由它们之间的不同之处引起的. 另外, 波动率微笑的存在使这种头寸更加复杂.

建立这个头寸所需要的资金来自货币市场贷款. 随着股票价格上涨, 这个头寸会有收益 $S_{t_1}-S_{t_0}$, 这个支付已知且只取决于 $S_{t_1}$. 事实上, 它关于 $S_t$ 是线性的. 图 14-2 是一个短期贴现债券头寸. 收益率减小, 头寸就有收益. 同样如果不考虑凸性收益, 根据收益率 $y_t$ 的变化, 就能知道这个头寸的收益或损失是多少.

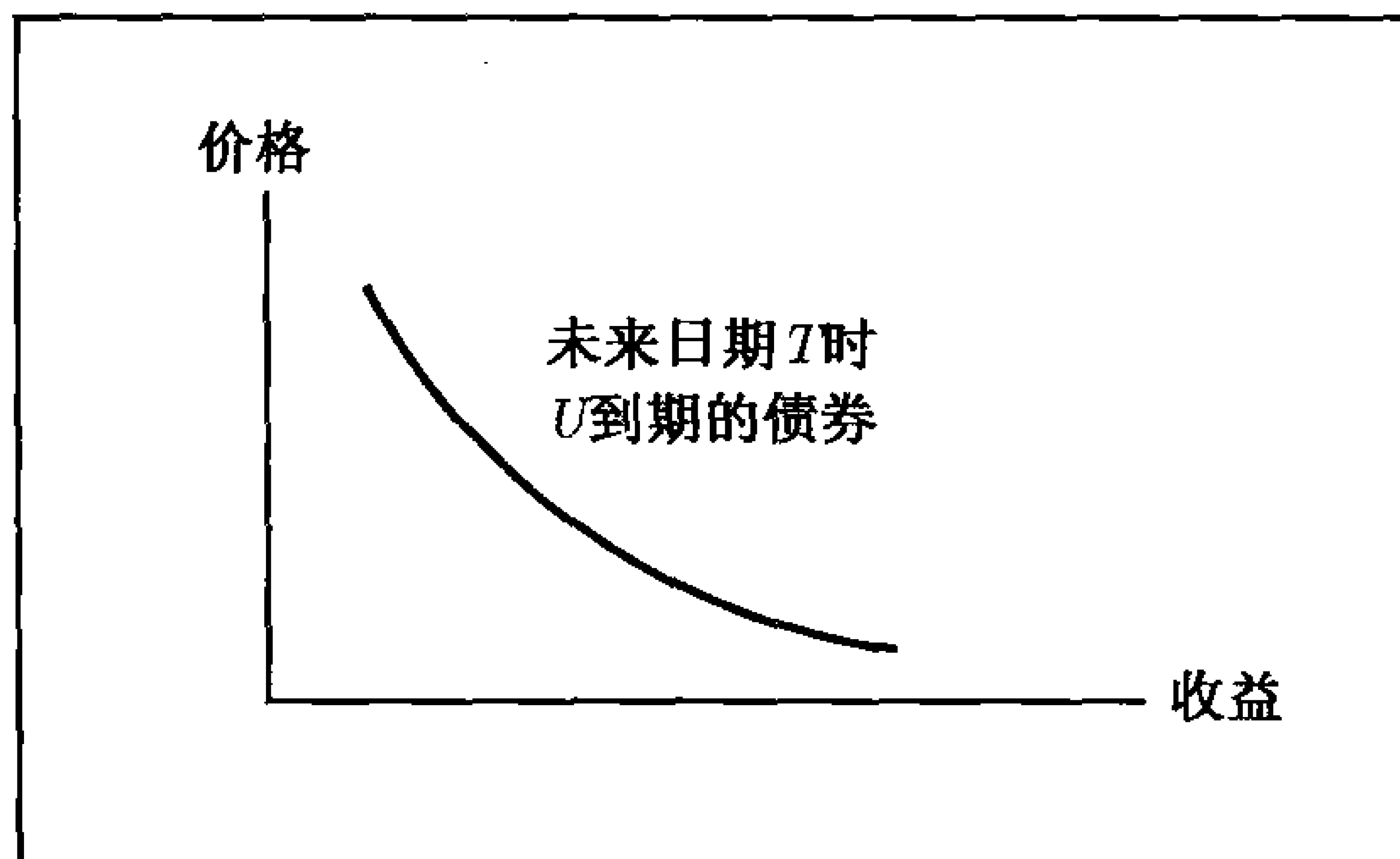



图 14-2

通过跨式期权建立的波动率头寸与上面提到的头寸有根本的不同. 原因在于波动率头寸的支付不仅仅取决于波动率, 还依赖于其他变量. 譬如: (1) 利率; (2) 标的资产价格; (3) 隐含波动率水平. 这些都可能导致波动率头寸在同一现实波动率水平下产生不同的支付.

另一方面, 方差 (波动率) 互换是纯波动率头寸. 用这些工具建立头寸的潜在收益或损失只取决于到期日之前的现实波动率. 本章讨论波动率工程怎样建立这种合约, 并进一步研究它们的定价和对冲. 我们从有缺陷的波动率头寸开始讨论.

### 14.3.1 不完善的波动率头寸

金融市场上, *波动率头寸*通常理解为一个通过买卖跨式期权建立的静态头寸, 或者一个运用跨式期权或期权的动态保持头寸. 正如前面所说, 这些波动率头寸不适合于波动率敞口定价、对冲或风险管理. 本节将研究这一问题的原因. 考虑由一个动态对冲了的单一看涨期权构成的简单头寸.

#### 一个动态波动率头寸

考虑一个波动率敞口, 它通过使用一个标准期权进行动态头寸保持. 为了简单起见, 假设满足 Black-Scholes 条件, 股票没有分红, 利率 $r$ 和隐含波动率 $\sigma$ 都是常数, 没有交易成本且标的资产服从几何布朗运动过程. 那么一个欧式看涨期权的无套利价值 $C(S_t,t)$ 可由 Black-Scholes 公式给出

$$C(S_t,t)=S_t\int_{-\infty}^{d_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-r(T-t)}K\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x, \tag{1}$$

这里 $S_t$ 是标的资产的即期价格, $K$ 是交割价. $d_i(i=1,2)$ 由下式给出

$$d_i = \frac{\log \frac{S_t}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{2}$$

不失一般性, 令

$$r = 0. \tag{3}$$

这样就简化了某些表达式, 并使讨论容易理解.①

现在考虑如下简单试验. 一个交易商用 Black-Scholes 结构建立一个关于隐含波动率的动态对冲多头头寸. 隐含波动率上升. 假设交易商用相应的方差 vega 来追踪这个头寸的收益或损失. 在下列特定的情况下, 该交易商可能的收益将会是多少? 考虑下列简单情形.

(1) 头寸的参数如下:

$$\text{到期时间} = 0.1, \tag{4}$$

$$K = S_{t_0} = 100, \tag{5}$$

$$\sigma = 20\%, \tag{6}$$

令初始时间 $t_0$=0.

(2) 交易商预期隐含波动率会从 20%上升到 30%并考虑建立一个波动率多头头寸.

(3) 为了购买这个波动率头寸, 交易商借入数量等于 $100C(S_t, t)$ 的资金并在 $t_0$ 时买入 100 份看涨期权, 筹资成本 $r = 0$.②

(4) 接下来通过每份期权卖空 $C_s$ 单位的标的来 delta 对冲这个头寸, 得到如图 14-3 所示的敞口.

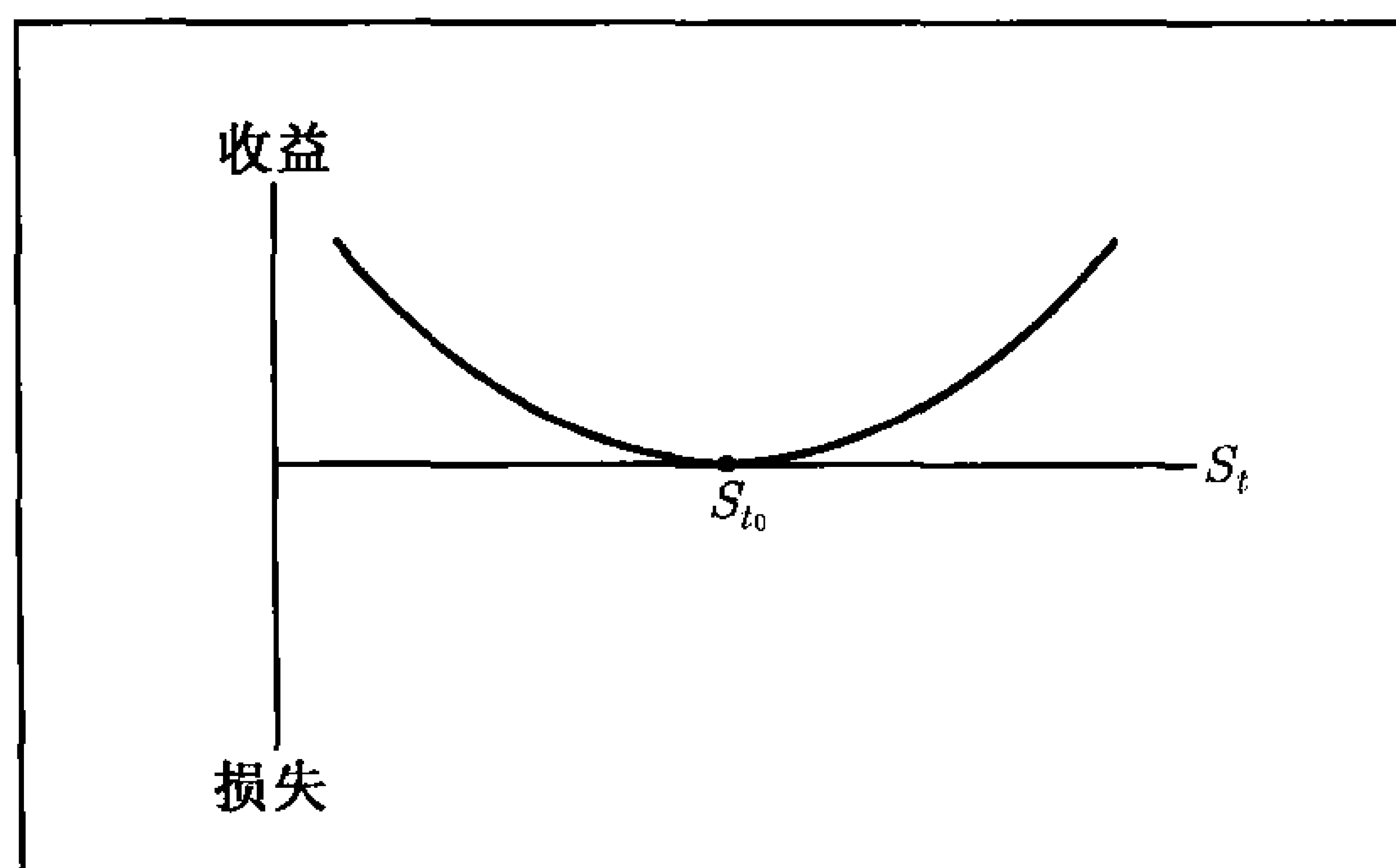



图　14-3

① 对于讨论波动率交易来说这是一个有用的假设.
② 同样的头寸也可以通过购买看跌期权来建立, 我们这里仅以看涨期权为例.

在这个例子中, 距离期权到期日大概有 1.2 个月, 期权是平价的并且初始隐含波动率是 20%.

结果表明, 这种情况下, 即使交易商的期望成为现实, 这个波动率头寸的支付也可能因为 $S_t$ 而发生重大变化. 隐含波动率可能会如预期的那样从 20%上升到 30%, 但头寸的支付可能不是预期的数量. 下面的计算说明了这个问题.

**例**

我们可以用Mathematica计算相关的希腊字母, 并作出支付曲线. 首先, 得到看涨期权的初始价格为

$$C(100, t_0) = 2.52, \tag{7}$$

乘以 100 得整个头寸的价值为 252 美元. 然后, 通过计算 $C(S_t, t)$ 关于 $S_t$ 的偏导数在 $S_{t_0}$=100 的值, 乘以 100 得到头寸的隐含 delta 为

$$100\left(\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t}\right) = 51.2. \tag{8}$$

因此, 头寸delta为 +51. 为了对冲这个敞口, 交易商需要卖空 51 单位的标的, 使净delta敞口近似为 0.

接下来我们用已给的数据计算头寸在 $t_0$ 时的 gamma 和 (方差)vega:

$$\text{gamma} = 100\left[\frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}\right] = 6.3, \tag{9}$$

$$\text{方差vega} = 100\left[\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial \sigma^2}\right] = 3152. \tag{10}$$

已知 (隐含) 方差的变化时, 期权价值的变化可由下式近似给出

$$100[\partial C(S_t, t)] \cong (3152)\partial\sigma^2. \tag{11}$$

这意味着在其他量不变的情况下, 如果实际波动率从 20%突然变到 30%, 期权价格的瞬时变化将取决于这些数的乘积, 预期值为

$$100[\partial C(S_t, t)] \cong 3152(0.09 - 0.04) \tag{12}$$

$$= 157.6. \tag{13}$$

换句话说, 如果其他量保持不变, 这个头寸的预期收益大概是 158 美元.

交易商买进隐含波动率, 期望它会增大并且它也确实增大了. 所以如果波动率的确从 20%上升到 30%, 交易商就一定能赚到 157.6 美元吗? 这是不一定的, 我们来看一下原因.

即使是在这个简化的 Black-Scholes 模型下,(方差)vega 也是 $S_t, t, r$ 和 $\sigma^2$ 的函数, 其他量不再是常数, 并且 $S_t$ 可以服从任何可以想到的随机过程. 但最重要的一点是, $S_t$ 的变化也会导致 vega 的变化. 右表给出了这一结构中依赖于 $S_t$ 的 (方差)vega 的几个可能值.[①]

| $S_t$ | vega |
|---|---|
| 80 | 0.055 8 |
| 90 | 7.466 6 |
| 100 | 31.523 4 |
| 110 | 10.621 5 |
| 120 | 0.541 5 |

因此, 如果交易商的预测准确, 隐含波动率增大到 30%, 但同时标的资产价格远离交割价$S_{t_1}$=80, 那么相同的计算近似为

$$\text{vega}(\partial\sigma^2) \cong 5.6(0.09 - 0.04) \tag{14}$$

$$= 0.28. \tag{15}$$

因此, 交易商几乎没有收益, 而不像前面期望的收益为 157.6 美元. 事实上, 如果建立此波动率还需要一定成本的话, 交易商可能会有损失. 原因很简单: 随着 $S_t$ 的变化, 期权关于隐含波动率的灵敏度, 也就是 vega 也会发生变化, 因为它是 $S_t$ 的函数. 因此最终支付就会与交易商期望的大不相同.

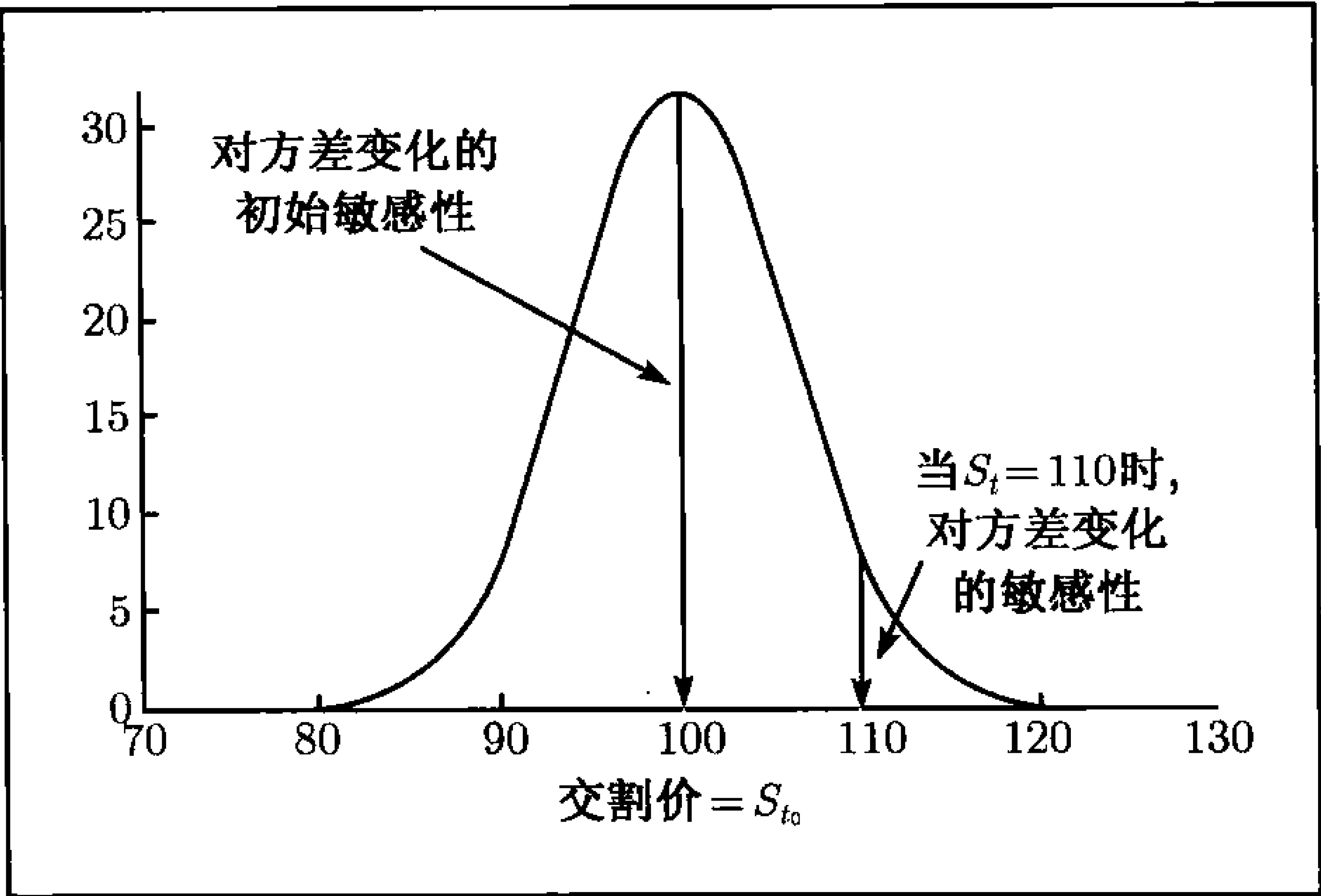



图 14-4

图 14-4 中画出了偏导数

$$100\frac{\partial\ \text{方差 vega}}{\partial S_t} \tag{16}$$

的图形, 从图中可以更详细地看到当 $S_t$ 变化时, 头寸的灵敏度怎样变化. 在当前情况下我们看到, 只要 $S_t$ 保持在交割价 $K$ 的附近, 交易商就有波动率变化的敞口. 但是, 一旦 $S_t$ 远离 $K$, 这个敞口就迅速下降. 交易商认为他有一个 (方差) 波动率头寸, 但实际上这个头寸是有成本的, 并可能因为交易发生后标的的变化而没有任

何方差敞口. 因此, 这种古典波动率头寸在进行波动率交易或对冲波动率敞口方面是有缺陷的.

### 14.3.2 波动率对冲

如果把这些头寸作为一个对另一工具中常值波动率敞口的对冲, 结果也可能不尽如人意. 由上面的讨论知, $S_t$ 的变化可以使对冲几乎完全消失, 从而导致交易商最终持有一个裸露的波动率头寸. 有波动率敞口的机构可能仅仅通过对冲认识到: 随着时间的推移, 波动率对冲可能会因为与波动率的波动无关的变化而贬值.

这种头寸的贬值还可能是由更多的原因而不仅仅由 $S_t$ 的变化引起. 现实中还有: (1) 微笑效应; (2) 利率因素; (3) 某些工具中相关参数的变化. 这些量的变化也可以导致古典波动率头寸的支付不同于交易商预期的水平.

### 14.3.3 一个静态的波动率头寸

如果一个动态的 delta 中性期权头寸不受 $\sigma^2$ 变化的影响, 并因此不能成为一个对波动率风险的有效对冲, 我们会问: 静态头寸会不会好一些?

一个典型的有波动率敞口的头寸是买入 (卖出)ATM 跨式期权, 这里沿用 14.3.1 中例子的数据, 图 14-5 表示的是交割价为 100 的一个 ATM 看涨期权和一个 ATM 看跌期权的联合支付. 这个头寸由两个标准期权构成且仍可能具有类似的缺陷. 下面的例子对此进行了详细讨论.

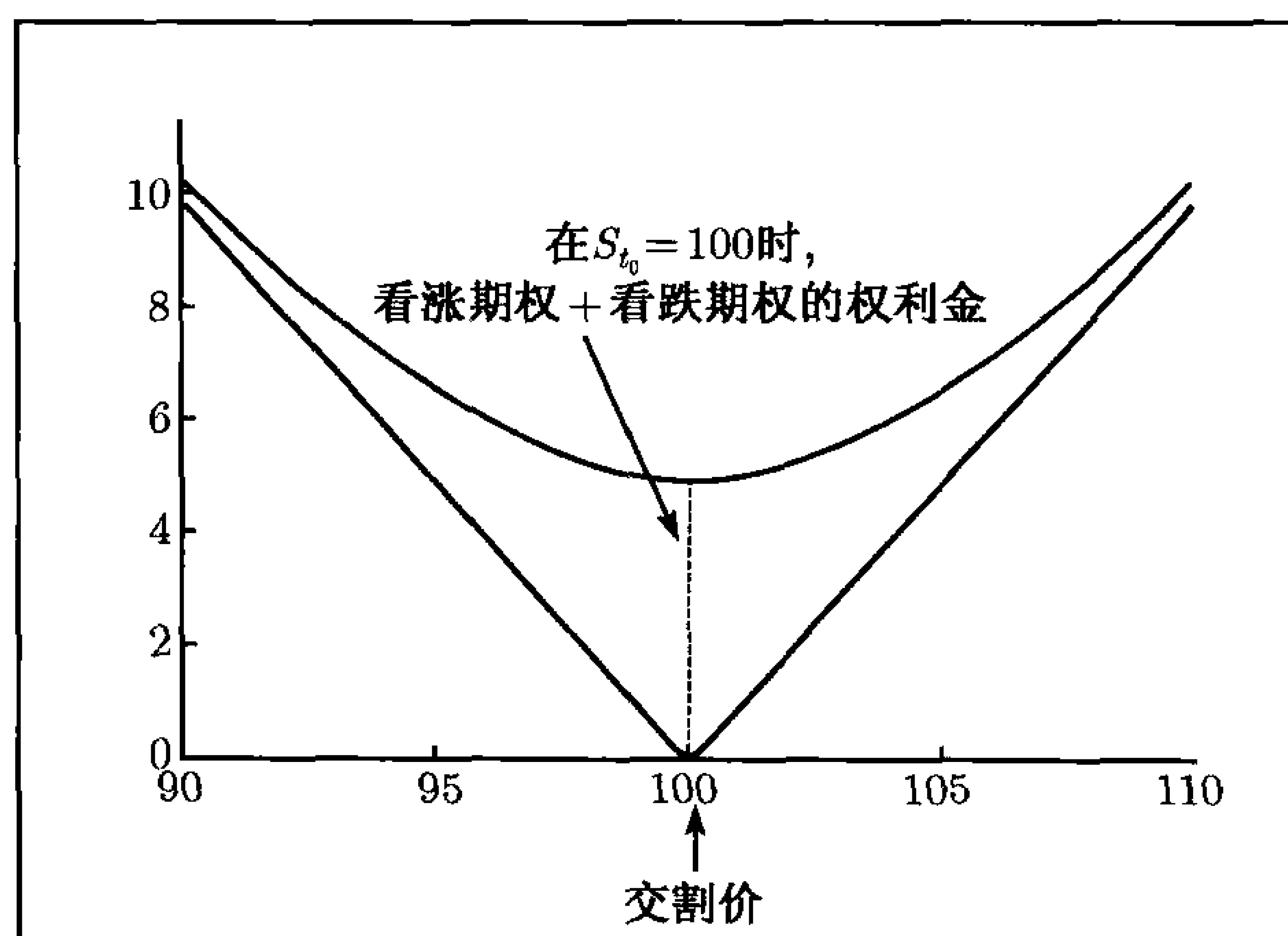



图 14-5

**例**

和前面例子一样, 我们选用如下数据:

$$S_{t_0} = 100, \quad r = 0, \quad T - t_0 = 0.1. \tag{17}$$

初始波动率是 20%意味着

$$\sigma^2 = 0.04. \tag{18}$$

我们来研究这个头寸关于某些变量的灵敏度. 通过求偏导数计算投资组合

$$V(S_t, t) = 100\{\text{ATM看跌} + \text{ATM看涨}\} \tag{19}$$

的方差vega, 求偏导数

$$\text{跨式vega} = 100\frac{\partial V(S_t, t)}{\partial \sigma^2}, \tag{20}$$

然后把公式中的$S_t, t, \sigma^2$代入适当的值. 由我们感兴趣的一些$S_t$得到下列灵敏度因子:

| $S_t$ | vega |
|---|---|
| 80 | 11 |
| 90 | 1 493 |
| 100 | 6 304 |
| 110 | 2 124 |
| 120 | 108 |

根据这些数值, 如果 $S_t$ 保持在 100 且波动率从 20%升到 30%, 那么静态头寸的价值近似增加了

$$\partial\text{跨式期权} \cong 6304(0.09 - 0.04) \tag{21}$$

$$= 315.2. \tag{22}$$

这个收益大概是前面例子中的两倍. 跨式期权对于波动率的变化有更大的灵敏度. 但期权关于波动率变动的反应同样也不是不变的, 它依赖于影响波动率的外部因素. 上表中的数据说明了如果 $S_t$ 变到 80, 即使交易商的期望成为现实, 波动率从 20%升到 30%, 这个头寸的盯市收益也将降到大约 0.56.

图 14-6 所示的是跨式期权在不同的 $S_t$ 下对隐含波动率的灵敏度, 这个波动率头寸受外部变量影响. 然而, 它跟动态保持投资组合有一个重要的不同之处: 运用

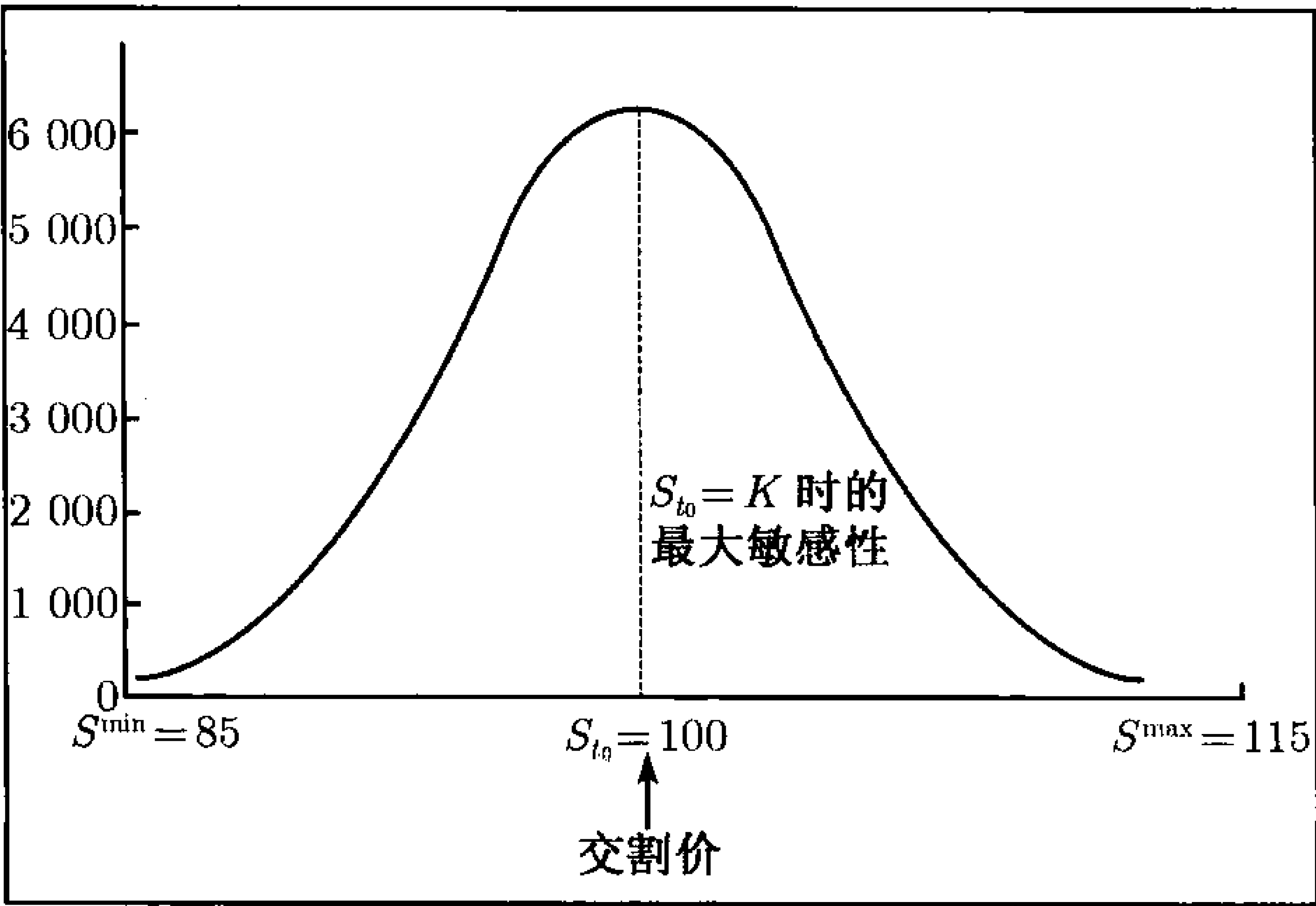



图　14-6

跨式期权的静态非 delta 对冲头寸会从 $S_t$ 的实际变化中受益. 例如, 如果 $S_t$ 直到到期日都保持在 80, 跨式期权的看跌期权将支付 20, 这个静态波动率头寸就会有收益. 这与区间 $[t_0, T]$ 中 $S_t$ 的变化引起头寸的 vega 变化没有关系.

## 14.4 纯波动率头寸

有效对冲波动率风险或建立波动率头寸的关键是用已存在的流动性工具完全分离出"波动率". 换句话说, 我们必须构造一个合成工具, 这个合成工具的价值只随波动率变化, 而不受标的波动率之外的其他变量的影响. 这样就可以用这个合成工具来对冲波动率风险或建立波动率敞口. 这种波动率工具非常有用.

首先, 由第 11 章和第 12 章知道, 通过运用不同交割价的期权可以产生我们想要的任何支付——如果交割价范围很广且市场完全. 因此, 我们原则上应该能够运用合理选择的期权组合来产生纯波动率工具.

其次, 在一个期权头寸中, 一旦 $S_t$ 远离交割价, 头寸 vega 就迅速下降. 那么, 把不同交割价的期权适当地组合起来, 就能得到一个 vega 对 $S_t$ 的变化不太灵敏的期权组合. 形象地说, 就是在一些光滑曲线的每一条上取一小段, 然后把这些小段结合起来得到我们想要的一条近似水平的直线.

完成这些步骤之后, 就可以构造纯波动率头寸了. 图 14-7 给出了 3 个标准欧式期权的 vega 图形, 这 3 个期权交割价分别为 $K_0$=100, $K_1$=110, $K_2$=120. 它们除了交割价不同, 其他各方面都一样, 其中有两个是价外期权. 注意到正如前面讨论的, 每个期权的方差 vega 对 $S_t$ 的变化都很灵敏. 现在, 如果把这 3 个看涨期权加起来构成一个投资组合, 结果会怎样呢? 投资组合

$$V(S_t, t) = \{C(S_t, t, K_0) + C(S_t, t, K_1) + C(S_t, t, K_2)\} \tag{23}$$

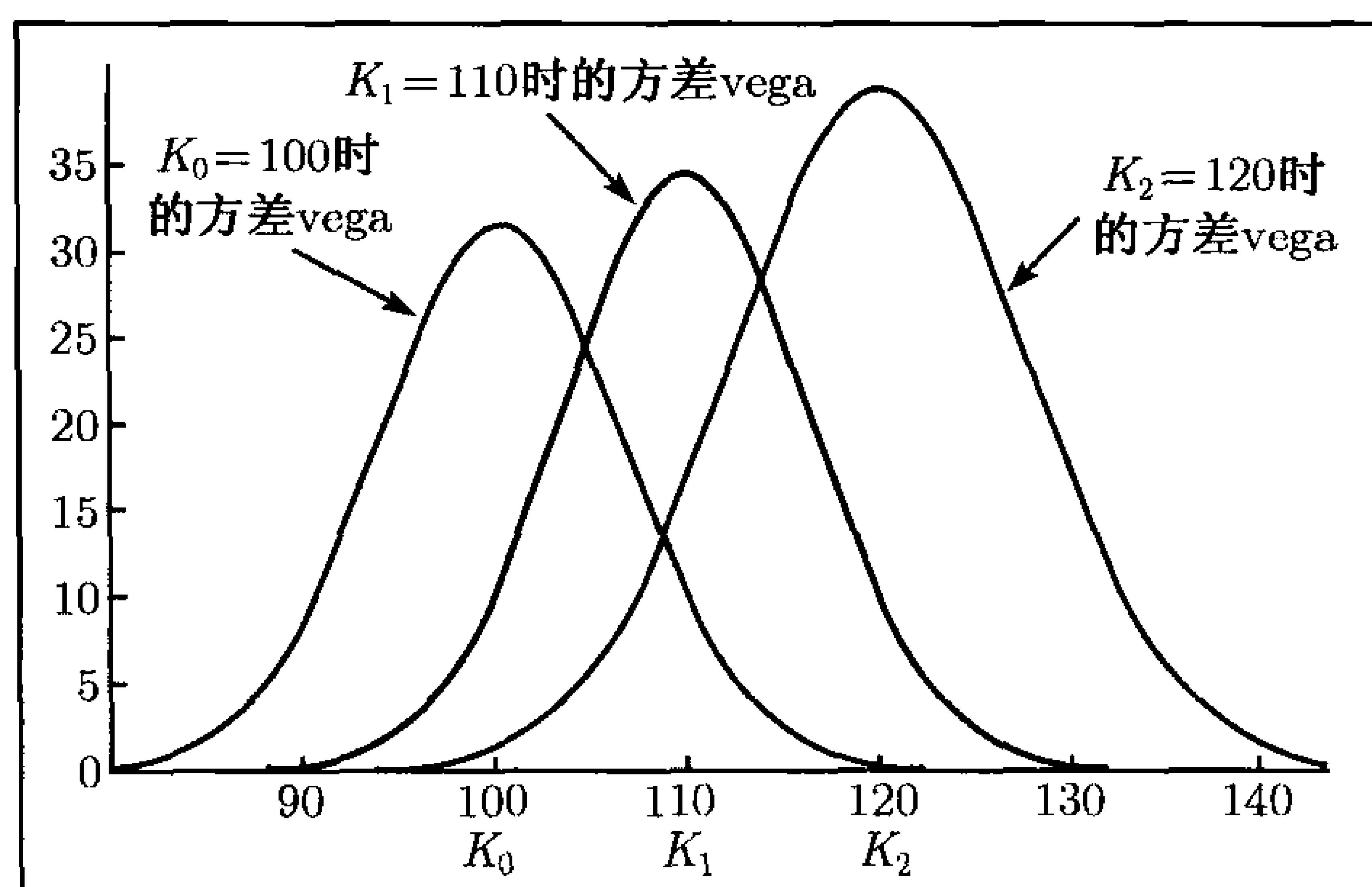



图 14-7

的灵敏度还是随 $S_t$ 变化, 但是变化得比较平稳了. 由此可见我们的思路是正确的, 只不过前面的投资组合不是所选 3 个期权的最优组合. 事实上, 根据图 14-7, 我们应该把这 3 个期权根据它们各自的交割价按不同的权重相加. 期权价外的程度越高, 它的权重就越小, 即它在投资组合中占的比例越大.

因此, 考虑每个期权权重反比于交割价 $K$ 的平方而构成的新的投资组合

$$V(S_t,t)=\frac{1}{K_0^2}C(S_t,t,K_0)+\frac{1}{K_1^2}C(S_t,t,K_1)+\frac{1}{K_2^2}C(S_t,t,K_2), \tag{24}$$

相关的参数和前面一样. 图 14-8 给出了这个新投资组合的方差 vega. 考虑一个适当的 $\varepsilon>0$ 及范围

$$K_0-\varepsilon<S_t<K_2+\varepsilon. \tag{25}$$

从图 14-8 中我们看到在这个范围内投资组合的方差 vega 是近似恒定的. 这意味着可以把更多的期权按它们交割价确定的权重加入到投资组合中来. 下面的例子中, 我们用了 5 个不同交割价的期权.

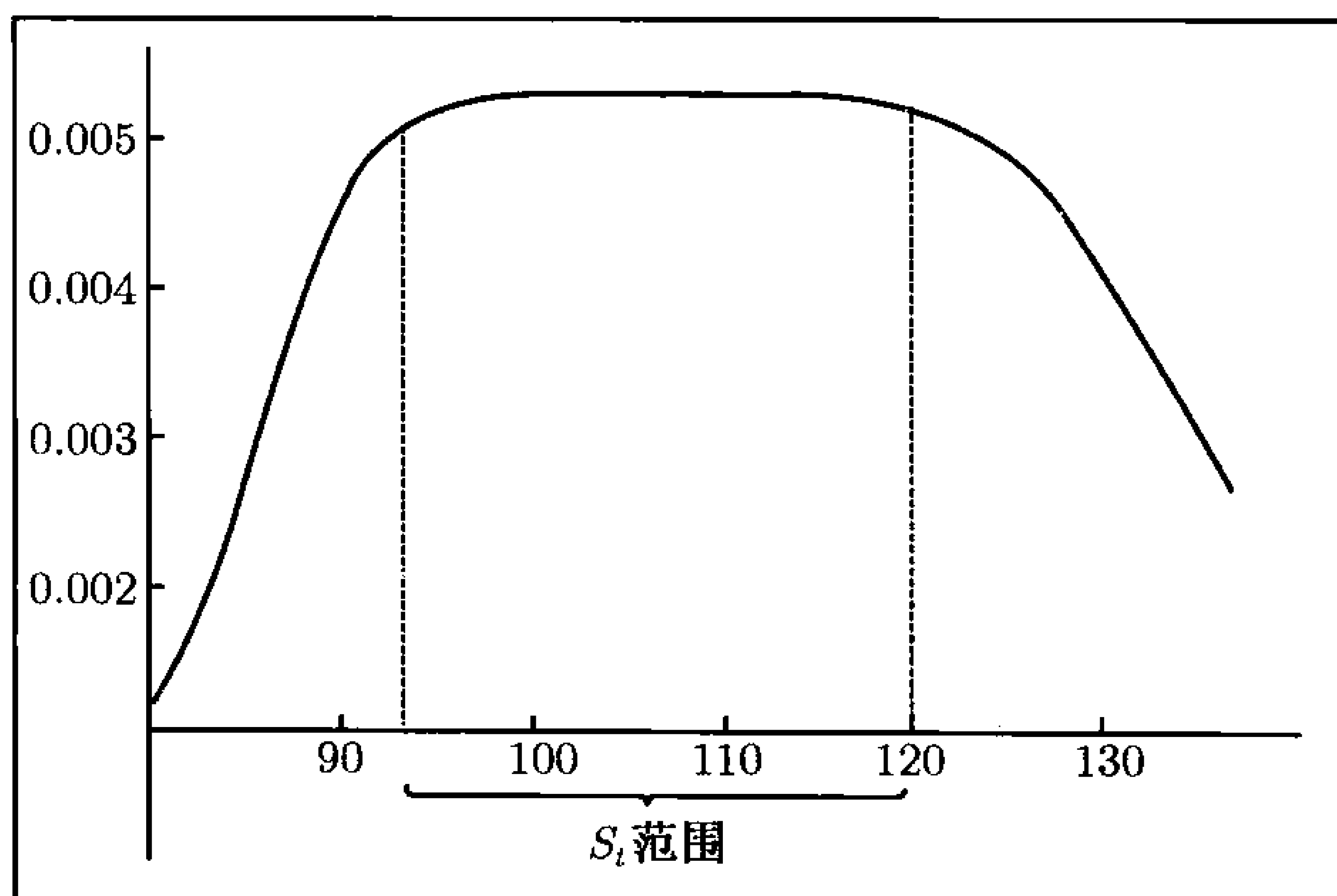



图 14-8

**例**

考虑投资组合

$$V(S_t,t)=\left[\frac{1}{80^2}C(S_t,t,80)+\frac{1}{90^2}C(S_t,t,90)+\frac{1}{100^2}C(S_t,t,100)\right. \tag{26}$$

$$\left.+\frac{1}{110^2}C(S_t,t,110)+\frac{1}{120^2}C(S_t,t,120)\right]. \tag{27}$$

这个投资组合在

$$80-\varepsilon<S_t<120+\varepsilon. \tag{28}$$

范围内近似不变. 在投资组合中加入更多不同交割价的期权可以扩大vega保持近似不变的范围.

事实上, 我们已经找到了构造波动率头寸合成工具的有效途径, 即用交割价变化的流动性期权组合建立头寸, 组合中期权按它们各自的交割价加权相加.

**实际问题**

在构造纯波动率头寸的过程中, 本质上还是沿用以前一直在用的策略. 我们构造了一个合成工具, 但不是为了跟某个工具的现金流相匹配, 而是为了匹配一个特别的灵敏性因素, 得到一个恒定的 (方差)vega.

一旦有了常值 vega 投资组合, 这个投资组合的支付就可以近似表达为 $\sigma^2$ 的线性函数

$$V(\sigma^2) = a_0 + a_1\sigma^2 + \text{small}, \tag{29}$$

其中

$$a_1 = \frac{\partial V(\sigma^2, t)}{\partial \sigma^2}, \tag{30}$$

只要 $S_t$ 在以下范围内:

$$S^{\min} = K_0 < S_t < K_n = S^{\max}. \tag{31}$$

在以上这些条件下, 波动率头寸看起来就像其他多头头寸一样, 有一个正斜率 $a_1$.

常值 (方差)vega 投资组合可以用标准欧式看涨和看跌期权来构造. 此前讨论的有关合成工具的规则在这儿也适用. 合成工具构成元素的流动性是很重要的. 因此, 必须选择流动性好的看涨和看跌期权. 我们前面的讨论只涉及看涨期权, 实际中也用到看跌期权. 这样就有两个难题: 一是微笑效应; 二是有关流动性的问题.

1. 微笑效应

假设在 $t_0$ 时建立一个投资组合, 这个投资组合只要当 $S_t$ 保持在一个合理的范围内,

$$S^{\min} < S_t < S^{\max}, \tag{32}$$

它的 vega 就不变. 在这些条件下, 这个投资组合由具有不同 "价值" 性质的期权构成, 如果有波动率微笑的话, 期权定价公式中的波动率参数可能会受交割价 $K$ 的影响. 一般地, 当 $K$ 减小时, 对于固定的 $S_t$, 隐含波动率 $\sigma(K)$ 会增大. 因此, 交易商在建立投资组合之前要正确地确定微笑效应及其建模方法.

2. 流动性问题

从前面的讨论我们知道, 构造合成工具时要选择价外期权, 因为它们的流动性更好一些. 但随着时间的推移, 所选期权的 "价值" 特性发生了变化, 从而影响了其

流动性. 比如它们可能变成价内期权, 因此流动性变差了, 而其他一些原来不在合成里的期权反而有了更好的流动性. 虽然复制组合是静态的, 但如果头寸需要变动时, 成分期权的不流动性可能是一大缺陷.

## 14.5　波动率互换

波动率互换是一种关于 (现实) 波动率的波动有不变敞口的工具. 本节先介绍*波动率互换*的概念, 此后给出研究它的一个简单框架.

方差互换在很多方面都类似于其他互换, 互换双方以*浮动*风险交换合约开始时固定的风险. 所不同的是, 在方差互换合约中, 合约双方交换的不是利率或股票收益, 而是各种风险因子的波动率.

下面我们从技术上讨论波动率 (方差) 互换. 再次指出, 讨论中还是使用标的方差而不是波动率.

### 14.5.1　波动率互换的框架

令 $S_t$ 为标的资产的价格, 名义本金为 $N$ 的方差互换在 $T_2$ 时的支付 $V(T_1,T_2)$ 由下式给出:

$$V(T_1,T_2)=[\sigma^2_{T_1,T_2}-F^2_{t_0}](T_2-T_1)N, \tag{33}$$

这里 $\sigma_{T_1,T_2}$ 是 $S_t$ 在区间 $t\in[T_1,T_2]$, $t<T_1<T_2$ 上的现实波动率, 它类似于一个浮动利率, 且只有在 $T_2$ 时才能观察到. $F_{t_0}$ 是在 $t_0$ 时由市场报价的 "固定" 的 $S_t$ 波动率, 乘以 $(T_2-T_1)$ 就得到了合约期间的波动率. $N$ 是合约开始时确定的名义本金. 在 $t_0$ 时, $V(T_1,T_2)$ 未知. 互换的设立原则是使其支付在 $t_0$ 时的 "期望值"$V(t_0,T_1,T_2)$ 为 0. 这样合约开始时就没有现金交换.

$$V(t_0,T_1,T_2)=0. \tag{34}$$

因此, 一个方差互换类似于一个用 "固定的"$(T_2-T_1)F^2_{t_0}N$ 交换 "浮动的"$\sigma^2_{T_1,T_2}(T_2-T_1)N$ 的普通互换.

方差互换隐含的现金流如图 14-9 所示. 互换合约在 $t_0$ 时设立, 开始日为 $T_1$, 到期日为 $T_2$. "浮动的" 波动率 (或方差) 是 $S_t$ 在整个区间 $[T_1,T_2]$ 上的总波动率

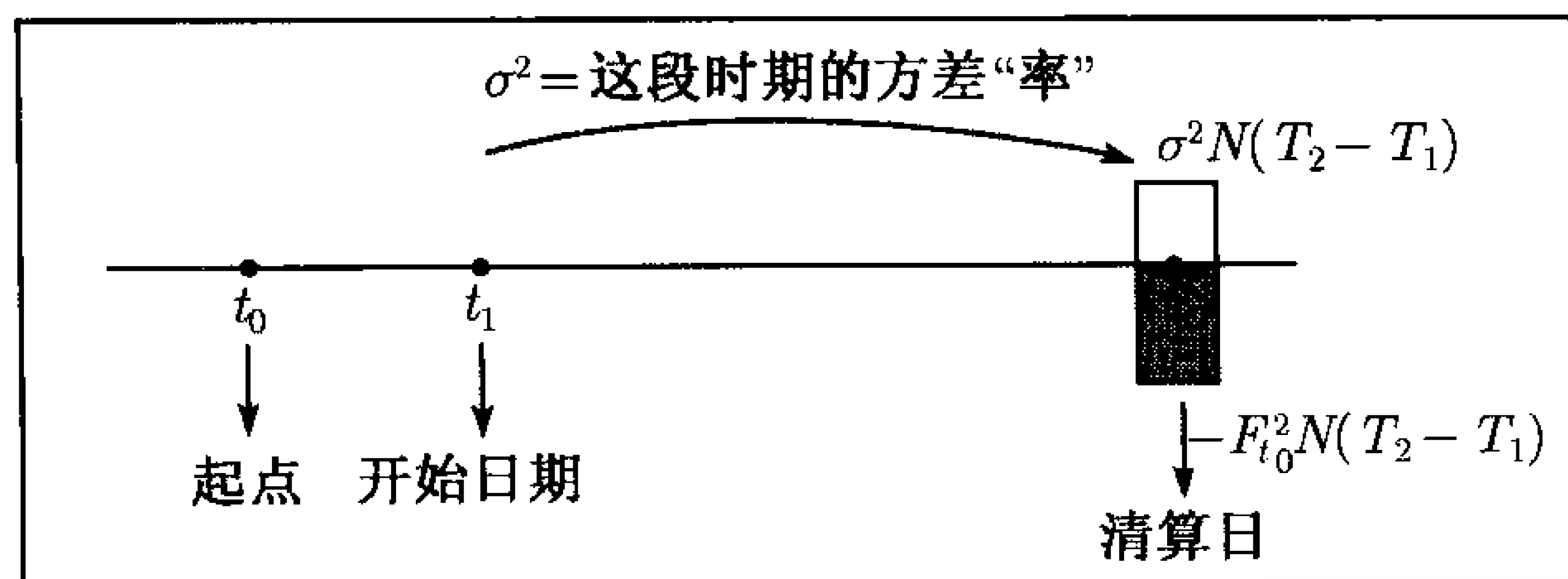



图　14-9

(或方差). $F_{t_0}$ 有下标 $t_0$, 因此它必须在 $t_0$ 时就确定. 下面我们更细致地研究一下构成互换的两支 (leg).

1. 浮动支

波动率头寸要在一个确定的时间区间上建立. 毕竟, 波动率和利率一样是在一个特定时间段上定义的. 因此我们把 $[T_1, T_2]$ 分成一些相等的小区间:

$$T_1 = t_1 < t_2 \cdots < t_n = T_2, \tag{35}$$

其中

$$t_i - t_{i-1} = \delta, \tag{36}$$

然后定义时期 $\delta$ 的实际方差为

$$\sigma_{t_i}^2 \delta = \left[ \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} - \mu\delta \right]^2, \tag{37}$$

$i = 1, \cdots, n$.[①]这里 $\mu$ 是 $S_t$ 一年内的期望变化率. 我们可以令它等于 0 或用其他估计方法. 不管取什么值, $\mu$ 都需要在合约中仔细地定义. 如果 $\mu$ 等于 0, (37) 式的右边就简化为长度为 $\delta$ 的区间上的平方回报率.

把所有小区间上的方差加起来, 得到 $\sigma_{T_1,T_2}^2$ 满足

$$(\sigma_{T_1,T_2}^2)(T_2 - T_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_i}} - \mu\delta \right]^2. \tag{38}$$

因此 $\sigma_{T_1,T_2}^2$ 表示 $S_t$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的实际比例方差.

随着这些小区间的长度越来越小, 即 $\delta \to 0$, 最后的表达式可以写成

$$(\sigma_{T_1,T_2}^2)(T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2} \left[ \frac{1}{S_t} \mathrm{d}S_t - \mu \mathrm{d}t \right]^2 \tag{39}$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \sigma_t^2 \mathrm{d}t. \tag{40}$$

这个公式就定义了实际波动率 (方差). 它是一个随机变量, 可以看作互换的浮动支. 显然, 我们可以在未来任何一个时间区间上定义这样的浮动波动率, 然后跟一个"固定"支交换.

2. 固定波动率的确定

确定了固定波动率 $F_{t_0}$, 就给出了方差互换在 $t_0$ 时的公允价值. 那么我们怎样获得 $F_{t_0}$ 的值呢? 注意到方差互换在 $t_0$ 时的公允价值是设定为 0 的. 因此, $F_{t_0}^2$ 就是使得互换在 $t_0$ 时价值为 0 的方差. 这是确立所有类似合约的基本原理.

---

① 当然还有其他定义短期波动率的方法. 譬如, 最近一些研究用的是一个交易日内价格变化的估计方差.

我们用资产定价的基本定理, 试图寻找一个适当的无套利测度 $\tilde{p}$ 使得

$$E_{t_0}^{\tilde{P}}[\sigma_{T_1,T_2}^2 - F_{t_0}^2](T_2 - T_1)N = 0. \tag{41}$$

为了寻找这个测度 $\tilde{p}$, 可以假定市场是完全的.

假设货币市场上无风险连续复利即期利率为常数 $r$. 那么随机过程 $\sigma_{T_1,T_2}^2$ 是 $S_u, T_1 \leqslant u \leqslant T_2$ 的非线性函数:

$$\sigma_{T_1,T_2}^2(T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \mu\mathrm{d}t\right]^2. \tag{42}$$

在某些条件下, 可以运用货币市场上的标准化方法并令 $\tilde{p}$ 为风险中性测度.① 那么在方程 (41) 中, 把期望取到中括号里边然后整理得

$$F_{t_0}^2 = E_{t_0}^{\tilde{P}}[\sigma_{T_1,T_2}^2]. \tag{43}$$

这就得到了定价公式

$$F_{t_0}^2 = \frac{1}{T_2 - T_1}E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \mu\mathrm{d}t\right]^2\right]. \tag{44}$$

因此为了确定 $F_{t_0}^2$, 需要在测度 $\tilde{p}$ 下估计 $\sigma_t^2$ 积分的期望. 相应的离散情况为

$$F_{t_0}^2 = \frac{1}{T_2 - T_1}E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} - \mu\delta\right]^2\right]. \tag{45}$$

给定了一个适当的无套利测度, 估计这个表达式的值并不难, 可以用 Monte Carlo 方法或树方法.

### 14.5.2 一个复制的投资组合

风险中性测度的表达式可以用来进行定价. 但怎样对冲一个方差互换呢? 要构造合适的对冲就要找到一个合适的复制组合. 我们用另一结构来讨论这一内容. 这个结构的优点是其中某些数学工具的金融工程解释很明确. 下面的模型服从 Black-Scholes 假设.

对冲方差互换的关键在于用可观测量来分离 $\sigma_{T_1,T_2}^2$, 这可以通过构造一个合适的合成来实现. 假设 $S_t$ 服从扩散过程

$$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t,t)S_t\mathrm{d}t + \sigma(S_t,t)S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,\infty), \tag{46}$$

① 请读者注意这个合约将在 $T_2$ 时结算.

$W_t$ 是概率测度 $\tilde{p}$ 下的 Wiener 过程, 扩散参量 $\sigma(S_t,t)$ 称为局部波动率. 考虑一个非线性变换

$$Z_t = f(S_t) = \log(S_t). \tag{47}$$

对这个新过程 $Z_t$ 应用 Ito 引理建立动态系统 (也就是随机微分方程 SDE):

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{\partial f(S_t)}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S_t)}{\partial S_t^2}\sigma(S_t,t)^2 S_t^2 \mathrm{d}t, \quad t \in [0,\infty), \tag{48}$$

由此得到

$$\mathrm{d}\log(S_t) = \frac{1}{S_t}\mu(S_t,t)S_t\mathrm{d}t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma(S_t,t)^2 S_t^2\mathrm{d}t + \sigma(S_t,t)\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0,\infty), \tag{49}$$

右端的 $S_t^2$ 项抵消掉了, 合并同类项得到

$$\mathrm{d}\log(S_t) = \left[\mu(S_t,t) - \frac{1}{2}\sigma(S_t,t)^2\right]\mathrm{d}t + \sigma(S_t,t)\mathrm{d}W_t. \tag{50}$$

注意一个有趣的结果: $\mathrm{d}S_t/S_t$ 和 $\mathrm{d}\log(S_t)$ 的微分方程除了$\sigma(S_t,t)^2\,\mathrm{d}t$ 项之外几乎是一样的. 因此将两个方程相减得到

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \mathrm{d}\log(S_t) = \frac{1}{2}\sigma(S_t,t)^2\mathrm{d}t, \quad t \in [0,\infty). \tag{51}$$

这样就分离了瞬时百分比波动率. 但在方差互换中我们需要的是它的积分, 所以把上式两边进行积分得到

$$\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \mathrm{d}\log(S_t)\right] = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\sigma(S_t,t)^2\mathrm{d}t. \tag{52}$$

取左端的积分

$$\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}\log(S_t) = \log(S_{T_2}) - \log(S_{T_1}), \tag{53}$$

然后把 (53) 代入 (52) 整理得

$$2\left[\int_{T_1}^{T_2}\frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t\right] - 2\log\left(\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}}\right) = \int_{T_1}^{T_2}\sigma(S_t,t)^2\mathrm{d}t. \tag{54}$$

如此一来, 我们就成功分离了区间 $[T_1,T_2]$ 上的比例总方差. 如果 $S_t$ 是交易资产, 那么 (54) 左边的表达式就复制了这个方差.

### 14.5.3 对冲

方程 (54) 左端的解释很有意思, 它最终给出了方差互换的一个对冲. 事实上, 该表达式中的积分是现代金融中 Ito 积分的一个很好的例子. 考虑

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{S_t} \mathrm{d}S_t. \tag{55}$$

怎样来解释这个表达式呢?

假设有一个多头头寸, 这个头寸在每个无限小的区间 $\mathrm{d}t$(对所有的 $t$) 上持有 $\frac{1}{S_t}$ 份 $S_t$. 换句话说, 就是在 $t$ 时买入 $\frac{1}{S_t}$ 份标的资产并在一个无限小的区间 $\mathrm{d}t$ 上持有它. 假定在 $t$ 时, $S_t$ 可以从市场上观察到, 那么这个头寸很容易建立. 譬如, 如果 $S_t$=100, 我们就花 1 美元买 0.01 份 $S_t$, 那么随着时间的推移, $S_t$ 将发生 $\mathrm{d}S_t$ 的变化, 即持有这个头寸的每份标的将赚到或损失 $\mathrm{d}S_t$ 美元. 重新调整一下这个投资组合, 因为 $S_{t+\mathrm{d}t}$ 可能与 $S_t$ 不同了, 那么这个投资组合应买入 $\frac{1}{S_{t+\mathrm{d}t}}$ 份标的资产.

这个投资组合在无限小区间 $\mathrm{d}t$ 上的最终收益或损失由下列表达式给出①:

$$\frac{1}{S_t}(S_{t+\mathrm{d}t} - S_t) = \frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t. \tag{56}$$

对整个 $[T_1, T_2]$ 上所有 $\mathrm{d}t$ 小区间进行同样的操作, 得到这个动态保持投资组合的收益或损失为

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{S_t} \mathrm{d}S_t. \tag{57}$$

因此, 积分代表的是一个动态保持投资组合的*交易收益*或损失.②

方程 (52) 左端第二个积分

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}\log(S_t) = \log(S_{T_2}) - \log(S_{T_1}) \tag{58}$$

是关于 $t$ 的一个标准积分, 可以理解为一个*静态*头寸. 在这种情况下, 积分表示的是 $T_1$ 时签订、$T_2$ 时结算的合约的支付. 支付数量为未知的 $\log(S_{T_2})$ 和已知的 $\log(S_{T_1})$ 之差. 这就是 log*合约*, 合约的多头和空头头寸是 $S_t$ 的对数函数.

从某种意义上说, 方程 (54) 的左端给出了方差合约的一个对冲. 如果交易商卖空方差互换, 他也将持有一个动态调整的 $S_t$ 的多头头寸和一个静态 log 合约的空头头寸. 当然这是在市场完全性假设下的结果.

---

① 这里使用 $\mathrm{d}t$ 具有一定有启发意义.

② 事实上, 这个解释可以更一般化, 金融中的随机积分经常具有

$$\int_{T_1}^{T_2} f(S_t)\mathrm{d}S_t$$

这种形式, 这可以理解为*动态*保持 $f(S_t)$ 份价格为 $S_t$ 的标的投资组合的收益或损失.

## 14.6 合约的一些应用

方差 (波动率) 互换显然在建立波动率敞口及对冲方面非常有用. 但每产生一个新的市场, 现有的应用就会有进一步的发展. 这儿我们简要地提一下本章一些概念的进一步应用.

首先, 方差互换的固定支 $F_{t_0}^2$ 可以作为构造新产品的基准. 然而需要注意的是, 这个价格是通过风险中性测度得到的, 并不一定是未来 $[T_1, T_2]$ 上波动率 (方差) 的无偏估计. 就像远期利率协议的市场价格一样, $F_t$ 包含一个风险溢价. 不过它仍然是波动率期权的合理价格.

方差互换的定价决定的波动率不一定与相同时期隐含波动率相同, 而且隐含波动率微笑的存在也使 $F_t$ 不同于 ATM 波动率.

最后, $F_t^2$ 是进行波动率敞口和期权账面风险管理的一个很好指标.

下面的阅读材料描述了波动率市场的发展.

**例**

对冲基金对波动率的关注越来越多, 一个惊人的例证就是纯波动率基金的产生. 但正如专家波动率投资工具的引进那样, 最令人关注的还是常规对冲基金越来越意识到需要对它们的波动率头寸进行管理了.

"由于人们注意到了波动率, 所以他们越来越多地寻求对冲或交易 vega," 一个方向对冲基金的交易者说.

随着对 vega 概念的完全理解, 可转换套利基金也参与了波动率交易. 波动率是可转换债券定价中考虑的主要因素.

投资银行对波动率对冲产生了兴趣, 它们提供了新的直接波动率工具.

波动率互换是新型简单波动率产品的最好例子. 它是对市场波动率下注的现金结算工具, 投资者可以通过它与交易商进行纯波动率交易. 若投资者卖出波动率, 则交易商同意支付特定时期关于一定名义本金的固定波动率. 作为回报, 投资者同意在互换期间支付标准普尔 500 年实际波动率.

在到期日, 将两个收入现金流互相抵扣, 双方交割其差额. 这种类型的产品为对冲基金提供了一种简便的 vega 交易方式, 因此它们提高了这些基金交易波动率的积极性.

标准的波动率交易, 譬如上限和下限使投资者面临标的价格风险. 随着市场上标的资产价格越来越接近交割价, 对冲头寸中的 gamma 效应可能使投资者在对冲中的损失大于收益. 为了控制这种风险, 必须进行仔细的账面管理. 大多数方向对冲基金有很多事要做, 以至于不是总有时间、意向或能力进行传统的波动率交易. "波动率互换把 vega 变成了易于掌握和处理的东西," 一个方向对冲基金评论员这

样说. (IFR, 1998 年 12 月 31)

波动率交易、波动率对冲和套利都正处于发展阶段. 在 14.7 节中, 我们会发现一些与它们有关的新的困难和方法.

## 14.7 波动率

本节涉及4 个有关波动率的概念. 在第 15 章继续讨论波动率微笑之前, 必须把这些概念总结一下并区分清楚.

市场专业人士用术语 "波动率" 时指的是 Black-Scholes隐含波动率. 否则他们会用*实际*波动率或*历史*波动率这样的术语. *局部波动率*和*方差互换波动率*也是行话. 最后, 上限–下限波动率和互换波动率是金融市场上的标准术语.

*隐含波动率*仅仅是 $\sigma$ 的这样一个值, 把它代入 Black-Scholes 公式中能得到市场上观测到的标准期权的公平市场价值. 因此, 在利率衍生产品的情况下把它称为 Black-Scholes*隐含波动率*或 Black*波动率*更准确一些. 市场专业人士可能用不同的公式给期权定价, 不同公式的隐含波动率自然是不同的. 因此隐含波动率是一个随定价公式而定的变量.

"波动率" 的定义如下.

- 首先是关于*实际波动率*, 它最接近统计课程的内容. 在这种情况下, 有一个观测或待观测数据集, 即一个 "样本", $\{x_1, \cdots, x_n\}$, 可以将其看成某个真实概率测度 $P$ 下定义的随机过程 $x_t$ 的可能取值构成的向量. 过程 $x_t$ 有二阶矩

$$\sigma_t = \sqrt{E_t^P[(x_t - E_t^P[x_t])^2]}. \tag{59}$$

我们可以设计一个估计量来估计 $\sigma_t$. 譬如可以令

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^m (x_{t-i} - \bar{x}_t^m)^2}{m}}, \tag{60}$$

这里的 $\bar{x}_t^m$ 是 $m$ 周期的样本平均值:

$$\bar{x}_t^m = \frac{\sum_{i=0}^m x_{t-i}}{m}. \tag{61}$$

这种波动率度量了现实中资产价格或风险因素的真实波动. 本章给出一个应用这个波动率的例子. 前面定义的 $\sigma_t^2$ 表示方差互换的浮动支.

- 第二类是*隐含波动率*.[①]给定观测到的市场价格, 且市场参与者有一个计算这个市场价格的定价公式 (例如 Black-Scholes 公式) 或程序 (例如隐含树).

① 这个定义可能容易引起误解, 因为现在大多数交易商直接按波动率报价, 然后由这个波动率得到期权的公平市场价格.

那么, 隐含波动率就是将其代入到定价公式或程序中后, 恰好能得到公平市场价格的那一个或一系列的波动率. 因此, 如果令 $F(S_t, t, r, \sigma_t, T)$ 是标的为 $S_t$, 利率为 $r$, 到期日为 $T$ 的欧式期权的 Black-Scholes 价格, 那么在 $t$ 时, $\sigma_t$ 表示解如下关于 $\sigma_t$ 的非线性方程得到的隐含波动率:

$$F(S_t, t, r, \sigma_t, T) = \text{观测价格}. \tag{62}$$

这个隐含波动率可能会与实际波动率有很大差别, 因为它包含了交易商对实际波动率所做的许多预期调整. 如果波动率是随机的, 且要在波动率报价上加上风险溢价, 那么隐含波动率可能会与现实波动率有系统性的差别. 违背 Black-Scholes 假设也可能导致二者的不同.

- *局部波动率*用来表示随机微分方程中的函数 $\sigma(\cdot)$,

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(S,t)\mathrm{d}t + \sigma(S,t)S_t\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{63}$$

然而, 局部波动率有一个更确切的意思. 假设标的为 $S_t$ 的、所有交割价为 $K$、到期日为 $T$ 的期权都可以交易, 且相应的无套利价格$\{C(S_t, t, K, T)\}$都能观察到. 那么当相应的随机微分方程可通过 Monte Carlo 或 PDE 定价方法成功地复制了所有可观测的价格时, 函数 $\sigma(S_t, t)$ 就是局部波动率.

换句话说, *局部波动率*是与检验过程有关的概念, 它可以看成是 Black-Scholes 隐含波动率的一般化. 隐含波动率通过 Black-Scholes 公式复制了单个可观测期权价格. 而局部波动率通过某种定价方法复制了所有 $K$ 和 $T$ 的期权价格. 结果, 我们得到的是一个指标为 $K$ 和 $T$ 的*波动率面*, 而不是 Black-Scholes 公式中的单个隐含波动率的值.

- 最后, 本章还涉及*方差互换波动率*, 它指的是未来平均平方偏差的期望. 但是这个期望是关于风险中性测度的, 所以与真实波动率有所不同.

讨论波动率微笑时要涉及这些概念. 显然大多数交易商关心的是隐含波动率, 但是它不能独立于现实波动率而存在. 当然这两个概念之间会有密切的关系. 同样, 随着波动率交易的发展, 越来越多的工具把现实波动率当成某种标的风险因素, 并进一步开发出新的产品. 方差互换只是一个例子.

## 14.8 结 论

本章简要介绍的内容将来可能要在金融市场策略中起很重要的作用. 本章的目的是说明怎样把风险因素的波动率从其他相关风险中分离出来, 然后构造它的交易工具. 这里我们应该强调一点: 本章介绍性的讨论中只研究了波动率参数是时间和标的的函数, 对于更复杂的波动率, 这些方法必须进行修正.

## 参考文献

Rebonato(2000) 和 (2002) 是了解各种波动率概念不错的参考书. Rebonato (2002) 也介绍了利率市场模型和看跌期权波动率. 本章有些材料直接出自 Demeterfi 等 (1999), 读者也会从中发现合适的参考书. Dupire 在 1992 年的重要文章以及由此产生的著作可以作为局部波动率的参考文献.

## 习　　题

1. 仔细阅读下面的引文并描述你将怎样用波动率互换建立这个头寸. 确切地指明这些互换的参数.

(a) 你将怎样给这个头寸定价? 这里的定价是什么意思? 要确定并写进合约的是哪个价格?

(b) 特别地, 你需要两个市场之间的相关性吗?

(c) 卖出这个头寸前你需要知道它的微笑效应吗?

(d) 讨论一下这个波动率头寸的风险.

**波动率互换**

一家银行向投资者推荐一种交易, 投资者可以通过此交易从纳斯达克 100 和标准普尔 500 长期隐含波动率的差额中受益.

上周, 纳斯达克 100 两年期隐含波动率几乎创下了历史最高纪录, 达到了约 45.7%, 但是技术类股票的这种大波动在过去几年就已经出现了, 纽约股票衍生产品策划的一位全球首脑说. 技术类股票的繁荣看上去要结束了, 就像流行音乐进入了最低音部分, 他补充道. 虽然接下来的几个季度存在卖出技术股票压力, 但类似于过去半年市场所经历的剧烈跌价不太可能再出现了.

银行建议投资者加入纳斯达克和标准普尔的波动率差额互换. 如果两年后这两个实际波动率差额小于 21%, 投资者将收到一笔款项. 这里 21%是上周这两个指数两年期平价远期隐含波动率之间的近似差额. 如果两年后纳斯达克两年期实际波动率落后于标准普尔的对应波动率, 投资者就会有收益.

交易商说只卖出纳斯达克波动率可能也有意义, 但是最好增加一个相关的纳斯达克和标准普尔的价值交易来减小纳斯达克头寸的波动率beta. 换句话说, 如果整个市场彻底崩盘, 技术股票和市场总体上会有更高的隐含波动率. 但是代表更广泛行业股票的标准普尔 500 的波动率很可能有相当大的增幅, 然而纳斯达克的波动率已经接近历史最高纪录. 投资者关于两个指数的两年期现实波动率之间的差额交易, 使投资者可以在纳斯达克波动率落后于标准普尔的波动率时获利.

“两年是研究这种波动率差额的合适时间长度.” 一个交易商说. 两年的时间足够观察当前市场上尤其是技术行业的各种波动, 上周两个指数两年期隐含波动率的差额大概是 22%, 几乎是历史最高纪录. 自从 1990 年以来, 很长时期内现实波动率的差额趋近于 10.7%. 交易商指出还有其他的方式来进行这种交易, 譬如卖出纳斯达克波动率的两年期平价远期跨式期权, 并买入标准普尔波动率的两年期平价远期跨式期权. (摘自《衍生产品周刊》, 2000 年 10 月 30 日)

2. 下面的阅读材料是有关建立利差头寸的另一个例子, 并且更深入. 事实上, 这则短文是有关波动率头寸敲入和敲出期权应用的一个例子.

(a) 假设投资者卖出短期 (一个月) 波动率并买入 6 个月波动率. 在什么意义下这是一个裸露的波动率头寸? 风险是什么? 用波动率互换作为标的工具进行解释.

(b) 解释一下怎样用一个月 break-out 条款对冲这个头寸.

(c) 当有附加费用时, 这个跨式期权怎样获得收益?

(d) 有 break-out 条款的头寸如果有风险, 风险是什么?

(e) 这是一个纯波动率头寸吗?

*英镑波动率将在下年欧元诞生前达到高峰. 一家银行建议如下的策略, 以从高度反转 (highly-inverted) 的波动率曲线中获益. 1 月份, 英镑不会加入欧元, 且市场期望减少英镑头寸. 上周这种观点把 1 个月期英镑/德国马克波动率提高到了 12.6%. 相反, 6 个月的波动率正下降到 9.2% 以下. 这暗示着投资者应该卖出短期波动率并买入 6 个月期的波动率. 投资者可以买一个 6 个月期的跨式期权, 这个跨式期权附加一个 1 个月期的 break-out 条款以复制 1 个月期的短期波动率头寸. 这样投资者的头寸就不是无担保的裸露头寸了. (摘自《衍生产品周刊》)*

# 第 15 章 金融工程中的微笑效应

## 15.1 引　　言

市场上交易的*许多*期权都具有相同标的, 但其交割价和期限不同. 其他特征均相同的期权之间的交割价差异会有什么重要含义吗?

这个问题的答案看起来是否定的. 若普通期权的标的价格为 $S_t$, 不管交割价 $K_i$ 是什么, 这个价格在任意时间 $t$ 只有一个波动率. 所以, 忽略交割价的差异, 具有相同标的和相同期限的期权, 其隐含波动率应该是相同的.

然而, 这种最初印象是错误的. 事实上, 除了交割价外其他方面都相同的期权, 一般具有*不同*的隐含波动率. 总之, 离价外值越远, 看涨 (跌) 期权相应的隐含波动率就越高. 这个现象就是所谓的波动率*微笑*(volatility smile) 或波动率*偏斜*(volatility skew), 它对许多重要工具的对冲、定价和盯市有重要意义. 本章利用上限和下限作为主要工具来讨论波动率微笑. 它间接地向我们提供了一个讨论凸工具工程的机会.

本章只采用*微笑*这个名字. 这也包括微笑是单边*偏斜*(one-sided skew) 的情况. 但是, 无论何时涉及这个名词, 我们都将指出它们的区别.

## 15.2 预 备 知 识

波动率微笑对金融工具的交易、对冲和定价具有重要的意义. 为了说明这个领域所涉及的范畴, 我们考虑一个为从波动率微笑的反常条件中获利而建立的头寸.

我们可以交易股票、债券或之前见到的收益率曲线的斜率. 我们可以期望*相对于*短期收益, 长期收益将下降. 这就是所谓的扁平收益率曲线 (flattening of the yield curve), 而且它将引出收益率扁平化 (curve-flattening) 策略, 即 (空头) 卖出短期购买长期. 这可以通过现金工具 (例如债券) 或互换来完成.

在任何情况下, 这种交易已经变成了金融市场中的惯例. 最近相应的价值交易与波动率微笑有关. 考虑以下事件.

**例**

*上个月来, 对冲基金的行为引起了欧洲股票期权交易者的好奇, 它们在某些市场上通过购买价内波动率, 并卖出价外波动率, 从而利用某些市场上波动率水平的偏斜获取好处.*

偏斜交易 (skew trade) 是指投资者购买价内波动率并卖出价外波动率. 由于供求压力, 有时价外波动率水平比平时高. 换句话说, 价外波动率与价内波动率的利差增加, 引起了所谓的偏斜. 投资者此时预期这种偏斜将消失, 从而会涉足上述交易.

交易员解释说, 伴随美国的该轮牛市, 某些看跌的投资者对欧洲股票市场已有某种不平静的感觉, 许多交易者正通过场外看跌合约寻找保护. 因为价外看跌期权经常比平价看跌期权便宜, 所以投资者倾向于选择前者. 大量的购买已经引起价外波动率水平的上升. 许多投资者想要获得崩盘保护 (crash protection), 但是现在看跌期权已经非常昂贵了. 所以, 他们以 80 而不是 100 购买看跌期权.(摘自《衍生产品周刊》)

根据此例, 由于在 20 世纪 90 年代 "股票市场泡沫" 时期的大量投资, 股票投资者正在寻求一种崩盘保护. 承担这种保护的是长期股权, 并且当市场崩溃时将承受巨大的损失. 他们要买入看跌期权, 而不是卖出持有的股票. 持有看跌期权的投资者拥有在预定的价格 $K$ 下卖出标的股票的权利. 如果市场价格下降到 $K$ 以下, 投资者将获得保护.

根据这篇阅读资料, 大量的投资者愿意购买看跌期权, 从而增加了价内 (ATM) 波动率.[①] ATM 期权将变得昂贵. 为了降低保险费用, 投资者选择购买 20% 的价外期权, 这些期权较便宜. 但是当越来越多的投资者购买这种期权时, 价外波动率相对同一系列的平价波动率也将增加, 这将导致非正常地大幅度偏斜.[②]

这篇资料表明 "非正常" 偏斜可能已经吸引了一些对冲基金, 它们预期经过较长时间后非正常现象将会消失. 根据某种理论, 这些基金卖出价外波动率的同时买入 ATM 波动率. 如果偏度变平, 而且价外波动率相对于 ATM 波动率下降, 那么头寸将会赢利.[③] 如此例所示, 偏斜或微笑应被看作是整个金融市场活动的一部分. 但是, 如在本章看到的, 它的存在增加了金融建模和风险管理中的复杂性和难度.

## 15.3 微笑一瞥

波动率微笑是一个非常复杂的概念, 在涉及定价的动态机理和市场应用之前, 我们需要讨论一些预备知识. 众所周知, Black-Scholes 假设不是非常现实的. 尽管期权交易员比其他人都清楚模型的假设存在问题, 但他仍然使用 Black-Scholes 公式. 例如 Black-Scholes 公式的主要假设之一是在期权期限内波动率是常数. 如果

① 这是间接、迂回的. 如果担心市场崩溃, 投资者通常会期望增加波动率.

② 与 ATM 看跌期权相比, 价外看跌期权还是比较便宜的, 只是他们的隐含波动率较高. 另一种解释说法是如果将 ATM 波动率代入计算价外期权的 Black-Scholes 公式中, 结果其显示成本也较便宜.

③ 但是, 如果投资者放弃当市场是 120 时所购买的保险, 而选择 $K = 80$ 时买入新的保险, 我们将观察到微笑效应.

实际波动率在期权期限内大幅波动, 交易员如何继续使用 Black-Scholes 公式呢?

如果该假设违反常规, 那么从 Black-Scholes 公式得到的价格将是 "错误" 的, 但是公式的隐含波动率也是错误的吗? 这个问题需要仔细的分析. 最后, 我们将发现交易员的行为并不矛盾. 解释如下.

(1) 首先, 注意到 Black-Scholes 公式很*简单*, 只依赖于少量参数. 事实上, 公式依赖的主要参数是波动率 $\sigma$. 简单公式具有一些优点, 它们便于理解和记忆. 但更重要的是使用它们很容易发现*何时或何处*可能出错. 简单的公式允许通过多种方式在交易时利用主观调整非正式地修正精度. Black-Scholes 公式只有一个参数, 因此, 更容易 "调整" 这个参数以弥补公式的不完善.[1]

(2) 重要的一点是 Black-Scholes 公式已经成为了*惯例*. 换句话说, 它成为了专业人士以及在计算机平台中公认的*标准*. 这个公式联系了波动率报价及其美元价值. 这样, 交易员利用相同的*公式*就可以将美元价值代入市场报价的波动率中, 从而发展了对冲、风险管理和交易波动率的大众平台.

(3) 所以, 一旦我们承认 Black-Scholes 公式的使用成为惯例, 而且交易员的不同之处仅反映在对参数 $\sigma$ 值的选择上, 则关键过程不再是期权价格而是波动率. 这就是为什么在许多市场, 如利率上限、下限以及互换市场中, *直接*报价波动率的一个原因.

对于 Black-Scholes 公式的不完善假设, 一种解决方式是调整波动率参数.

(4) 但是, 这个惯例会产生新的风险. 一旦标的是波动率过程, 就会出现另一个问题. 例如, 交易员可以在已报价的波动率上增加一个*风险权利金*. 与包含在资产价格中的风险权利金类似, 波动率报价可以与风险权利金合并.

波动率微笑和它的一般性——*波动率曲面*(volatility surface), 包含了关于隐含波动率及其之间的所有套利关系的大量信息. 因此微笑的交易、定价、对冲和套利就变得很重要了.

## 15.4 波动率微笑

考虑 Black-Scholes 环境中到期日 $T$ 相同、标的股票价格 (指数) 为 $S_t$ 的普通欧式看涨期权和看跌期权. 令 $K_i$ 表示期权序列中第 $i$ 个交割价; $\sigma_i$ 表示交割价 $K_i$ 的常数 Black-Scholes 瞬时 (隐含) 波动率系数; 最后, 令 $r$ 表示常数无风险利率.

除了常数波动率, Black-Scholes 还作出了很多假设. 特别地, 标的股票无任何红利, 而且不存在交易费用、税收或调整费用. 最后, 假设 $S_t$ 服从几何随机微分方

[1] 在预测理论中, 有一个 "节俭"(parsimony) 的概念. 在预测时, 参数多了太浪费, 并且容易出错. 这个概念可应用在复杂期权价格的数值计算中. 如果模型只有较少的参数需要校准, 出错的可能性将降低.

程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

这里 $W_t$ 是概率 $P$ 下定义的 Wiener 过程, 参数 $\mu$ 也依赖于 $S_t$. 重要的假设是扩散(diffusion) 部分由 $\sigma S_t$ 给出, 这正是本章所关注的. Black-Scholes 假设在无限小的区间 $dt$ 内完全波动率是[①]

$$\sqrt{E_t^P\left[(dS_t - \mu S_t dt)^2\right]} = \sigma S_t \sqrt{dt}. \tag{2}$$

所以, 对于一个小区间 $\Delta$, 我们可以将百分比波动率近似写为

$$\frac{\sqrt{E_t^P\left[(\Delta S_t - \mu S_t \Delta)^2\right]}}{S_t} \cong \sigma\sqrt{\Delta}. \tag{3}$$

因此, 当 $S_t$ 变化时, 在长度为 $\Delta$ 的区间内百分比波动率依然近似为常数.
在此环境中, 典型的看跌期权的 Black-Scholes 公式为

$$P(S_t, K, \sigma, r, T) = -S_t N(-d_1) + K e^{-r(T-t)} N(-d_2), \tag{4}$$

其中

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 + r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{5}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}. \tag{6}$$

假设市场报价隐含波动率为 $\sigma$. 为了得到交割价为 $K_i$ 的期权的货币价值, 交易者将 $S_t$ 的现值、$t$、$r$ 和隐含波动率 $\sigma_i$ 的报价代入这个公式中. 根据说明, Black-Scholes 公式用来确定报价波动率的美元价值. 相反, 如果已知正确的期权价格 $P(\cdot)$, 可以得到 $K_i$ 看跌期权的隐含波动率 $\sigma_i$.

现在我们定义波动率微笑. 考虑一系列 $T$ 时到期、流动且无套利、交割价为 $K_i$ 的价外看跌期权, 其价格定义为 $P_{K_i}$:

$$P_{K_1}, \cdots, P_{K_n}, \tag{7}$$

其中

$$K_n < \cdots < K_1 < K_0 = S_t. \tag{8}$$

根据定义, $K_0$ 看跌期权是平价的, 而且当 $K_i$ 减少时, 看跌期权价外程度逐渐加深(deeper out-of-the-money). 见图 15-1 所示例子.

① 这里, $dS_t$ 是价格的无限小变化. 这只是微小变化的一种符号表示方式, 而且这种无限小增量的期望仅具有启发意义.

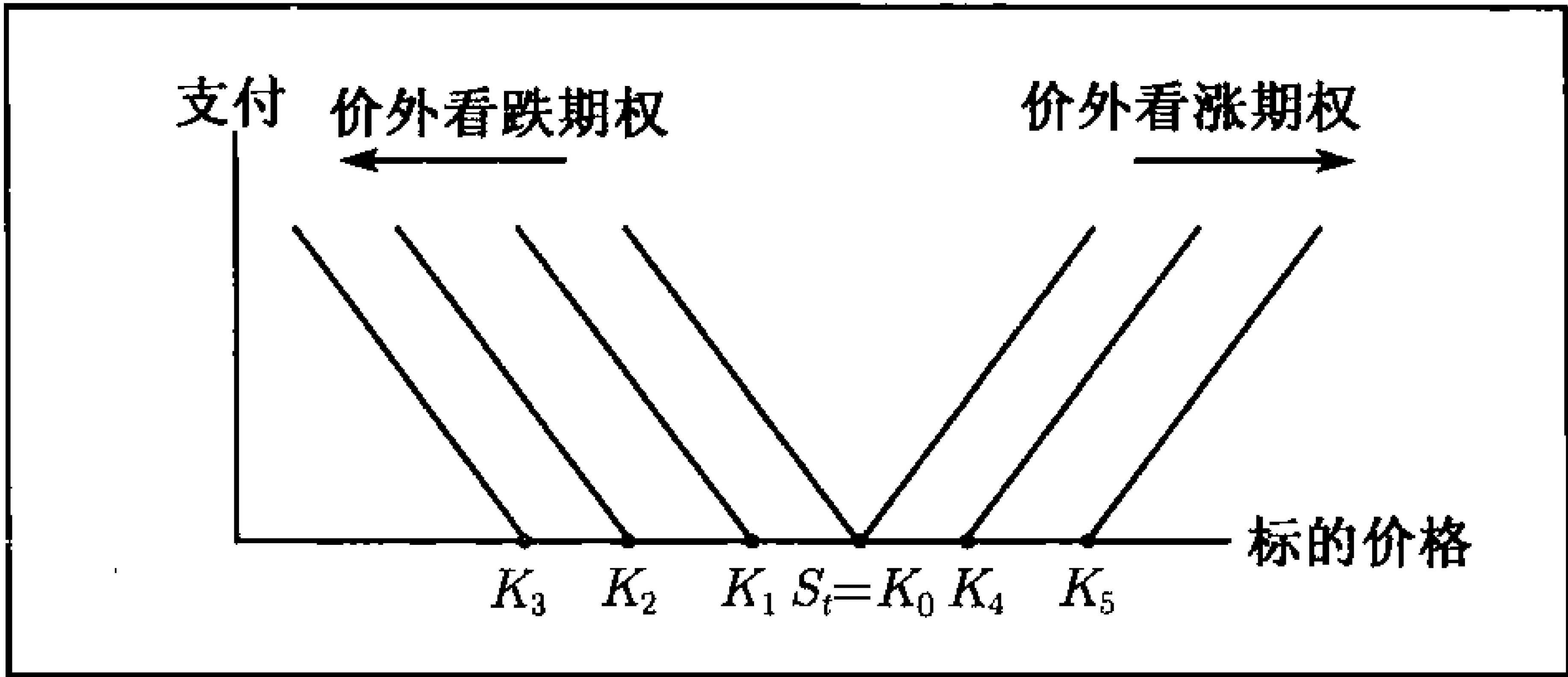



图 15-1

已知 (买价或卖价) 期权价格, 我们可以利用 Black-Scholes 公式逆向计算, 求出交易者用来得到 $P_{K_i}$ 的 $\sigma_i$. 如果 Black-Scholes 环境的假设正确, 那么由于除了交割价以外看跌期权都相同, 因此所有隐含波动率应该相等

$$\sigma_{K_0} = \sigma_{K_1} = \cdots = \sigma_{K_n} = \sigma. \tag{9}$$

所以, 在与 Black-Scholes 环境相同的市场中, 交易者将利用 Black-Scholes 看跌期权公式中相同的 $\sigma$ 来得到每个 $P_{K_i}, i = 0, \cdots, n$. 逆向计算, 由价格也可以得到相同的常数 $\sigma$.①

但是, 如果在现实中利用观测到的期权价格执行这样的操作, 那么我们将发现隐含波动率满足

$$\sigma_{K_0} < \sigma_{K_1} < \cdots < \sigma_{K_n}. \tag{10}$$

换句话说, 看跌期权在价外的程度越大, 相应的隐含波动率就越高. 所以, 我们将得到一条 "微笑" 曲线.

同样, 根据标的工具, 可以利用逐渐增加的价外看涨期权的隐含波动率得到微笑的另一部分, 如图 15-2 所示.

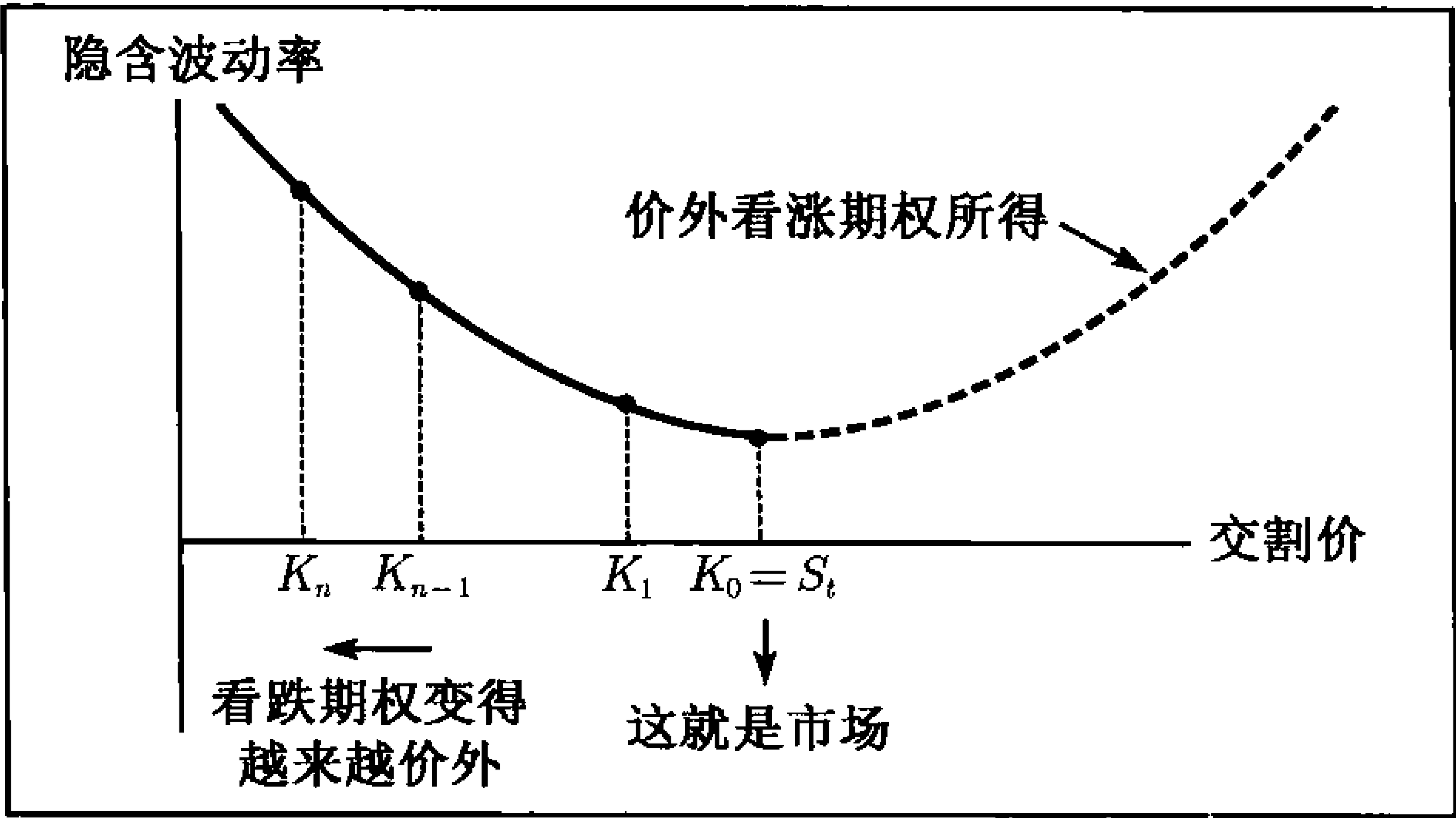



图 15-2

① 这个操作需要在相同的 $t$ 时确实可获得看跌期权的价值, 而且除了 $K_i$ 看跌期权外其他参数都相同.

### 15.4.1 一些典型性的事实

现实中观察到的波动率微笑具有以下特点.

(1) 一般来说, 标的股票指数的期权产生非对称的单边 "微笑", 如图 15-3 中的上图所示. 因此, 称它为偏斜.

(2) FX市场大不相同. 它们或多或少都是对称微笑, 如图 15-3 中下图所示. 但是, 这种微笑极少是严格对称的, 而且利用风险逆转交易非对称是外汇市场上的常规操作.

(3) 利率期权比股票指数期权具有更单调的单边微笑. 事实上, "微笑" 的形状因市场的不同而不同, 对曲面情形也有不同的解释.

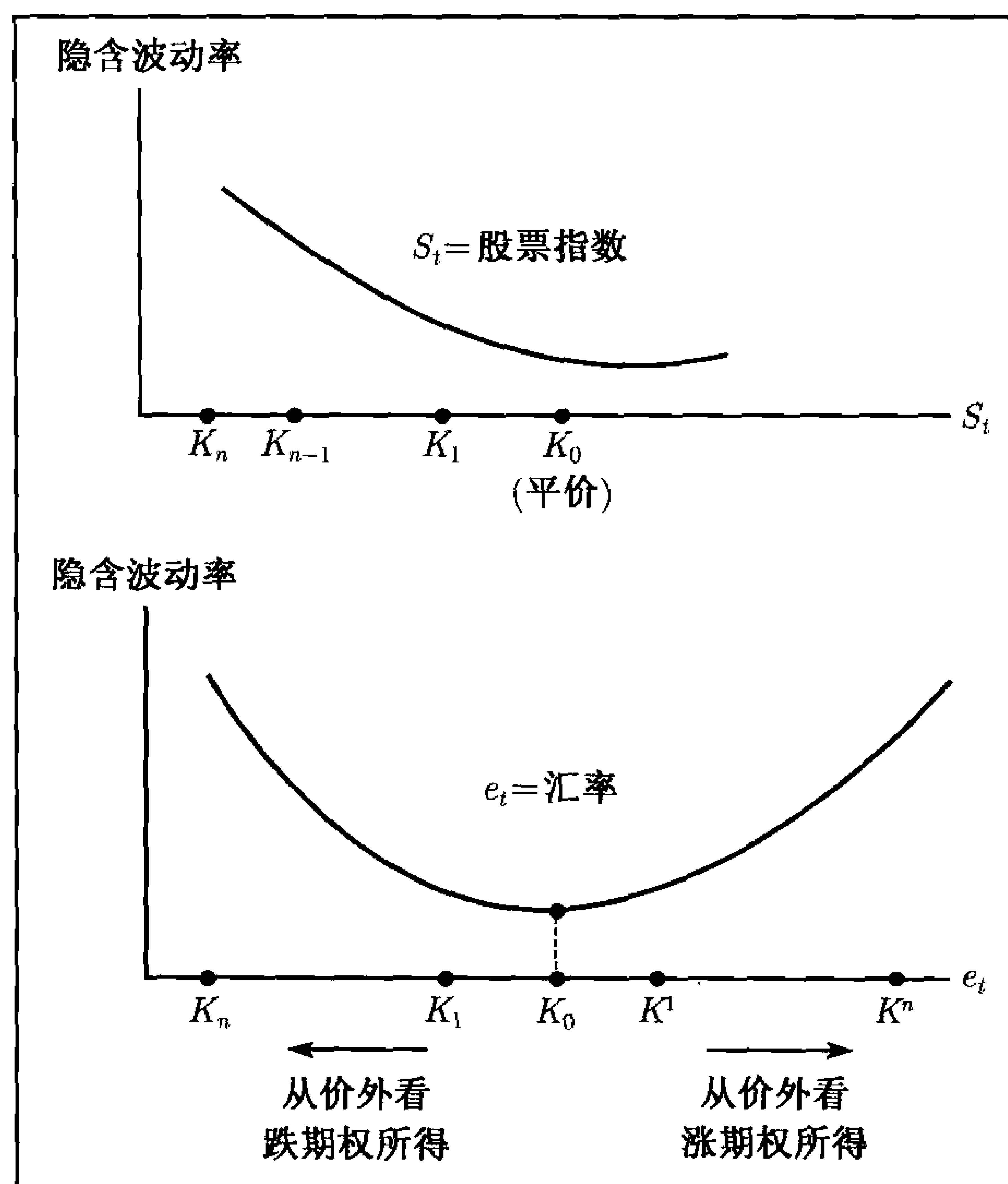



图 15-3

我们很自然地认为微笑的动态机理随行业的不同而不同. 这一点与风险管理、互换交易、利率上限/下限和波动率的交易有关. 但是, 在讨论之前, 先看一个例子.

**例**

表 15-1 显示了标的为标准普尔 100 指数的超短期的所有期权. 这些数据是从早晨的现场报价得到的, 所以被忽略掉的交易为极少数. 但期权是现场买-卖报价,

在某种意义上说, 交易量合理的交易都已考虑在内.

**表 15-1 2002 年 1 月 18 日到期的 OEX 期权**

| 看涨 | 买价 | 卖价 | 波动率 | 看跌 | 买价 | 卖价 | 波动率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jan 550 | 39.5 | 41.5 | 0 | Jan 550 | 0.45 | 0.75 | 0 |
| Jan 555 | 34.8 | 36.3 | 0 | Jan 555 | 0.65 | 0.95 | 0 |
| Jan 560 | 30 | 31.5 | 0 | Jan 560 | 0.9 | 1.2 | 0 |
| Jan 565 | 25.2 | 26.7 | 0 | Jan 565 | 1.25 | 1.55 | 0 |
| Jan 570 | 20.6 | 22.1 | 0 | Jan 570 | 1.8 | 2.1 | 0 |
| Jan 575 | 16.3 | 17.8 | 0 | Jan 575 | 2.3 | 3 | 0 |
| Jan 580 | 13 | 13.5 | 0 | Jan 580 | 3.4 | 4.1 | 2 |
| Jan 585 | 9.1 | 9.8 | 0 | Jan 585 | 5 | 5.7 | 5 |
| Jan 590 | 6.1 | 6.8 | 50 | Jan 590 | 7.6 | 7.9 | 5 |
| Jan 595 | 4.1 | 4.5 | 12 | Jan 595 | 10.1 | 10.8 | 25 |
| Jan 600 | 2.5 | 2.8 | 3 | Jan 600 | 13.1 | 14.5 | 0 |
| Jan 605 | 1.2 | 1.5 | 0 | Jan 605 | 17.2 | 18.7 | 0 |
| Jan 610 | 0.55 | 0.85 | 1 | Jan 610 | 21.7 | 23.2 | 0 |
| Jan 615 | 0.25 | 0.55 | 0 | Jan 615 | 26.6 | 28.1 | 0 |
| Jan 620 | 0.2 | 0.35 | 1 | Jan 620 | 31.4 | 32.9 | 0 |
| Jan 625 | 0.05 | 0.2 | 0 | Jan 625 | 36.3 | 37.8 | 0 |
| Jan 630 | 0 | 0.15 | 0 | Jan 630 | 41 | 43 | 0 |
| Jan 635 | 0 | 0.1 | 0 | Jan 635 | 46 | 48 | 0 |
| Jan 640 | 0 | 0.1 | 0 | Jan 640 | 51 | 53 | 0 |
| Jan 645 | 0 | 0.1 | 0 | Jan 645 | 56.5 | 57.5 | 0 |
| Jan 650 | 0 | 0.1 | 0 | Jan 650 | 60.5 | 63.5 | 0 |
| Jan 660 | 0 | 0.05 | 0 | Jan 660 | 70.5 | 73.5 | 0 |
| Jan 680 | 0 | 0.05 | 0 | Jan 680 | 90.5 | 93.5 | 0 |

搜集完数据后, 标的以 589.14 进行交易. 我们利用 12 个价外看跌期权和 9 个价外看涨期权来求出 Black-Scholes 的隐含波动率. 取利率为 1.98%, 期限为 8/365. 利用这些值和表中给出的期权买价以及方程

$$C(S_t, K_i, r, T, \sigma_i) = C_i, \tag{11}$$

$$P(S_t, K_j, r, T, \sigma_j) = P_j, \tag{12}$$

可以解出看涨期权的隐含波动率 $\{\sigma_i\}$ 和看跌期权的隐含波动率 $\{\sigma_j\}$, $C_i$ 和 $P_j$ 是已观测到的期权价格.

图 15-4 中画出了对应 $K_i/S_t$ 的波动率的图像, 我们可以看到明显的微笑. 例如, 在 1 月份的 400 个看跌期权中, 32%在价外交易, 波动率是 26%, 而 ATM 期权

是以隐含波动率 18.5% 交易的.

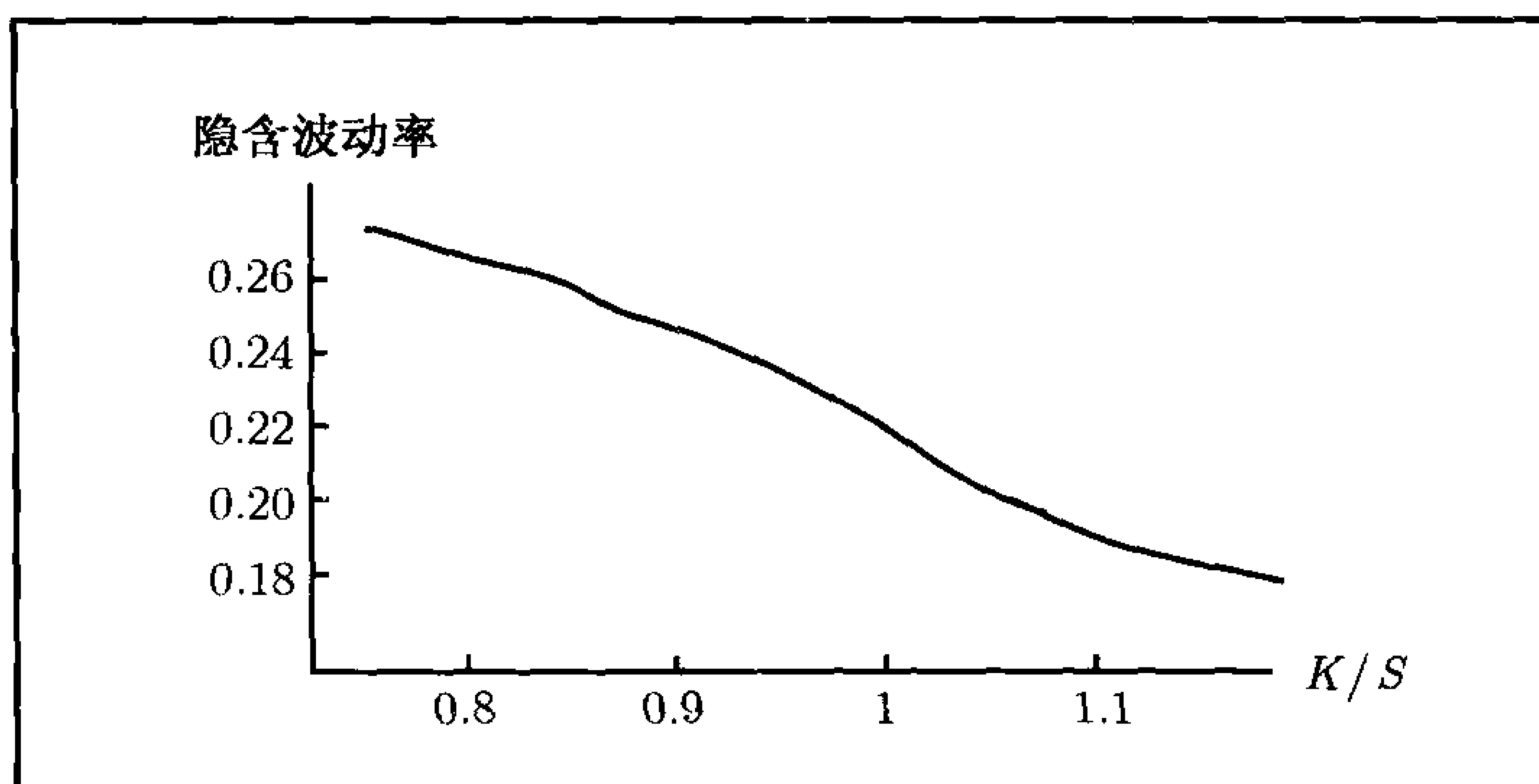



图 15-4

OEX 期权是美式的, 这个问题在以上例子中被忽略了. 在计算波动率时, 它将导致向上的偏差. 这个偏差对我们是次要的, 但在实际交易中却需要修正. Barone-Adesi 和 Whaley(1987) 介绍了一种修正方法.

### 15.4.2 如何定义价值特性

微笑的图像因市场的不同而不同. 隐含波动率定义为 $\sigma_i$, 它总是在 $y$ 轴上. 除非特别说明, 我们从股票或 FX 市场的 Black-Scholes 公式中求出波动率. 隐含波动率被看成是随机的且随时间变化.

用什么作为水平轴是一个更微妙的问题, 而且依赖于如何定义期权的 "价值特性"(moneyness). 有时, 在微笑对价值性的图像中, 价值特性由交割价与当前市场价格的比率 $K_i/S_t$ 来衡量. 如果微笑仅是期权在价外程度的函数, 那么这种标准化将使得微笑在下述意义下变得稳定: 当 $S_t$ 变化时, 这种特殊的期权序列的微笑保持不变. 但是总是有其他因素比价值特性更能影响微笑, 某些从业人员对价值特性的定义也不同.

例如, 有时是利用微笑对 $K_i\mathrm{e}^{-r(T-t)}/S_t$ 作图的. 对于短期期权, 因为 $r(T-t)$ 是一个很小的数, 所以这样做差别很小. 而对于长期期权, 差别就明显了. 通过加入贴现因子, 市场从业人员希望消除期权期限内这些变化的影响.

有时, 水平轴表示期权的 delta. FX 交易员用 delta 的大小来衡量价值特性. 这样操作将导致期权的 delta 比价值特性本身依赖更多变量. 而且, 它还依赖于瞬时隐含波动率. 但是, 我们稍后会发现还存在一些 delta, 在这些 delta 下 FX 市场上的波动率交易是流动的.

读者需要注意图 15-4 和图 15-5 中的一些微笑是利用隐含波动率仅对交割价作图的. 同样, 这些曲线与特定时间 $t$ 和到期日 $T$ 有关. 当后者变化时, 一般地, 微

笑将平行移动. 重要的是我们要了解时间 $t$ 和到期日 $T$ 的变化如何影响微笑.

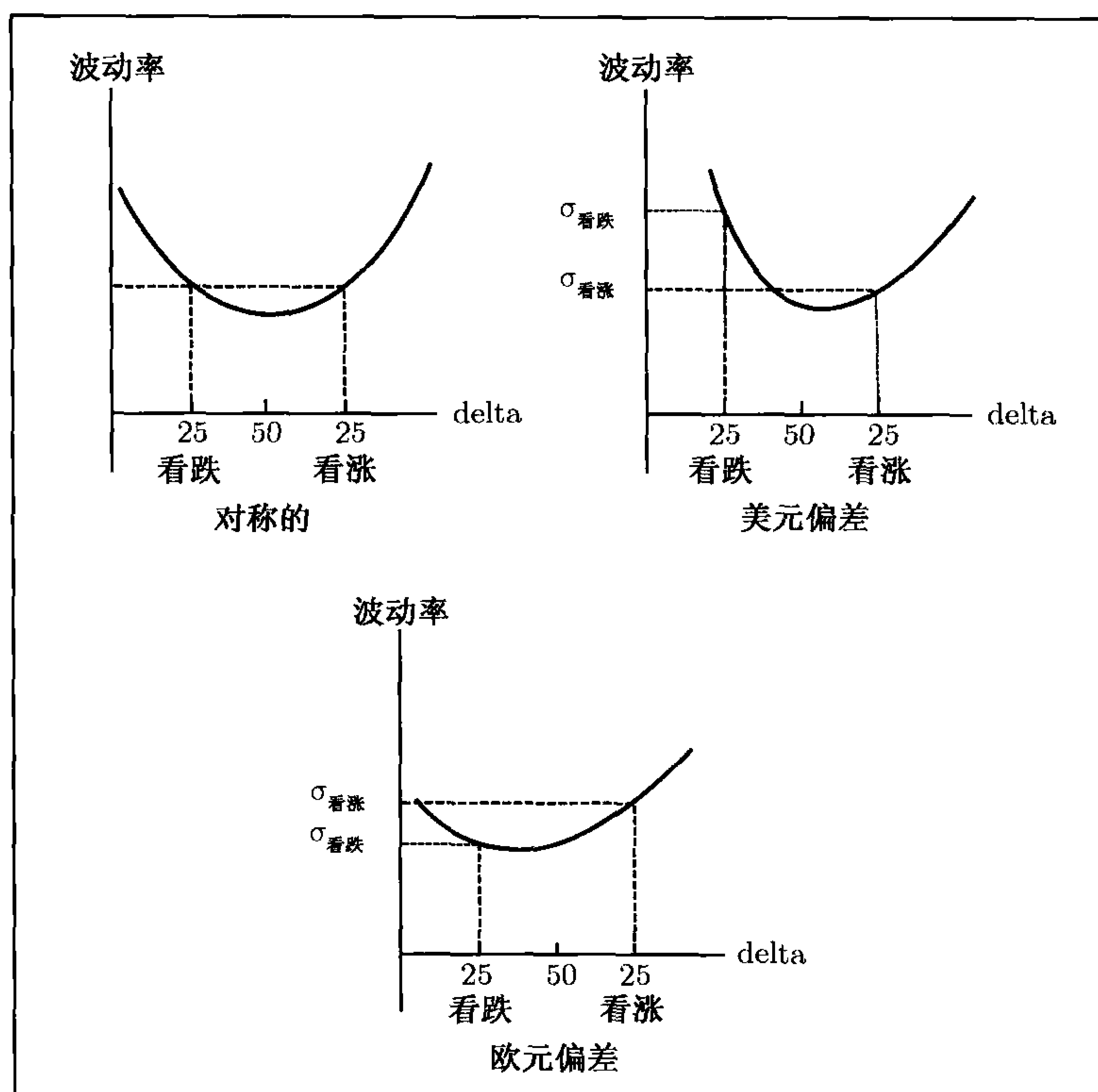



图　15-5

### 15.4.3　复制微笑

波动率微笑是期权隐含波动率的图像, 这些期权除了价值特性外其他方面都相似. 波动率的基本形状主要有两个特点: 第一是微笑的对称性; 第二是关于弯曲的 "显著性". 衡量这两个特点有很好的方法.

首先, 考虑对称性. 图 15-5 画出了 FX 市场的 3 个微笑. 一个是对称的, 另两个有不同的*偏差*(biase), 是非对称的. 如果微笑对称, 那么相同的价外看跌期权和看涨期权的波动率将相同, 所以结构有零值. 这种头寸在第 10 章中称作风险逆转 (risk reversal). 对称的微笑表示可以通过买卖相似的价外期权使得风险逆转的费用为 0. 对于非对称微笑, 相似价值特性的看跌和看涨期权以*不同*的隐含波动率卖出, 而且有*偏差*. 所以, 风险逆转是衡量波动率微笑对称性的一种指标.

风险逆转衡量波动率微笑的方法如图 15-6 所示. 我们利用期权的 delta 作为衡量 $x$ 轴上其价值性的一种手段. ATM 期权的 delta 大约为 50, 在 $x$ 轴的 "中间". 25delta 风险逆转的波动率给出了 25delta 看跌和 25delta 看涨期权波动率的差值,

如图所示. 我们可以写为

$$\sigma(25\ \text{delta RR 溢价}) = \sigma(25\ \text{delta 看跌}) - \sigma(25\ \text{delta 看涨}), \tag{13}$$

其中, $\sigma$(25 delta RR溢价), $\sigma$(25 delta 看跌) 和 $\sigma$(25 delta 看涨) 分别表示风险逆转、25 delta 看跌和 25 delta 看涨期权的隐含波动率.

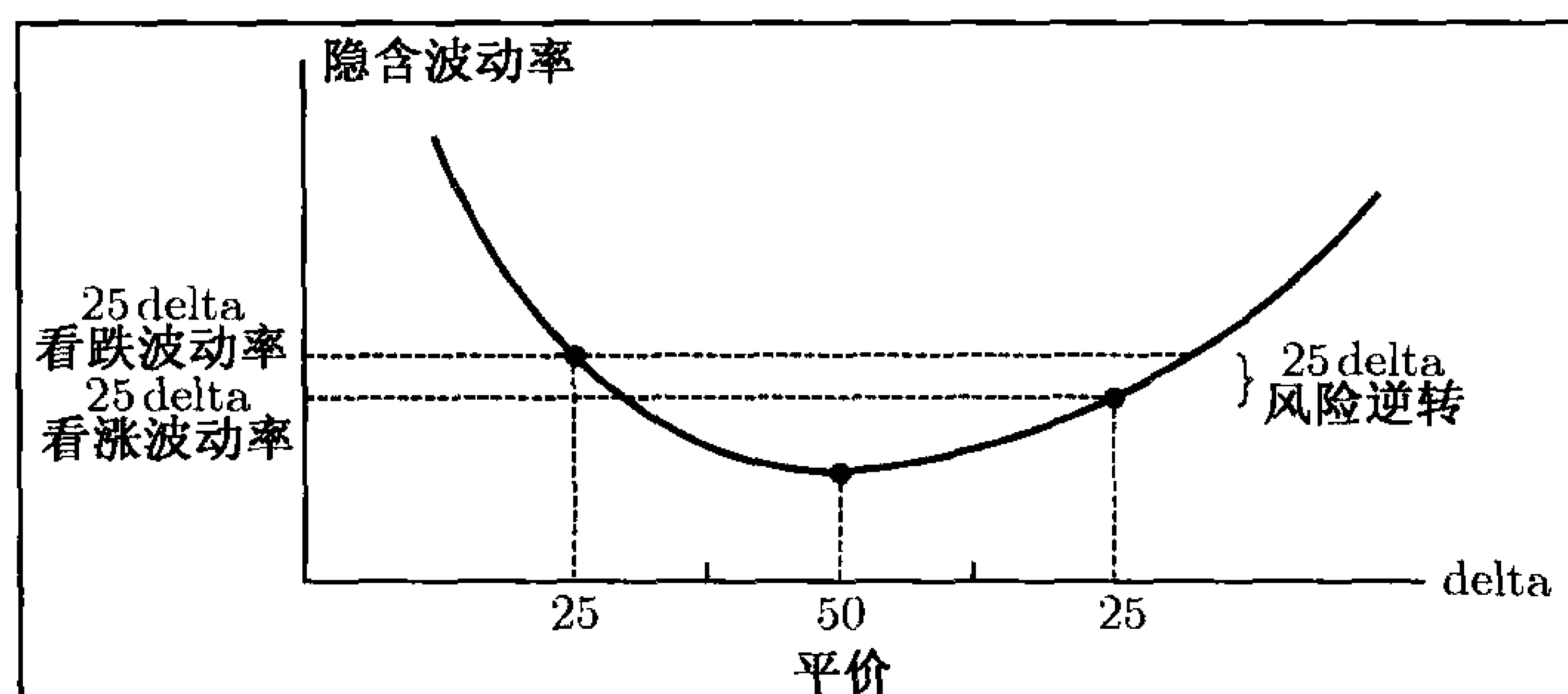



图 15-6

微笑的弯曲程度可以用蝶式期权(butterfly) 来衡量. 考虑卖出一个 ATM 看跌和 ATM 看涨以及购买一个 25 delta 价外看跌和一个 25 delta 价外看涨期权. 这个蝶式期权在第 10 章中有类似的支付图表. 头寸由买入两个对称的价外波动率构成, 并且卖出两个 ATM 波动率. 如果不存在微笑效应, 这些波动率都相同, 而且净波动率头寸将为 0. 换句话说, 微笑越明显, 与 ATM 波动率相比, 价外波动率就越高, 而且净波动率头寸将逐渐成为正值. 图 15-7 说明了如何通过蝶式期权来度量微笑的弯曲大小. 下面的方程成立:

$$\sigma(25\ \text{delta 蝶式溢价}) = \sigma(25\ \text{delta 看跌}) + \sigma(25\ \text{delta 看涨}) - 2\sigma(\text{ATM}), \tag{14}$$

其中 $\sigma$(25 delta 蝶式溢价) 和 $\sigma$(ATM) 分别是蝶式期权和 ATM 隐含波动率.

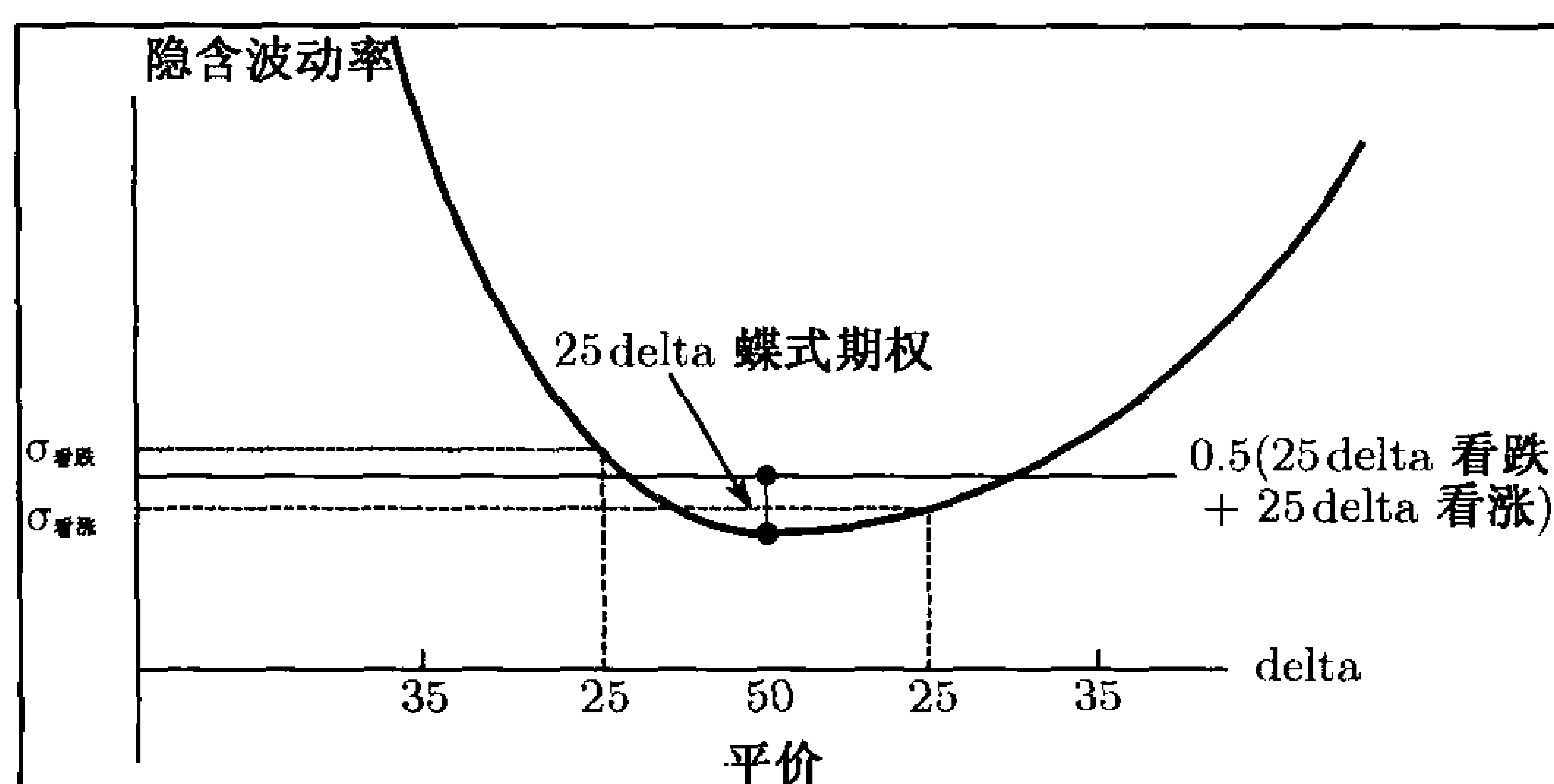



图 15-7

**合约方程**

本书的第 3 章和第 4 章研究了简单资产的合约方程. 此前讨论的等式允许讨论完全不同类型的合约方程. 事实上, 我们可以整理 (13) 和 (14) 中的等式, 从而构造出价外隐含波动率的合约方程:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta看跌}\\\text{期权波动率}\end{array}} = \boxed{\text{平价波动率}} + \frac{1}{2}\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta RR}\\\text{波动率差}\end{array}} + \frac{1}{2}\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta 蝶式期权}\\\text{波动率差}\end{array}}, \tag{15}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta看涨}\\\text{期权波动率}\end{array}} = \boxed{\text{平价波动率}} - \frac{1}{2}\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta RR}\\\text{波动率差}\end{array}} + \frac{1}{2}\boxed{\begin{array}{l}\text{25 delta 蝶式期权}\\\text{波动率差}\end{array}}. \tag{16}$$

可以利用这些等式确定普通期权的价外波动率. 例如, 如果 ATM、RR 和蝶式期权波动率是流动的, 我们可以利用这些方程来 “计算”25 delta 看涨和看跌期权的期权. 但是对于复杂期权 (exotic option), 这样调整波动率参数不可行. 这方面内容我们将在本章结尾讨论.

## 15.5　微笑动态机理

至少存在两种类型的微笑 “动态”(dynamics) 机理: 第一种是固定时间参数 $t$, 然后考虑期限 $T$ 越来越长的期权; 第二种是保持 $T$ 为常数, 但是允许时间 $t$ 变动, 并研究各种因子中的变化如何影响波动率微笑. 特别地, 我们可以发现当价值特性 $K_i/S_t$ 是常数时, $S_t$ 的变化可以影响微笑.

首先固定 $t$ 并且令 $T$ 增加. 考虑在相同时间 $t$ 交易的两列期权. 它们都有可比较的交割价, 但是其中一列的期限相对较长. 相比之下, 期限分别为 $T_1$ 和 $T_2$ 的两列期权的微笑是什么样的呢?

我们感兴趣的第二个问题是当 $S_t$ 变化时, 相同期权序列的微笑将如何变化? 特别地, 微笑仅是比率 $K_i/S_t$ 的函数吗? 它也依赖于 $S_t$ 的水平和上述价值特性吗?

这些问题的答案因标的资产的不同而不同. 这是因为对微笑存在性的解释不只一种, 而且对于不同的行业, 解释一般都不同. 所以, 在分析微笑动态机理及其性质之前, 我们需要讨论波动率微笑存在性的主要解释.

## 15.6　如何解释微笑

波动率微笑是一种经验现象, 它违反了 Black-Sholes 假设. 同时, 波动率微笑

与 Black-Sholes 公式中得到的隐含波动率有关, 这也许令人更加困惑. 一方面, 微笑说明 Black-Sholes 公式不正确, 而另一方面交易员正是利用 Black-Sholes 公式才得到了微笑. 这里存在什么内在的不一致性吗?

答案是否定的. 为了说明这一点, 我们使用类推法, 虽然这与现在讨论的内容无关, 但可以说明什么是市场惯例. 考虑 3 个月的 Libor 利率 $L_t$, 3 个月后 100 美元的当前价值是多少, 如在第 3 章中介绍的, 我们仅需要计算比率

$$\frac{100}{\left(1+L_t\frac{1}{4}\right)}. \tag{17}$$

习惯于不同复利的经济学家可能不赞同这种算法, 而是利用下面的现值公式

$$\frac{100}{(1+L_t)^{\frac{1}{4}}}. \tag{18}$$

哪个是正确的? 答案决定于市场惯例. 如果 $L_t$ 根据公式 (17) 报价, 那么公式 (18) 如果也用同一个 $L_t$, 就是不正确的. 但是, 我们可以利用等价性计算一个新的 $L_t^*$:

$$\frac{100}{\left(1+L_t\frac{1}{4}\right)}=\frac{100}{(1+L_t^*)^{\frac{1}{4}}}. \tag{19}$$

那么, 公式

$$\frac{100}{(1+L_t^*)^{\frac{1}{4}}} \tag{20}$$

利用 $L_t^*$ 也可以表示正确的现值. 关键是市场是在利用了公式 (17) 的条件下报价利率 $L_t$ 的. 如果因为某个偶然原因, 客户想要利用公式 (18), 那么市场将报价 $L_t^*$ 而不是 $L_t$. 结果是相同的, 因为无论是利用含 $L_t$ 的公式 (17) 还是含 $L_t^*$ 的公式 (18), 我们都会得到相同的现值. 换句话说, 哪个公式正确取决于市场如何报价利率.

期权的情况也类似. 如果替换一个特殊的波动率, Black-Scholes 公式可能是错误的, 但是如果我们使用另一个波动率, 也许能得到正确的结果. 而后者在那个时刻可能与现实世界的波动率不同. 但交易者仍然可以通过这个 "错误" 的公式, 利用特殊的波动率得到正确的期权价格, 就如同刚才讨论的现值的例子. 尽管 Black-Scholes 公式的假设不满足, 但是联立公式和这个特殊的波动率就可以给出期权的正确价值.

所以, 如果在 "正确" 的假设下, 得到的无套利期权价格为

$$C(S_t,t,T,K,\sigma_t^*,\boldsymbol{\theta}_t), \tag{21}$$

其中 $K$ 是交割价, $T$ 是到期日, $S_t$ 是标的资产价格. (向量) 变量 $\boldsymbol{\theta}_t$ 表示 Black-Sholes 公式的其他所有参数, 而且这些参数在 Black-Scholes 环境中未加考虑. 例如, 波动率可能是随机的, 一些影响波动率动态机理的参数可能不直接进入公式, 而且成为 $\boldsymbol{\theta}_t$ 的一部分.[①] 重要的是 $\sigma_t^*$ 所表示的意义. 这里假设它是正确的 $t$ 时瞬时波动率.

$$\mathrm{d}\sigma_t = \lambda(\sigma_0 - \sigma_t)\mathrm{d}t + \kappa\sigma_t\mathrm{d}W_t \tag{22}$$

与 Black-Scholes 公式中的 $F(S_t, t, \sigma)$ 相比, 等式 (21) 中 (正确) 的定价函数可能更复杂, 甚至没有解析解. 假设交易员忽视方程 (21) 而偏好使用公式 $F(S_t, t, \sigma)$, 尽管后者是 "错误" 的. 难道这意味着交易员将计算出错误的价格吗?

这是不一定的. 如果交易员在 $F(S_t, t, \sigma)$ 中使用另一个波动率 $\sigma$, 使得这两个公式能给出相同的正确价格, 那么 "错误" 的公式 $F(S_t, t, \sigma)$ 就可以得到与 $C(S_t, t, K, \sigma_t^*, \boldsymbol{\theta}_t)$ 相同的期权价格:

$$C(S_t, t, K, \sigma_t^*, \boldsymbol{\theta}_t) = F(S_t, t, \sigma), \tag{23}$$

所以, 如果以下条件满足, 我们就可以从 "非现实的"Black-Sholes 公式中得到正确的期权价格.

(1) 在每个瞬间 $t$ 直接报价 $K_i$ 交割价的期权波动率 $\sigma_i$, 在利用 Black-Scholes 公式的情况下得到期权的价值. 然后, 具有流动性且无套利的市场将提供 ATM 波动率 $\sigma_0$ 的 "正确" 观察值.[②]

(2) 对于价外期权, 在 Black-Scholes 公式中利用新的波动率, 记为 $\sigma\left(\frac{S}{K_i}, S\right)$, 并且

$$\sigma\left(\frac{S}{K_i}, S\right) = \sigma_0 + f\left(\frac{S}{K_i}, S\right), \tag{24}$$

其中 $f(\cdot)$ 一般为正, 它表示微笑效应. 对于 ATM 波动率的调整应保证当将 $\sigma\left(\frac{S}{K_i}, S\right)$ 代入 Black-Scholes 公式时, 能给出交割价为$K_i$ 的期权的正确价值:

$$F\left(S_t, t, K_i, \sigma_0 + f\left(\frac{S}{K_i}, S\right)\right) = C(S_t, t, K_i, \sigma_t^*, \boldsymbol{\theta}_t). \tag{25}$$

调整因子 $f\left(\frac{S}{K_i}, S\right)$ 由交易员根据自身经验、知识以及当时的交易环境来确定. 前

① 在均值回转随机波动率模型中, 有

$$\mathrm{d}\sigma_t = \lambda(\sigma_0 - \sigma_t)\mathrm{d}t + \kappa\sigma_t\mathrm{d}W_t, \tag{22}$$

其中 $\sigma_0$, $\kappa$ 和 $\lambda$ 分别是长期平均波动率、波动率的波动率以及均值回转的速度. 公式 (21) 中的 $\theta_t$ 包含 $\lambda$, $\kappa$ 和随时间变化的 $\gamma_t$.

② 特别地, FX 市场报价这种隐含波动率, 而且这些波动率交易活跃.

一节讨论的风险逆转、蝶式期权和 ATM 波动率的关系在这里也可以使用.[1]

所以, 尽管代入 Black-Scholes 公式中的可能不是 $S_t$ 过程的 "正确" 瞬时波动率, 交易员也可以调整非 ATM 期权的波动率使得错误的公式能够给出正确的结果.

因此, $f(S/K_i, S)$ 是因 Black-Scholes 公式的不完善而做出的调整, 这些调整能够充分描绘现实世界的情况. 结果是当我们画出 $\sigma\left(\frac{S}{K_i}, S\right)$ 对 $K_i/S$ 或 $K_i$ 的图像时, 基于时间和所考虑的行业, 我们会得到微笑或者偏斜的曲线.

哪种情况下, 需要调整波动率呢? 至少有 3 个 Black-Scholes 假设与现实世界的矛盾可以通过调整交割价 $K_i$ 的波动率来更正: 第一个是对数正态过程的假设; 第二个是如果在相当短的时间内, 资产价格急剧下跌, 这会增加 "恐惧因子", 从而波动率也将增大; 第三个是关于金融市场有组织的和规范的假设. 下面我们进行详细讨论.

### 15.6.1 情况 1: 非几何价格过程

假设标的服从真正的风险中性动态方程, 它表示为以下 SDE:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t^{\alpha} dW_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{26}$$

当 $\alpha$=1 时, $S_t$ 就是对数正态的. 其他的都适合 Black-Scholes 的环境, 且隐含波动率不存在微笑.

$\alpha < 1$ 的情况需要在交割价变化时调整代入 Black-Scholes 公式的波动率系数. 与 $\alpha = 1$ 的情况不同, 这样做是正确的, 因为此时百分比波动率依赖于 $S_t$ 的水平. 两边同除 $S_t$ 得到

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma S_t^{\alpha-1} dW_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{27}$$

百分比波动率由 $\sigma S_t^{\alpha-1}$ 表示. 如果 $\alpha < 1$, 百分比波动率将是 $S_t$ 的减函数. 当 $S_t$ 减少时, 百分比波动率将增加. 所以, 对于交割价越来越低的看跌期权, 交易员需要在 Black-Scholes 公式中使用较高的隐含波动率参数. 这意味着看跌期权价外程度越大, 就应在 Black-Scholes 公式中使用越高的波动率.

这里的主要思想是, 尽管交易员了解 Black-Scholes 环境远不同于现实, 但是调整波动率是为了使得最初的 Black-Scholes 框架可以保留下来, 而且 "错误" 的公式仍然可以给出正确的期权价值.

### 15.6.2 情况 2: 崩盘的可能性

假设一个看跌期权列的期限是两个月. 除了交割价以外, 期权的其他特征都相同, 它们从 ATM 变化到深度价外. 假设 $S_t$ 现在的水平是 100，流动的看跌期权的

① 为了方便, 在这些公式中省略了上标 $t$.

交割价为 90, 80, 70 和 60.

90 交割价的期权含义为：如果期权到期时在价内, 那么市场将在两个月内下降至少 10%. 这是大跌但不是灾难. 相反地, 如果 60 交割价的看跌期权到期时在价内, 这就表示在两个月内下跌了 40%. 这显然是非正常事件, 而且非正常的事件会导致波动率出现突起. 所以, 60 交割价的期权与危机事件更有关联, 而当其他的情况一样, 波动率非常高的时候, 这个期权多半将在价内. 但是, 当期权变为价内时, 它的 gamma 起初近似为 0, 此时也将较高. 所以, 因为 delta 对冲的调整, 交易员卖出这个期权将有较高的现金支付. 为了弥补这些潜在的较高的现金支付, 交易员将在看跌期权中使用越来越高的波动率参数, 这个看跌期权越来越多的在价外, 而且越来越有可能与危机状况相关.

这种解释与现实中观察到的微笑形状是一致的. 在 FX 市场, 突然的下降和突然的上升意味着较高的波动率, 因为在每种情况中, 已观测到的货币之一会急剧地下跌, 所以微笑将或多或少是对称的. 另一方面, 对于股票市场, 股票价格的突然上升可能是重要事件, 但绝不是危机. 对于交易员 (除了空头), 这是个 "令人愉快" 的结果, 而且波动率不会上升太多. 相反地, 当资产价格突然下跌时, 这将增加恐惧因子, 而且波动率可能会出现突起. 所以在股权市场, 如果这种解释正确, 则人们期望微笑大部分是单边的. 事实表明经验数据支持这个理论. 价外股票看跌期权存在微笑. 但是价外股票看涨期权几乎没有微笑.

**例**

*考虑下面表 15-2, 它表示 2002 年 6 月到期的期权在 2002 年 1 月 10 日的价格 (忽略它们的美式特性或任何可能支付). 这些数据与前一个例子中讨论的数据于同一时间收集. 这样, 期权是长期的, 而且大约 6 个月内到期. 首先, 我们求出这些数据的波动率微笑.*

*数据是同一时间收集的, 而且因为标的股指的现值在每种情况下都相同, 所以用 $S_{t_0}$ 作除数不是主要的问题, 但我们仍然选择用波动率微笑对 $K/S$ 作图.*

*我们提取 8 个价外看跌期权的卖价, 并考虑 600 看跌的期权在价内. 这样可以计算出 9 个隐含波动率. 所用的数据如表 15-2 所示, 先考虑表的第 6 列价外看跌期权的卖价, 得到 9 个价格.*

*忽略现实中的其他复杂性, 利用 Black-Scholes 公式和*

$$S_{t_0} = 589.15, \quad r = 1.90\%, \quad t = \frac{152}{365} = 0.416, \tag{28}$$

解方程

$$P(589.15, K_i, 1.90, \sigma_{K_i}, 0.416) = P_{K_i}, \quad i = 1, \cdots, 9, \tag{29}$$

得到 9 个隐含波动率 $\sigma_{K_i}$. 利用 Mathematica 得到如下结果, 它表示 $K_i/S$ 的值和价外看跌期权相应的隐含波动率:

| $\frac{K}{S}$ | 波动率 |
|---|---|
| 0.74 | 0.26 |
| 0.78 | 0.26 |
| 0.81 | 0.26 |
| 0.84 | 0.25 |
| 0.88 | 0.25 |
| 0.91 | 0.24 |
| 0.95 | 0.23 |
| 0.98 | 0.22 |
| 1.01 | 0.21 |

**表 15-2　2002 年 6 月 21 日到期的 OEX 期权**
**(数据收集于 2002 年 1 月 10 日 9:46 CBOT)**

| 看涨 | 买价 | 卖价 | 看跌 | 买价 | 卖价 |
|---|---|---|---|---|---|
| Jun 440 | 153.4 | 156.4 | Jun 440 | 4.2 | 4.8 |
| Jun 460 | 134.8 | 137.8 | Jun 460 | 5.6 | 6.3 |
| Jun 480 | 116.7 | 119.7 | Jun 480 | 7.4 | 8.1 |
| Jun 500 | 99.2 | 102.2 | Jun 500 | 9.9 | 10.6 |
| Jun 520 | 82.6 | 85.6 | Jun 520 | 12.9 | 14.4 |
| Jun 540 | 67.2 | 69.7 | Jun 540 | 17.2 | 18.7 |
| Jun 560 | 52.7 | 55.2 | Jun 560 | 22.7 | 24.2 |
| Jun 580 | 39.8 | 41.8 | Jun 580 | 29.3 | 31.3 |
| Jun 600 | 28.6 | 30.6 | Jun 600 | 38.3 | 40.3 |
| Jun 620 | 19.9 | 21.4 | Jun 620 | 49.5 | 51.5 |
| Jun 640 | 12.8 | 14.3 | Jun 640 | 62.2 | 64.7 |
| Jun 660 | 8 | 8.7 | Jun 660 | 76.9 | 79.9 |
| Jun 680 | 4.7 | 5.4 | Jun 680 | 93.7 | 96.7 |
| Jun 700 | 2.55 | 3.2 | Jun 700 | 111.6 | 114.6 |

结果表示于图 15-8. 显然, 当看跌期权的价值特性下降时, 波动率将上升. 期权做市商计算发现如果 6 个月内 U.S. 股票市场下降 25%, 那么恐惧因子将使波动率从 21% 增加到 26%. 通过挑选 7 个价外看涨期权的价格, 我们可以得到价外看涨期权的隐含波动率:

| $\frac{K}{S}$ | 波动率 |
|---|---|
| 0.98 | 0.23 |
| 1.01 | 0.22 |
| 1.05 | 0.21 |
| 1.08 | 0.20 |
| 1.12 | 0.19 |
| 1.15 | 0.19 |
| 1.18 | 0.18 |

这里, 情况变化了. 我们可以看到当看涨期权的价值特性下降时, 波动率也随之下降.

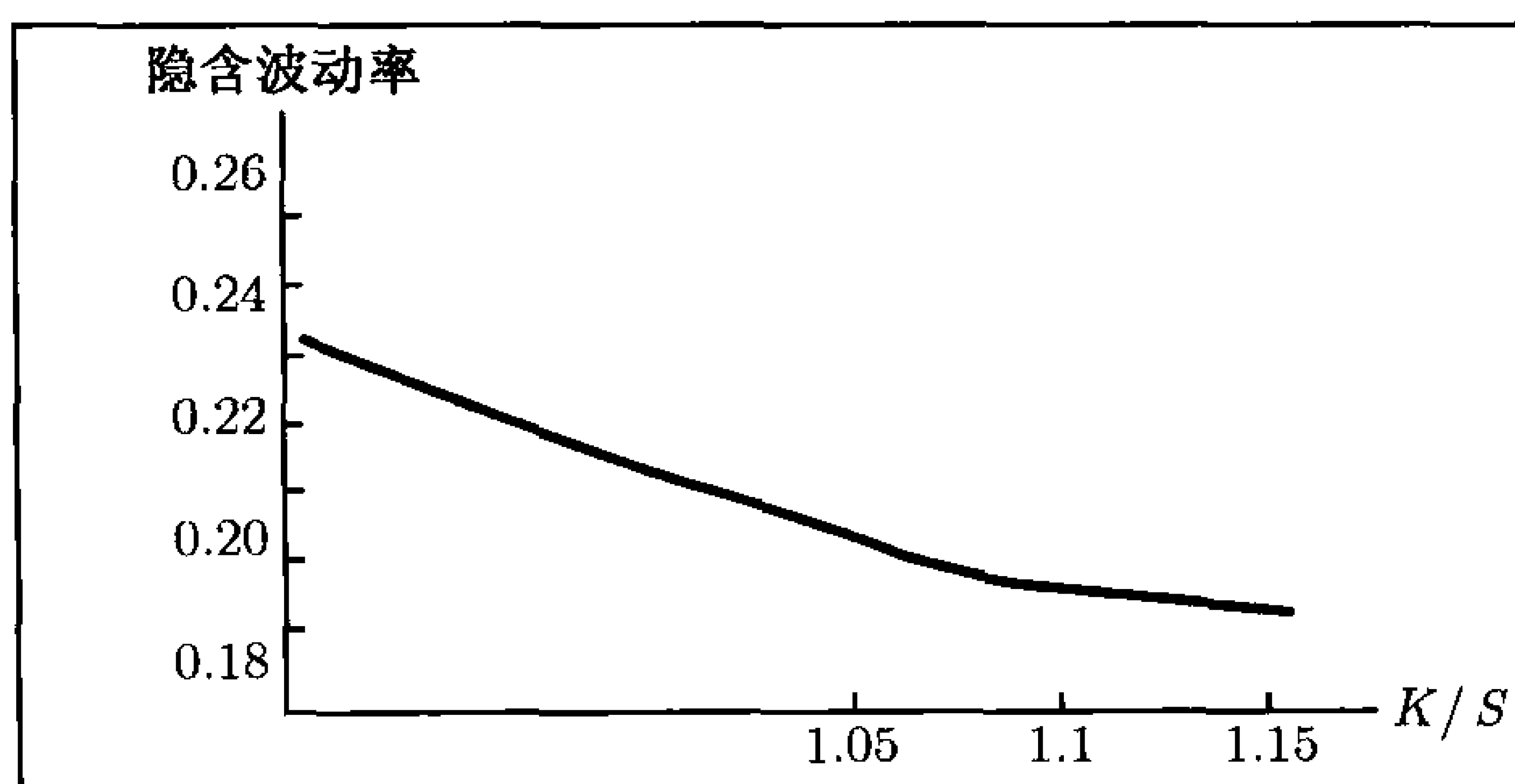



图　15-8

期权做市商现在可以认为如果 6 个月内, 如果 U.S. 股票市场要上升 20%的话, 那么恐惧因子将减少, 且波动率也随之下降.

崩盘导致微笑现象的出现, 对于崩盘的恐惧在某些情况下, 可以用所谓的跳跃过程表示. 下面讨论这种建模方法.

**建立崩盘模型**

再次考虑标准几何布朗运动:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, \infty), \tag{30}$$

$W_t$ 是风险中性概率 $\tilde{P}$ 下的 Wiener 过程. 现在, 保持波动率参数化的方法不变, 但增加一个跳跃项, 如 Lipton(2002) 中讨论的那样. 例如, 令

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t \left[(e^j - 1)dJ_t - \lambda m dt\right], \quad t \in [0, \infty). \tag{31}$$

对于 $(e^j-1)dJ_t - \lambda m dt$ 需要作一些定义. $j$ 是随机对数跳跃的大小. 跳跃的大小与跳跃的发生无关, 跳跃的发生用 $dJ_t$ 表示. 如果跳跃的大小为 0, 则 $(e^j-1)$=0, 而且跳跃项就无关紧要了.

$dJ_t$ 是泊松型的过程. 一般在 $t$ 时它等于 0. 但是它 "很小" 的概率等于 1. 这种情况发生的概率决定于我们考虑的区间长度和强度系数$\lambda$ 的大小. 跳跃可以采用如下方式建立

$$dJ_t = \begin{cases} 0, & \text{概率为} \quad (1-\lambda dt), \\ 1, & \text{概率为} \quad \lambda dt, \end{cases} \tag{32}$$

其中 $0 < dt$ 是无限小的短区间. 最后, $m$ 是 $(e^j - 1)$ 的期望值:

$$E_t^{\tilde{P}}\left[(e^j - 1)\right] = m. \tag{33}$$

所以, 对于无限小的区间可以写为

$$E_t^{\tilde{P}}\left[(\mathrm{e}^j-1)\mathrm{d}J_t\right]=E_t^{\tilde{P}}\left[(\mathrm{e}^j-1)\right]E_t^{\tilde{P}}[\mathrm{d}J_t] \quad (34)$$

$$=m[0\cdot(1-\lambda\mathrm{d}t)+1\cdot\lambda\mathrm{d}t] \quad (35)$$

$$=m\lambda\mathrm{d}t. \quad (36)$$

因此, $(\mathrm{e}^j-1)\mathrm{d}J_t-\lambda m\mathrm{d}t$ 的期望值为 0.

跳跃–扩散模型可以捕捉一些崩盘现象. 股票市场崩盘、主要的违约、9/11 类型的事件和货币贬值可以建立为极罕见的但导致价格跳跃的离散事件.

这些跳跃产生微笑的方式可以作如下解释. 总之, 当 Black-Scholes 假设满足, $S_t$ 是几何过程, 且波动率参数 $\tilde{\sigma}$ 是常数和无跳跃时, 波动率交易的套利关系为

$$\frac{1}{2}C_{ss}\tilde{\sigma}^2S^2+C_t+rC_sS-rC=0. \quad (37)$$

当在几何过程中增加跳跃项时, 如方程 (31), 相应的套利关系变为

$$\frac{1}{2}C_{ss}^*\sigma^2S^2+C_t^*+(r-\lambda m)C_s^*S-rC^*+\lambda E_t^{\tilde{P}}\left[C^*(S\mathrm{e}^j,t)-C^*(S,t)\right]=0, \quad (38)$$

其中 $\tilde{P}$ 是风险中性概率. 作为惯例, 假设我们决定使用 Black-Scholes 公式, 但是确信真正的 PDE 是公式 (37) 中的等式. 那么, 我们将选择 $\tilde{\sigma}$, 使得从 Black-Scholes 公式可以解出与 PDE 相同的期权价值.

例如, 价外期权的 gamma 将小得多, 记为 $C_{ss}$. 如果期望跳跃是负的, 那么 $\tilde{\sigma}$ 将较大, 而且期权在价外程度就越大. 当到期日 $T$ 增加时, $C_{ss}$ 将增加而且微笑将不那么弯曲了.

### 15.6.3 其他解释

许多其他的效应也可以引起波动率微笑. 一个是*随机波动率*. 考虑局部波动率模型

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t^\alpha\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,\infty), \quad (39)$$

其中 $\alpha<1$. 在该模型中, 因为百分比波动率依赖于随机变量 $S_t$, 所以它是随机的. 但是, 这种指定通常没有解释随机波动率模型的意义. 随机波动率捕捉到的是一种情形, 这里附加的 Wiener 过程 $\mathrm{d}B_t$(很可能与 $\mathrm{d}W_t$ 有关) 影响到百分比波动率的动态机理. 例如, 我们可以写出

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma_tS_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[0,\infty), \quad (40)$$

$$\mathrm{d}\sigma_t=a(\sigma_t,S_t)\mathrm{d}t+\kappa\sigma_t\mathrm{d}B_t,\quad t\in[0,\infty). \quad (41)$$

其中参数 $\kappa$ 表示 $S_t$ 波动率的 (常数) 百分比波动率, 波动率本身是由一些随机增量驱动的, 这些增量仅在波动率市场中产生, 只与影响价格数据的 $\mathrm{d}W_t$ 部分有关.

结果表明随机波动率产生波动率微笑. 事实上, 对于随机的波动率, 我们可以进行与带跳跃过程的 PDE 相似的分析 (见 Lipton(2002)), 结论很相似. 然而, 需要重点强调的是, 在其他条件相同的情况下, 这个模型在下列意义下是不完全的: 没有足够的工具来对冲 $dW_t$ 与 $dB_t$ 产生的风险, 从而形成一个无风险自融资的资产组合. 前一节讨论的跳跃-扩散模型可能存在同样的问题. 在一定范围内, 不同的过程影响跳跃部分和扩散部分, 并且模型也可能不是完全的.

**结构和监管的解释**

与期权账簿上价外期权相关的税收 (Merton,1976) 和资本要求的影响可能也会产生隐含波动率微笑. 我们简单讨论一下第二个影响.

下面的论述涉及 gamma 概念. 负的 gamma 头寸更具有风险, 期权在价外程度更大. 本质上, 负 gamma 意味着做市商卖出了期权, delta 对冲了它们, 并且他将使用该对冲的再平衡来支付 gamma. 如果期权深度价外, gamma 将趋近于 0. 然而, 如果期权突然变为价内, gamma 将出现突起, 特别是当期权将要到期时, 这可能导致很大的损失. 因此价外期权涉及到不可忽略的风险, 因而要求更多的资本金. 由于这些费用, 做市商要以比 ATM 波动率担保更高的价格卖出价外期权.

## 15.7 与微笑相关的问题

在金融工程中波动率微笑之所以重要, 至少有三个原因.

第一, 如果将微笑与所有风险因子联系起来, 而且如果微笑随时间随机地移动, 那么我们可以*交易*它, 建立利差头寸进行套利. 因此对于市场专业人士来说, 微笑的动态机理预示着新的机会.

第二, 它可能包含了重要的信息, 这些信息与潜在的现实波动率过程的动态机理有关. 由于存在波动率微笑, 定价和对冲可能变得越来越复杂, 特别是当工具具有特种期权的特点时. 那么波动率是一个常数还是一个随机过程呢? 如果是后者, 则是什么类型的随机过程呢? 带跳或 Wiener 型增量的过程是有效的近似吗? 这些问题对于风险管理和定价都是很重要的.

第三, 新产品和合成品的构造必须注重微笑的起因. 如果微笑由惯例和市场专业人士实际操作产生, 而不是由标的波动率的过程引起的, 那么必须将这些惯例考虑进去. 现在, 我们将进行详细讨论并提供利用波动率微笑的例子.

## 15.8 交易微笑

波动率微笑在不同的行业有不同活跃程度的交易. 在 FX 领域, 微笑是日常交

易的一部分. 这里, 市场从业者照例报价风险逆转, 它与汇率波动率中的对称性有关, 而且蝶式期权与微笑的曲率有关. 交易员交易并套利这些效应, 波动率微笑在股权领域也有交易. 交易员套利股票市场指数的波动率, 并且这样做有时可以间接交易微笑, 其他时间直接交易. 与风险相关的微笑比较陡峭, 人们希望将它扁平化. 交易员卖出深度价外期权并买入近似平价的期权. 在利率领域, 交易波动率微笑主要用于风险管理以及对冲上限/下限头寸和互换期权.

对于希望对波动率微笑的斜率和曲率建立头寸的投资者, 微笑现象是他们所关心的事情, 这只要想一想市场已经过高或过低地强调了标的参数就会明白. 下面例子中, 交易者们构造了偏度互换, 这是用现实偏度与隐含偏度进行交易的工具.

**例**

当标的为标准普尔 500 指数, 价外看跌和看涨期权的波动率偏斜增加时, 华尔街交易商正试图发掘期权的现实与隐含偏斜之间的差异. 纽约一位交易商表示了其对来自对冲基金波动率交易的, 标准普尔 500 偏斜互换的兴趣. 该交易商认为这将是第一个这样的互换, 它付出看跌和看涨期权的现实偏斜而获得隐含偏斜.

一位结构师解释道: 目前, 标准普尔偏斜在 30 以上——如果看跌和看涨的交割价变动 10%, 波动率将增加 3%. 而在 10 月初该水平为 15, 它同历史上 15~20 的水平是一致的.

一位曾试图将一个偏斜互换结合起来的结构师说, 没有数学公式可以捕捉任何时间区间的隐含偏斜, 他也承认为对冲这种产品感到为难. 他说: "为对冲这种产品, 我们可能必须每天晚上使用一个关于该产品的波动率互换, 但这并不是总能做到的." 一位竞争者说, 抓住瘪平偏斜的一种时尚交易是卖出价外看跌和看涨期权, 同时买入平价看跌和看涨期权. (《衍生产品周刊》, 1998 年 11 月)

这段文章的有趣之处是, 至少在这个特殊的例子中, 已观测到的微笑 (偏斜) 是通过乘以一个斜率为 0.3 的线性关系来刻画的. 如果货币性下降了 10%, 波动率过程将增加 3%. 交易商期望在正常情况下, 这种关系在 0.15 左右. 所以我们期望出现扁平微笑. 这种描述与斜率的变化有关.

## 15.9 微笑的定价

定价和对冲密切相关, 至少在抽象的环境中. 如果用流动证券复制一个资产, 资产的价格就是复制资产组合加上利润率的成本. 在前几章的几个要点中, 我们发现可以利用一系列交割价不同的期权复制资产. 这是一种用来寻找波动率互换对冲的方法 (例如在 14 章中那样). 复制资产组合由相关期权的权重组合而成, 这些期权除了交割价外具有相同的特点. 在第 11 章中, 期权资产组合可以静态地复制

几乎任意未来支付的函数. 同样, 这些期权除了交割价外其他都相同.

不同交割价期权的潜在使用使得波动率微笑成为构成对冲组合和定价复杂工具的重要参数. 事实上, 如果隐含波动率依赖于期权的价值特性, 那么当市场变动且复制期权变化时, 复制组合公式中的波动率参数将自动变化. 重要的是, 甚至当标的的现实波动率保持不变时, 这一点依然正确. 本节提供了有关这种现象的两个例子.

第一个例子是利率衍生产品, 即利率上限和下限. 它们是交易相当广泛的工具, 其对冲和定价受波动率微笑的影响较大. 第二个例子是复杂期权的定价. 同样, 方法和市场实践都在很大程度上依赖于波动率微笑的存在.

首先由上限和下限的简单框架开始讨论. 利用有限的结算日来说明主要思想及微笑的重要性. 这些工具的一般处理方法可以在一些很不错的文章中找到.[①]

**利率上限及下限**

对于固定收入的专业人士来说, 上限和下限是很重要的工具. 这里, 我们将它们作为一种工具来说明波动率微笑对金融工程师造成的主要困难. 当然, 这些内容也有自身的意义, 本章的参考文献中提供了有关的阅读资料, 它们可作为本节讨论的补充内容.

对于上限和下限与本书之前采用的方法是一致的. 第一, 讨论所谓的远期上限和下限, 而不是更具流动性的即期上限和下限. 这些工具在一个未来日期开始生效且流动性不强, 但是它们更适合于学习. 第二, 我们将遵循标准操作, 并从讨论过的工具中产生这些工具.

再次, 框架越简单越好, 且将推广留给读者. 考虑两期**远期固定支付方互换**(forward fixed payer swap), 如图 15-9a. 在这个互换中, 有两个交割

$$(f_{t_0} - L_{t_1})N\delta, \quad (f_{t_0} - L_{t_2})N\delta, \tag{42}$$

其中 $L_{t_i}$, $f_{t_0}$ 和 $N$ 分别是相关的 Libor 利率、远期互换率和远期互换本金, $\delta$ 是重置区间, 远期互换在 $t_1$ 时开始.[②]

考虑这个远期互换的特殊分解. 首先, 由于根据 $L_{t_1} > f_{t_0}$ 是否成立, 互换一方或在 $t_2$ 时获得支付或进行支付. 所以根据 $L_{t_1} < f_{t_0}$ 或 $L_{t_1} > f_{t_0}$, 在 $t_2$ 时结算的第一笔现金流可以分解成两个不定的现金流. 在 $t_3$ 时结算的第二笔现金流可执行同样的操作, 再次分解为两个不定支付. 如图 15-9d 和 15-9c 所示.

这些不定现金流可以解释为某些利率期权的支付. 考虑图 15-9b 中 $t_2$ 时的现金流. 这里, 如果 $L_{t_1} > f_{t_0}$, 客户将得到 $(L_{t_1} - f_{t_0})N\delta$, 否则什么也得不到. 所以这

① 例如, 见 Hull(2002), Musiela and Rutkowski(1998) 和 Rebonato(2002).

② $f_{t_0}$ 是应用于即期互换率的 $s_{t_1}$ 的远期利率, 后者将在 $t_1$ 时观测到. 另一方面 $f_{t_0}$ 在 $t_0$ 时就已知了.

个现金流将复制到期日为 $t_1$、结算日为 $t_2$、标的浮动利率为 $L_{t_1}$ 的期权的支付. 如果在 $t_1$ 时已知 Libor 利率超过上限水平$\kappa$, 这里 $\kappa = f_{t_0}$, 客户将在 $t_2$ 时得到一定的差值. 所以, 图 15-9b 的第一部分就像是对 Libor 利率的运动高于上限水平 $\kappa$ 的保险. 这个工具记为 caplet 且它在时间 $t$ 时的价格记为 $Cl^{t_1}$. 这种情况下客户买入了一个 caplet.

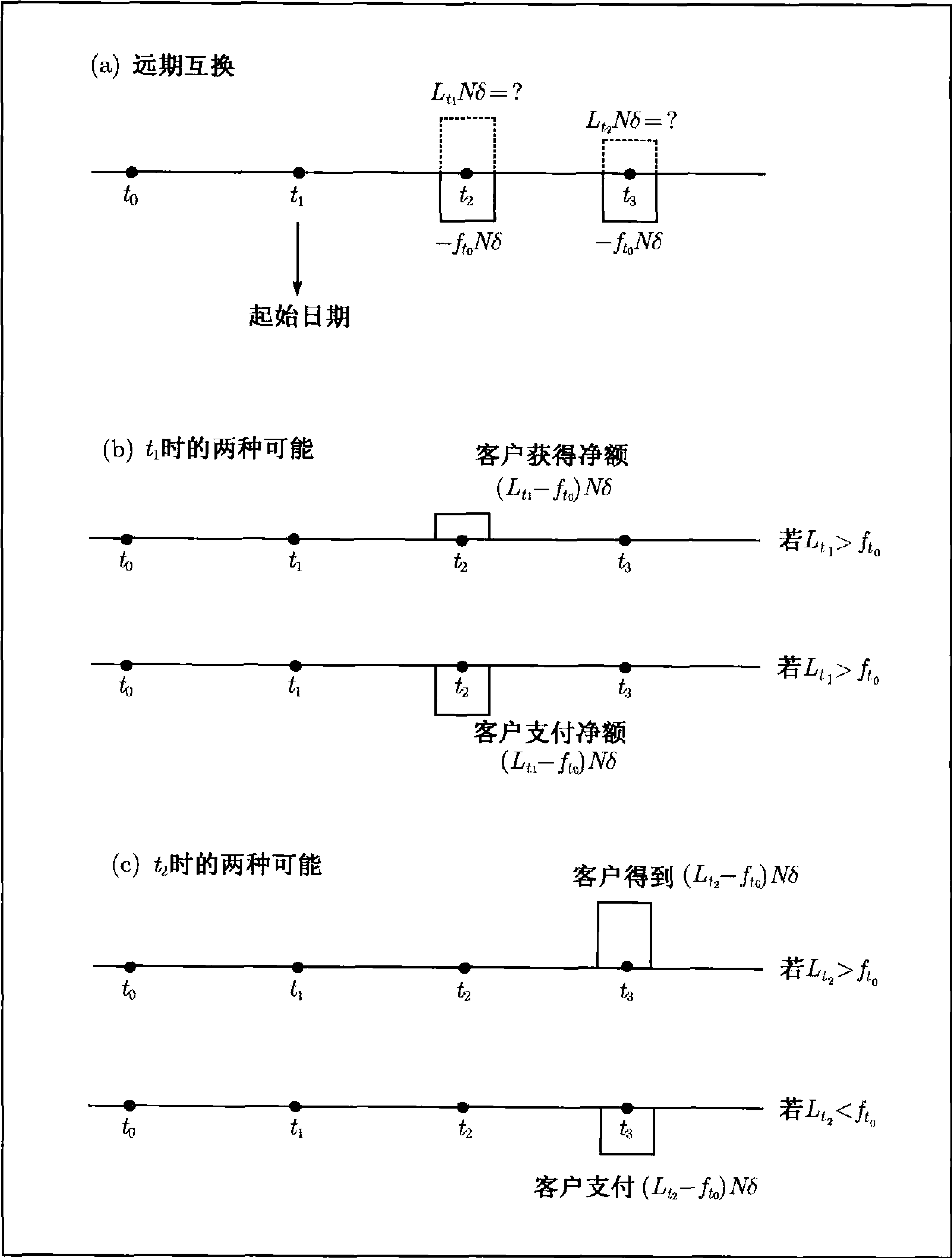



图 15-9

图 15-9b 的下一部分类似, 但表示对 Libor 利率的下跌低于下限水平 $\kappa$ 的保

险. 事实上, 这里的现金流当 $L_{t_1} < f_{t_0}$ 时为支付 $(f_{t_0} - L_{t_1})N\delta$, 否则客户的支付为 0. 这个现金流复制了到期日为 $t_1$, 结算日为 $t_2$, 标的 Libor 利率的期权的支付. 如果在 $t_1$ 时已知 Libor 利率降至下限 $\kappa$ 以下, 这里 $\kappa = f_{t_0}$, 那么客户在 $t_2$ 时支付一定的差值. 我们称这个工具为 floorlet, 记为 $Fl^{t_1}$. 显然, 这种情况下客户卖出了这个 floorlet.

时间 $t_3$ 的结算 caplet-floorlet 的方法也类似. 上限和下限相同:

$$\kappa = f_{t_0}, \tag{43}$$

但交割时间、结算时间和标的 Libor 利率 $L_{t_2}$ 不同. 通过组合 caplet, 我们得到两期远期利率上限, 它的起始时间是 $t_1$, 终止时间是 $t_3$

$$Cap = \{Cl^{t_1}, Cl^{t_2}\}. \tag{44}$$

类似的, 组合两个 floorlet 作为两期远期利率下限:

$$Floor = \{Fl^{t_1}, Fl^{t_2}\}. \tag{45}$$

通过组合 $n$ 个相似定义的 caplet 和 floorlet, 这些远期上限和下限可扩展到 $n$ 期.

图 15-9 说明我们得到了一个合约方程. 将图 15-9b 和 15-9c 垂直相加, 得到最初的远期互换. 因此, 可将合约方程写为

$$\boxed{\text{利率为}f_{t_0}=\kappa\text{的远期固定支付方互换}} = \boxed{\text{上限是}\kappa\text{的远期利率上限}} - \boxed{\text{下限是}\kappa\text{的远期利率下限}}. \tag{46}$$

这个合约方程说明上限、下限和互换是极为相关的工具.

1. 上限和下限的定价

在讨论微笑的有关问题之前, 我们必须简单地考虑一下如何定价上限或下限. 利用之前讨论的相同的两期上限和下限进行研究. 由金融工程学中的一个结论推知: 组成上限的 caplet 可独立定价, 它们的价值在贴现后可相加. 因此这里只需讨论如何定价 caplet. 我们假设 $Cl^{t_1}$ 的标的为 $L_{t_1}$.

第一, 令 $F(t, t_1)$, $t < t_1$, 表示 $t$ 时观测到的关于 $L_{t_1}$ 的远期利率. 更准确地, $F(t, t_1)$ 是 $t$ 时确定的贷款利率, 贷款在 $t_1$ 时开始, $t_2$ 时偿还. 市场实践假设远期 Libor 利率 $F(t, t_1)$ 可表示为初始点是 $F(t_0, t_1)$, 瞬时百分比波动率为常数$\sigma$ 的鞅:

$$\mathrm{d}F(t, t_1) = \sigma F(t, t_1)\mathrm{d}W_t, \quad t \in [0, \infty), \tag{47}$$

第二, 市场假设 $t_2$ 到期的无违约纯贴现债券价格 (记为 $B(t_0, t_2)$) 的无套利价值可以计算.[①]

第三, caplet$Cl^{t_1}$ 在 $t_0$ 时的价值由以下公式求得

$$Cl_{t_0}^{t_1} = B(t_0, t_2) E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_2}} [\max[L_{t_1} - \kappa, 0] N\delta], \tag{48}$$

其中 $\kappa$ 也等于远期互换率 $F_{t_0}$. 因此, 这是个 ATM 上限, $N$ 是本金数量. 这里是关于远期测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 求期望, 并且利用 $t_2$ 到期的纯贴现债券 $B(t_0, t_2)$ 进行了标准化.

第四, 注意在测度 $\tilde{P}^{t_2}$ 下, 远期浮动利率 $F(t_0, t_1)$ 是 $L_{t_1}$ 的无偏估计

$$F(t_0, t_1) = E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_2}} [L_{t_1}], \tag{49}$$

并可以得到它的解析表达式. 方法是对过程 $F(t, t_1)$ 应用 Black 公式, 其中 $F(t, t_1)$ 的漂移项为 0. 然后计算期望

$$E_{t_0}^{\tilde{P}^{t_2}} [\max[L_{t_1} - \kappa, 0] N\delta], \tag{50}$$

由此得到 Black公式

$$Cl_{t_0}^{t_1} = B(t_0, t_2)[F(t_0, t_1) N(h_1) - \kappa N(h_2)]\delta N, \tag{51}$$

其中

$$h_1 = \frac{\log\left(\frac{F(t_0,t_1)}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}}, \tag{52}$$

$$h_2 = \frac{\log\left(\frac{F(t_0,t_1)}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_1 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_1 - t_0}} - \sigma\sqrt{(t_1 - t_0)}. \tag{53}$$

注意 $F(t_0, t_1)$ 和 $F_{t_0}$ 都是利率, 它们与 $t_2$ 时美元的计算有关. 贴现债券 $B(t_0, t_2)$ 是结算中市场决定的 "期望" 贴现率.

除了必须在时间 $t_3$ 远期测度 $\tilde{P}^{t_3}$ 下求期望, $t_2$ 到期的 caplet$Cl^{t_2}$ 的定价也类似, 而且标的远期利率现在是 $F(t_0, t_2)$, 而不是 $F(t_0, t_1)$.[②] 解定价方程得

$$Cl_{t_0}^{t_2} = B(t_0, t_3)[F(t_0, t_2) N(g_1) - \kappa N(g_2)]\delta N, \tag{54}$$

其中

$$g_1 = \frac{\log\left(\frac{F(t_0,t_2)}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}}, \tag{55}$$

① 注意贴现债券在结算日 $t_2$ 而不是在 caplet 的到期日 $t_1$ 到期. $t_2$ 时得到的随机支付必须进行贴现.
② 对于 $\tilde{P}^{t_2}$, $L_{t_2}$ 不是鞅, 而且相应的 SDE 的漂移不再为 0.

$$g_2 = \frac{\log\left(\frac{F(t_0,t_2)}{\kappa}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_2 - t_0)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} - \sigma\sqrt{(t_2 - t_0)}. \tag{56}$$

值得注意的是尽管两个 caplet 的到期日不同, 但在它们的公式中都使用了相同的常数百分比波动率. 事实上, 第一个 caplet 的期限是 $[t_0, t_1]$, 而第二个 caplet$Cl_{t_0}^{t_2}$ 的期限较长, 为 $[t_0, t_2]$.

最后, 为了得到上限本身的值, 市场人士将两个 caplet 的价格简单相加得:

$$Cap_{t_0} = B(t_0,t_2)[F(t_0,t_1)N(h_1) - \kappa N(h_2)] + B(t_0,t_3)[F(t_0,t_2)N(g_1) - \kappa N(g_2)], \tag{57}$$

其中 $h_i$ 和 $g_i$ 如以前的定义. 设参数 $N, \delta$ 在此公式中的值为 1. 否则, 右端需要乘以 $N, \delta$.

2. 小结

有必要总结一下上限/下限定价惯例中的重要步骤. 首先, 为了定价每个 caplet, 市场利用贴现债券的均值进行标准化, 这个债券的到期日是特定 caplet 的结算日, 并得到相对 caplet 的远期测度. 其次, 因为相应的远期 Libor 利率在这个测度下是鞅, 所以市场利用漂移项是 0 的 SDE. 再次, 假设所有的 caplet 的波动率是常数且相等. 最后, 选择适当的远期测度使得分别计算随机贴现因子的期望和 caplet 支付的期望成为可能. 同时使用合适的流动贴现债券价格作为权重相加, Black 公式给出了 caplet 的价格.

3. Caplet 的定价和微笑

前面的总结已经解释了波动率微笑与定价和对冲上限/下限相关的原因. 后者是由一些 caplet 和 floorlet 的组合, 因此也是标的为不同的远期利率 (记为 $F(t_0, t_i)$, $i = 1, \cdots, n$) 的一篮子期权.

只要收益率曲线不是平直的, 远期利率 $F(t_0, t_i)$ 就互不相同. 但是每个上限或下限只有一个交割价 $\kappa$. 这表示相对于这个交割价, 有

$$\frac{F(t_0,t_1)}{\kappa} \neq \frac{F(t_0,t_2)}{\kappa} \neq \cdots \neq \frac{F(t_0,t_n)}{\kappa}. \tag{58}$$

换句话说, 只要收益率曲线向上或向下弯曲, 比率

$$\frac{F(t_0,t_i)}{\kappa} \tag{59}$$

就不同, 这表示每个 caplet/floorlet 有不同的价值特性.

现在, 假设存在波动率微笑. 如果在这些条件下, 每个 caplet 和 floorlet独立卖出, 期权交易员将替换一个不同的波动率参数, 使之适应 Black 公式中的微笑. 但

是 caplet 或 floorlet 是上限和下限的组成部分. 更重要的是, 在 Black 公式中, 我们使用了唯一的波动率参数.

这样做至少有两种意义：第一, 我们看到上限的波动率参数是期权的 caplet 波动率的加权平均, 这些期权具有不同的价值特性; 第二, 甚至当现实的波动率和 ATM 波动率保持不变时, 通过微笑, 收益率曲线的运动将改变标的 caplet(floorlet) 的价值特性, 并且将改变相应的 Black 公式中的波动率参数. 换句话说, 如果存在波动率微笑, 那么要对上限/下限账簿进行盯市可能就会是一件很微妙的任务了.

## 15.10 奇异期权和微笑

由于存在波动率微笑, 在很大程度上能改变定价和对冲实践的第二类主要工具是奇异期权. 本节选取简单敲出看涨期权作为表达我们主要思想的代表. 有了普通期权、敲出和敲入看涨之间的合约方程, 我们的结论就可以立即拓展到敲入看涨期权. 本节结尾简单讨论了数字期权及波动率微笑的存在对它们的影响.

### 15.10.1 障碍的对冲

敲出看涨期权在第 8 章和第 10 章已经讨论过. 简单的敲出看涨期权与交割价为 $K$、期限为 $T$、标的为 $S_t$ 的欧式普通看涨期权相似, 除了在期权期限内, $S_t$ 降至障碍 $H$ 以下, 期权将终止:

$$S_t < H, \quad t \in [t_0, T]. \tag{60}$$

当期权价值变得更加价内时, 敲出障碍的价格接近普通看涨期权的价格. 但是, 当标的接近障碍时, 敲出期权的价值将接近于 0.

从业者可以利用一些方法对冲敲出期权. 这里, 我们说明一下对冲的作用：(1) 有很好的金融工程含义; (2) 可以清楚地说明微笑的重要作用.

假设我们买入相应的普通看涨期权, 并为了某种目的, 卖出一个谨慎选择的价外普通看跌期权, 这个看跌期权的交割价为 $K^*$, $K^* < K$. 当 $S_t$ 接近障碍 $H$ 时, 我们想要看跌和看涨期权组合的价值为 0. 事实上, 这个组合是一种风险逆转, 它近似复制了敲出期权. 如果 $S_t$ 远离 $H$, 看跌期权将变成价外的, 并且其价值将下降, 那么, 组合看起来更像普通看涨期权, 这就是敲出期权所要实现的. 另一方面, 当 $S_t$ 接近 $H$ 时, 看跌期权将变得更有价值. 在谨慎选择的 $H$ 处, 看跌期权头寸的价值应等于普通期权的价值, 而且组合的价值为 0, 这就是敲出期权在 $H$ 附近所要实现的. 当 $S_t$ 降至 $H$ 以下时, 则必须卖出该组合.

所以, 如果选择合适的 $x$ 和 $K^*$, 下面的组合

$$(\text{卖出}x\text{单位}K^*\text{看跌期权}, \quad \text{买入 1 单位}K\text{看涨期权}) \tag{61}$$

复制了敲出看涨期权. 复制的一种方法是利用 “对称性” 原则.

假设没有微笑效应, 属于同一系列、具有不同交割价的期权将具有相同的波动率. 那么, 我们可以对 $x$ 和 $K^*$ 做如下选择. 当 $S_t \to H$ 时, 我们希望 $x$ 单位的 $K^*$ 看跌期权等于普通看涨期权的价值. 这可以通过选择 $K^*$ 使得

$$K^* K = H^2. \tag{62}$$

假设这些期权的价格满足

$$\frac{K^*\text{看跌}}{K\text{看涨}} = \sqrt{\frac{K^*}{K}}. \tag{63}$$

这表示如果 $x$ 满足

$$x = \frac{K}{K^*}, \tag{64}$$

那么当 $S_t$ 趋近于 $H$ 时, $x$ 个单位的 $K^*$ 看跌期权的价值将等于 $K$ 看涨期权的价值. 所以组合将复制敲出看涨期权, 如果出现例外, 达到了障碍, 则需要清算该组合.

### 15.10.2　微笑效应

首先考虑一个稳定波动率微笑的效应. 如果微笑不随时间移动, 那么很容易将这个微笑合并到此前的复制组合中. 假设在区间 $[K^*, K]$ 微笑向下弯曲. 那么对于每个普通期权, 我们可以在 Black-Scholes 公式中插入不同的波动率参数. 此前选择的相同 $K^*$ 看跌期权在平直微笑情况下更有价值, 这表示敲出期权可以以较低的价格卖出. 如果微笑在区间内是向上弯曲的, 那么逆转是真实的并且敲出期权较贵. 所以在定价和对冲敲出期权时, 需要考虑微笑的直接效应.

微笑还有第二种效应. 假设在期权期限内微笑*不是*稳定的, 而且随时间变化. 那么复制将分步进行, 因为微笑随时间移动, 当 $S_t$ 趋近于 $H$ 时, 将使看涨和看跌期权的相应价值与最初所期望的比率不同. 由于在大多数市场中微笑不稳定, 所以通过这种复制进行对冲的技术是有问题的, 而且敲出期权的定价也将不可靠.

1. *存在技术困难的例子*

在所有标准假设都满足的情况下, 通过利用敲出定价公式, 我们来考虑波动率微笑导致的复杂性. 在第 8 章中已经给出了敲出期权的定价公式. 特别地, 在满足所有标准假设和无红利支付的条件下, 标的股票 $S_t$ 的下敲出看涨期权的价格是

$$C^b(t) = C(t) - J(t), \tag{65}$$

其中 $C(t)$ 是普通看涨期权的价值, 它由标准 Black-Scholes 公式给出, 而且 $J(t)$ 是需要使用的 “贴现”, 因为如果在合约有效期内 $S_t$ 降至 $H$ 以下, 则期权将终止. $J(t)$ 的表达式是

$$J(t) = S_t \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}+2} N(c_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma^2}} N(c_2), \tag{66}$$

其中

$$c_{1,2} = \frac{\log \frac{H^2}{S_t K} + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{67}$$

我们注意到, 就像 Black-Scholes 公式一样, 这个定价函数包含了唯一的波动率参数 $\sigma$. 对于普通期权, 甚至当标的假设不能满足时, 可以使用这个参数利用公式得出正确答案. 所以, 在微笑的环境及非常数波动率的条件下, 交易员可以使用波动率的一个值, 并利用公式得到正确答案. 事实上, 尽管与这些工具有关的远期利率各有不同, 但在定价利率上限和下限时仍然可以这样使用.

不幸的是, 如果波动率微笑存在, 而且这个微笑随时间连续地 (并且是随机地) 变化时, 那么对于下敲出看涨期权的定价公式, 这种方法不一定可行. 事实上, 可能不存在代入 (66) 中得到下敲出看涨期权正确价格的唯一合理的波动率值. 甚至当现实波动率和 ATM 隐含波动率保持不变时, 如果微笑的斜率变化了, 那么如此前讨论的那样, 下敲出看涨期权的价格也会变化. 事实上, 如果微笑具有负斜率, 复制组合中的短期看跌部分将变得较便宜, 而下敲出看涨期权的价值可能上升. 所以, 对于奇异期权, 当微笑效应比较显著的时候, 波动率调整与正确的期权价格之间的关系可能变得越来越复杂.

2. 奇异期权定价

实际的交易发生在波动率微笑存在的情况下, 而且需要设定奇异期权的价格, 从而考虑调整对奇异期权的对冲所付出的成本和获得的利益. 由于微笑的存在, 当时间变化时, 因为此前解释过的原因, 需要对奇异期权的 vega 对冲进行调整. 调整时, 基于期权账簿中的净头寸, 交易员可能实现某些净现金收益或损失. 这些 "期望" 现金收益或损失的现值需要合并到市场价格中去. 最后, 奇异期权的市场价格可能比公式 (66) 中得出的理论价格高或低.

### 15.10.3 数字期权

第 10 章说明了交割价是 $K$ 且到期日是 $T$ 的欧式数字看涨期权的理论复制, 即买入 $1/h$ 单位、交割价为 $K$ 的普通期权, 并卖出 $1/h$ 单位、交割价为 $K+h$ 的普通期权. 这里 $h$ 是未来市场中的最小单位.

如果存在波动率微笑, 那么由于这些普通看涨期权具有不同的交割价, 因而有不同的波动率, 所有需要调整它们的价格. 当然, 如果 $h$ 很小, 波动率的差异也会很小, 但是 $1/h$ 将变大, 而且头寸将包括购买和卖出大量的普通看涨期权. 结合这些

数据, 波动率中的微小变化可能会导致最终结果的显著差异.[1]

### 15.10.4 其他应用: 风险逆转

交易微笑流动性最好的方法之一是利用 FX 市场的风险逆转. 考虑标的汇率为 $e_t$ 的期权, 固定到期日为 $T$, 并且按照交割价 $K_i$ 排列看跌和看涨期权. 然后, 计算这些期权的 delta 并考虑一系列合理的 delta. 我们利用期权的 delta 表示价值特性.

对于这些汇率期权, 典型的微笑如图 15-6 表示的那样. 它是一条 "对称" 曲线, 而且在 2 维图中以百分比波动率作竖轴, 期权的 delta 为 $x$ 轴作图的. 特别地, 考虑 20, 50 和 75delta 的期权.[2]

考虑如下例子.

**例**

过去两周内美元/日元外汇市场的活动已经显示出了与奇异期权定价相关的复杂性. 更重要的是, 它为经验丰富的期权机构提供了一个机会, 用以检验他们彼此之间及和相对落后的竞争者之间的定价理论.

但是, 使期权交易者获得好处的不是即期利率本身的下降, 而是最终的风险逆转头寸. 风险逆转是市场中方向偏好的一种表达方式. 如果预计即期汇率会下降, 如美元/日元的情况, 那么需要的看跌期权相对于看涨期权会多得多, 因此波动率交易商对看跌期权的要价将比看涨期权更高. 一位评论员说, 不像标准的 Black-Scholes 期权定价模型中假设的那样, 波动率不是常数, 而是随期权 delta 变化的.

上周, 一个月的美元/日元风险逆转增长到大约 3, 而且在这个水平上持续盘旋, 这是自 1995 年夏以来从未发生过的. 这种特殊的情况使得有经验的交易员可以在他们所谓幼稚的对手的定价中发现价值.

"在过去的几天里, 许多银行认识到了有关风险逆转的内容," 一位交易员说. 市场权威人士称, 欠发达的机构不能充分考虑在定价和对冲的复杂结构中风险逆转的效应, 例如敲出和轨道依赖期权.

他们也断言简化现行使用的 (off-the-shelf) 期权定价软件不能解决在风险逆转情况下的奇异衍生产品的定价. 这些软件不允许使用者对不同的 delta 输入不同的波动率, 因此不能捕捉到奇异期权定价的细微差别.

然而有些评论员认为, 它过于简化, 而且当在很高的风险逆转情况下对冲一定类型的期权时, 其他的 "三阶" 效应将发挥作用. 他们还认为三阶效应意味着 Black-Scholes 的使用者不会对障碍估价过高, 而仅仅是定错价格. (IFR 第 1188 期, 1997 年 6 月)

---

① 另外, 我们注意到这个对冲需要买卖波动率, 从而受波动率询价差变化的影响.

② 从业者日常使用中是用 100 乘以 Black-Scholes 公式中的 delta.

上例说明风险逆转是波动率微笑 FX 市场的产物, 而且交易量很大. 但是, 风险逆转交易中的市场从业者显然是想解决标的微笑动态机理的问题. 动态机理可能很复杂且自身也在变化, 从而使得对奇异期权头寸的定价和对冲可能变得越来越困难.

## 15.11 结 论

波动率微笑是金融中令人着迷的课题, 它也是一种复杂的现象. 关于它的起因以及对它进行模拟都需要更多的研究. 本章虽然只给出了一些简单的介绍, 但已经解释了与之相关的本质问题.

## 参考文献

Brigo 和 Mercurio(2001) 编写的教科书中讨论了利率的波动率微笑. 对于股权微笑, 读者可以参考 Derman et al. (1994) 和 (1996) 的文章. Lipton(2002) 提供了处理波动率微笑的综合方法. Taleb(1996) 则涉及了大多数市场的实践. 还有一些讨论波动率微笑的经验和理论内容的文章. 最近的一篇是 Johnson 和 Lee(2003). 这里引用的文献也包括了前面所研究课题进一步的参考资料.

## 习 题

1. 考虑下页的表格, 它列出了 2002 年 1 月 10 日 9:46 时关于 OEX 指数的所有期权的买入/卖出价格. 这些期权在 2002 年 2 月 22 日到期. 在收集数据时, 标的是 589.14.

   (a) 利用价外看跌期权的卖价, 计算相关交割价的隐含波动率. 画出 $K/S$ 对波动率微笑的图像.

   (b) 利用价外看跌期权的买价, 计算相关交割价的隐含波动率. 画出 $K/S$ 对波动率微笑的图像. 这些波动率的询价差是常数吗?

   (c) 利用价外看涨期权的卖价, 计算相关交割价的隐含波动率. 画出 $K/S$ 对波动率微笑的图像. 当你将图像与价外看跌波动率比较时, 是否能得到微笑或偏斜呢?

2. 考虑如下论述:

一位不动产交易员认为上限–下限的波动率应该比互换期权高一些. 位于伦敦的一位证券交易员说, 通过可赎回债券, 公司可购买上限而投资者则卖出互换期权. 在结构上市场在上限方面是空头而在互换期权中是多头.

   (a) 互换期权是在预定的日期数据和利率下, 进行互换的一种期权. 根据以上论述说明为什么上限–下限的波动率应该比互换期权的波动率高.

   (b) 在结构上市场在上限方面是空头而在互换期权中是多头的原因是什么?

   (c) 对于对冲和风险管理, 这篇论述的意义是什么?

| 看涨 | 买价 | 卖价 | 波动率 | 看跌 | 买价 | 卖价 | 波动率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Feb 400 | 188.9 | 191.9 | 0 | Feb 400 | 0.05 | 0.2 | 0 |
| Feb 420 | 169 | 172 | 0 | Feb 420 | 0.1 | 0.4 | 0 |
| Feb 440 | 149.2 | 152.2 | 0 | Feb 440 | 0.25 | 0.55 | 0 |
| Feb 460 | 129.4 | 132.4 | 0 | Feb 460 | 0.45 | 0.75 | 0 |
| Feb 480 | 109.6 | 112.6 | 0 | Feb 480 | 0.8 | 1.1 | 0 |
| Feb 500 | 90.2 | 92.7 | 0 | Feb 500 | 1.4 | 1.7 | 0 |
| Feb 520 | 71 | 73.5 | 0 | Feb 520 | 2.5 | 2.8 | 0 |
| Feb 530 | 61.6 | 64.1 | 0 | Feb 530 | 2.8 | 3.5 | 0 |
| Feb 540 | 52.4 | 54.9 | 0 | Feb 540 | 3.7 | 4.4 | 0 |
| Feb 550 | 43.8 | 45.8 | 0 | Feb 550 | 4.9 | 5.6 | 1 |
| Feb 560 | 35.4 | 37.4 | 0 | Feb 560 | 6.6 | 7.3 | 0 |
| Feb 570 | 27.9 | 29.4 | 0 | Feb 570 | 8.9 | 9.6 | 0 |
| Feb 580 | 20.8 | 22 | 0 | Feb 580 | 11.8 | 12.8 | 0 |
| Feb 590 | 14.8 | 15.8 | 0 | Feb 590 | 15.8 | 16.8 | 1 |
| Feb 600 | 10 | 10.7 | 1 | Feb 600 | 20.8 | 22 | 0 |
| Feb 610 | 6.1 | 6.8 | 0 | Feb 610 | 27.1 | 28.6 | 0 |
| Feb 615 | 4.6 | 5.3 | 0 | Feb 615 | 31 | 32 | 0 |
| Feb 620 | 3.4 | 4.1 | 0 | Feb 620 | 34.3 | 36.3 | 0 |
| Feb 630 | 1.9 | 2.2 | 0 | Feb 630 | 42.8 | 44.8 | 0 |
| Feb 640 | 0.9 | 1.2 | 0 | Feb 640 | 52 | 54 | 0 |
| Feb 650 | 0.4 | 0.7 | 0 | Feb 650 | 61.4 | 63.9 | 0 |
| Feb 660 | 0.15 | 0.45 | 0 | Feb 660 | 71.2 | 73.7 | 0 |
| Feb 680 | 0 | 0.25 | 0 | Feb 680 | 90.8 | 93.8 | 0 |
| Feb 700 | 0 | 0.2 | 100 | Feb 700 | 110.8 | 113.8 | 0 |

# 第 16 章　信用衍生品如何改变金融工程

## 16.1　引　言

信用衍生品对金融工程产生的影响是革命性的. 流动性信用衍生品是市场参与者在合成几乎任意一种金融工具的拼图游戏中所需要的最后一块积木. 没有信用衍生品, 合成非 AAA 等级的工具并不是不可能, 但这样的合成绝不是完善的. 由于合成时没有信用衍生品, 因此必须花费一定的精力来处理信用利差, 并且在某种程度上这种合成的主观随意性较大. 本书通篇所使用的基本原则是: 在定价、对冲以及风险管理中应该尽可能使用有流动性的、可交易的证券. 信用衍生品的存在, 可以最大程度地减少建模中的主观性, 并使模型参数可以通过流动性市场进行校正.

流动性信用衍生品市场使合成的工具范围扩大到有违约风险的资产, 将*信用衍*生品的定价交给市场完成, 这样可以将信用衍生品单独分离出来进行交易. 与此相比, 传统的处理信用风险的方法一般是利用一些人为方法来估计*信用曲线*, 通常是在*国库券曲线*上加入适当的*信用利差*, 从而得到包含信用风险的贴现因子. 但是, 在某些情况下, 信用利差可能在很短时间内改变 200~300 个基点, 此时对国库券曲线进行恰当的校正远不如从市场中获取特定信用风险本身的信息重要, 即使信用利差的波动是由于互换利差的正常波动所引起. 考虑这些问题以及利用流动性工具分别对违约工具进行定价, 对于一个风险经理人来说非常重要, 信用衍生品此时发挥着重要的作用.

本章首先简单回顾一下主要的信用工具, 然后讨论如何将信用衍生品很好地融入到这些工具的工程过程中. 这里的讨论只涉及信用产品最基本的方面, 讨论的重心将集中在信用违约互换 (CDS) 上. 它是信用市场中一类主要的信用工具, 其重要性与日俱增, 我们会看到 CDS 是流动性固定收益工具的自然延伸. 此外还选取了其他一些信用衍生品的有关问题进行讨论.

## 16.2　术语和定义

首先, 我们需要定义一些术语. 虽然对有关信用问题的主观性处理与银行业本身的历史一样长远, 但信用风险作为现代金融的一个分支还是比较新的. 其中的一些用语来自互换市场, 但是另外一些却是新产生的, 并且为该领域所特有.

(1) *参照资产*. 这是一种金融工具, 是交易信用风险所使用的载体. 注意, 信用对基础风险采用了一种更自由的定义方式. 一个交易者虽然从事贷款交易, 但他可通过同一个信用实体发行的债券来对冲信用风险.

(2) *信用事件*. 信用风险直接或间接地与某种具体的事件 (比如说违约、降级) 相联系. 与影响相对较小且连续发生的市场风险事件相比, 信用事件一般是比较重大的离散事件.① 在信用衍生品合约中, 必须仔细地定义标的信用事件. 例如, 业界目前仍在探讨关于违约的准确定义. 另一方面, 由评级机构给出的信用等级的下降在这种意义上却比较清楚. 最近人们还在争论是否将债务的重组列为一个信用事件.② 有趣的是, 业界并不赞成将债务重组视为信用事件. 这样的争论有助于正确理解信用衍生品, 但是它同样说明信用行业现在处于一个转型时期, 人们正努力使合约和有关文件规范化.

(3) *受保护的买方*. 这是购买信用工具的一方, 比如说购买 CDS 的一方. 这个实体将定期地向*受保护的卖出方支付一定金额*用于发生违约事件时的赔偿. *受保护的卖方*就是这个 CDS 的卖方.

(4) *回收值*. 如果发生了违约, 信用工具的支付将取决于违约时标的资产的回收价值, 因此买方需要为可回收价值以外的部分买保护. 穆迪和标准普尔这类主要评级机构利用过去的违约数据, 计算出各种信用实体的回收率, 并以表格的形式给出.

信用领域还有其他一些特定的词汇, 我们将在后面的讨论中陆续介绍. 现在简短地回顾一下基本的信用衍生品. 由于信用违约互换是到目前为止最活跃的合约, 所以我们将集中讨论这一类互换. 当然, 我们感兴趣的还有其他一些工具, 并将对它们作简单的讨论.

**信用衍生品的类型**

信用衍生品最初的形式可以追溯到银行业的开始, 但那时的信用衍生品是不流动的, 并且一般而言不像现代金融工具那样具备很多吸引人的特性, 而正是这些特性有助于它们在金融工程中的运用. 信用证、银行承兑汇票和担保这类银行业务是现代信用工具的前身, 存在于每个银行的资产负债表中. 但传统的信用工具在金融工程中使用起来不太方便. 现代信用工具有自己独特的特征, 本章基本上只考虑这些现代信用工具.

广义上, 信用衍生品有三个主要的种类. (1) *信用事件*相关的产品, 它的赔偿支付由双方所认同的事件的发生来决定, 信用违约互换是这一类中最具代表性的工具. (2) *信用利差*工具, 这一类工具的支付取决于某个特定的信用利差的改变. 信用

① Wiener 类型事件与 Poisson 类型事件是两个理论上的例子.
② 这里的思想是, 债务重组公司与已经违约的公司或预期将违约公司在违约概率上有很大的不同.

利差期权是其中的一个例子. 在这类期权中, 当信用利差超过了交割水平 $K$ 时进行支付. (3) *混合产品*, 最流行的混合产品就是总收益互换 (TRS), 它的支付同时依赖于利差的变动以及如违约这一类事件的发生.

1. 信用违约产品

信用风险可以分为两大不同的种类: 其中一种是*信用恶化*, 标的信用利差的变动可以反映出信用是怎样恶化的; 第二种就是*违约风险*, 这种信用风险虽然和信用恶化有联系, 但二者是不同的. 违约产品将违约风险从信用恶化风险中分离出来, 并使它们通过这些工具进行交易.

违约产品和传统的金融工具具有类似的特性. 例如, 银行发行信用证、担保和保险. 这些传统工具的主要特征是它们只转移信用风险, 特别地, 它们不能转移市场风险或信用恶化风险. 本质上, 它们只在发生违约时支付, 而当信用恶化时则没有任何补偿.

新的信用违约产品具有这些旧式工具的某些特性, 这些产品有两类. (1) *信用违约互换*: 在违约发生前, 定期地支付费用; 如果没有违约, 保护在合约结束时终止, 并且没有其他的现金交换. (2) *信用违约期权*与信用违约互换类似, 但是费用是提前支付的. 所有这两类工具都包括了在发生违约时有一个固定费用和一个权益支付的交换. 下面给出了关于信用违约产品的一些重要特点.

(1) 违约产品的支付取决于一个*信用事件*而不是一个标的价格, 这与保险产品相似而与其他衍生产品不同, 因此增加了法律和文件风险. 国际互换和衍生品协会 (ISDA) 在 CDS 和约标准化问题上投入了很大的精力.

(2) 回收值的确定. 这是定价中一个非常困难的成分, 必须在信用衍生品合约中明确地规定.

(3) 交割问题. 在*实物交割*的情形下, 这并不是一个很大的问题, 受保护的卖方将是违约产品法律上的所有者, 并且可以采取必要的法律措施得到回收价值. 但是如果合约是现金交割, 除非一方直接拥有标的信用工具, 否则任何一方都不能借助法律来解决问题. 由于这个原因, 在实际中人们更青睐于实物交割, 绝大部分违约互换就是以这种形式交割的.

在详细研究信用违约互换时, 我们再讨论违约产品的其他特征, 现在只简单地考虑用于交易信用恶化风险的工具.

2. 利差产品

这些工具与标准衍生品类似. 假设市场提供一个信用利差, 那么期权和其他的衍生品可以将其作为标的, 就像股票和利率一样. 有趣的是, 利差本身依赖于违约概率, 这涉及一个非线性的随机过程. 此时潜在的理论模型通常不是简单地基于一个 Wiener 过程的随机微分方程 (SDE), 而是要包含跳过程的某些特征, 或者可能

还会涉及其他的非线性因子.

我们可以想象至少有两种利差工具. 第一种是信用利差期权, 它的支付是利差超过交割价格的部分. 如果将信用利差取代 Libor 利率作为标的风险, 则在本质上信用利差期权将与一个标准上限类似. 另一种利差工具就是信用利差互换, 互换的一方支付一个发行者的信用利差, 而接受另外一个发行者的利差. 就像前面提到的那样, 市场更青睐于交易违约产品, 这使得纯利差产品在信用衍生品中只占很少一部分.

3. **混合产品**

这类产品的主要特征是它们的标的风险是市场风险和信用风险的混合. 这两种风险捆绑在一起出售给客户. 混合信用产品的主要代表是总收益互换 (Total return swap, TRS).

违约产品与总收益互换这类混合工具之间有着重要的差别, 因为信用恶化和违约风险可以在市场上分开交易, 所以信用违约产品能保证交易者在发生违约时获得与市场价值等值的一份资产, 而不直接承受市场风险. 另一方面, 总收益互换却包含了**市场风险**.

下节将更详细地介绍最具流动性的信用衍生品, 并讨论信用违约互换的金融工程.

## 16.3 信用违约互换

信用产品中主要的一类工具是信用违约互换. 图 16-1 是一个从保护买方的角

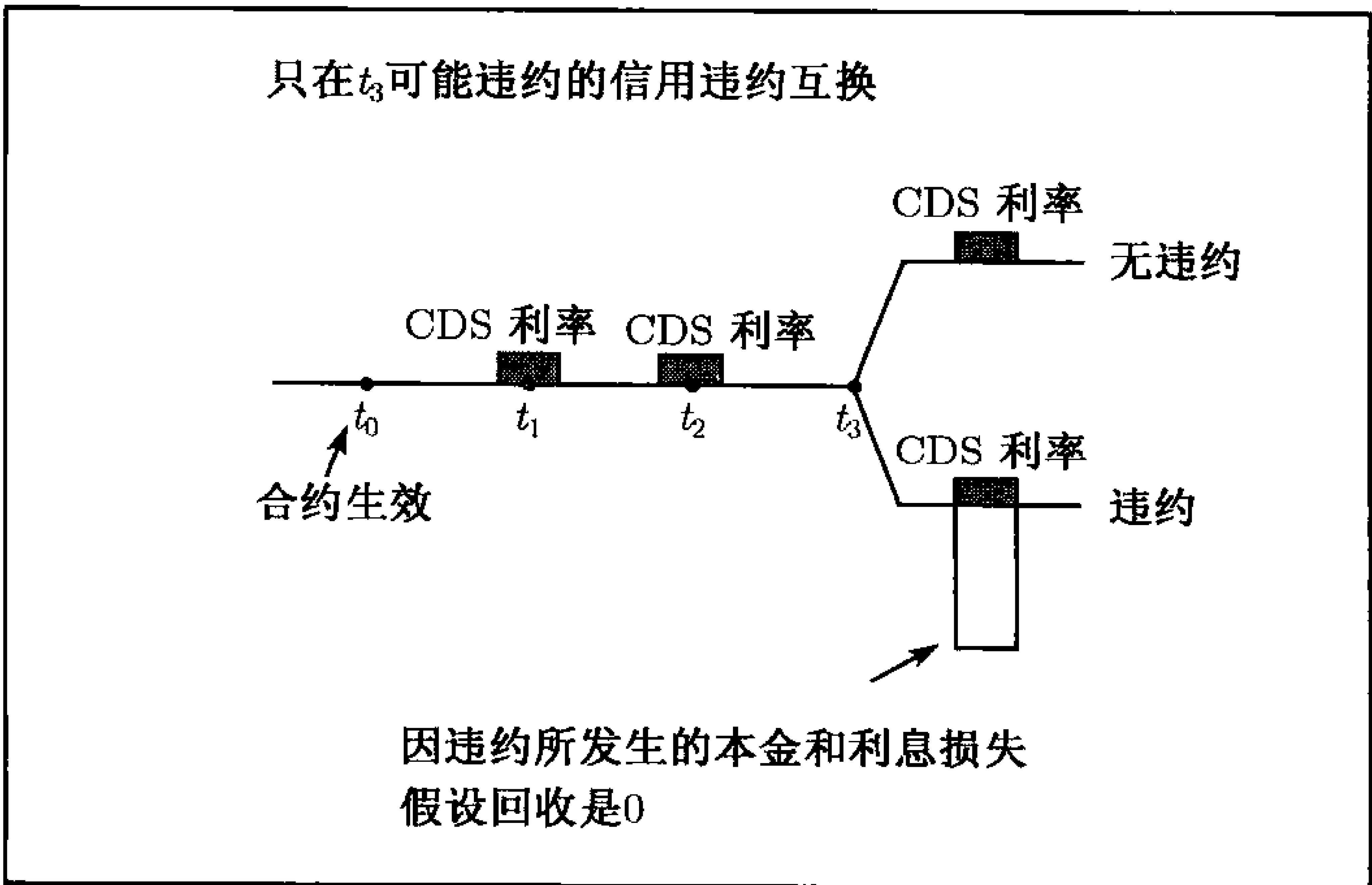



图 16-1

度来看的典型的违约互换. 作为某个特定的信用体 (这里记为 $i$) 的 CDS 买方支付一个固定利率 (称为 CDS 利率). CDS 在 $T$ 时到期, 其利差用 $d_0^i$ 表示, 即它是在 $t_0$ 时确定的. 如果没有违约发生, 则在每个时间点 $t_i$ 进行一次金额为 $d_0^i\delta N$ 的支付. 如果一直到 $T$ 时没有发生违约, 则合约到期终止且没有其他支付. 另一方面, 如果信用 $i$ 在 $[t_0, T]$ 区间内违约, 则 CDS 买方可从卖方处获得 $N$ 美元的补偿. 收取现金的同时, 受保护的买方还要实际交割面值为 $N$ 美元的债务工具. 这些工具都是可交割的工具, 并且在 $t_0$ 时在合约中明确规定了. 显然, 在这些可交割工具中有一种在违约时是最便宜的, 所有的人都想交割这种特殊债券.

本章后面将介绍金融工程师应了解的有关违约互换市场的其他特征. 现在来讨论这类产品的金融工程. 这点特别重要, 因为我们将会看到一个违约互换可以自然地被视为一个典型风险债券分解后的残留物. 实际上, 如果我们将一个风险债券分解, 其中一种非常关键的成分就是违约互换. 违约互换发挥的作用也就部分地解释了它的吸引力及其在信用产品中的主导地位.

我们通过一个具体例子来讨论违约互换的构造, 虽然这个例子只是一种特殊情形, 但却勾画出了信用风险工程方法中几乎所有的主要方面. 很多涉及合成债务抵押证券 (CDO)、信用票据 (CLN) 以及其他一些流行信用工具的实际操作都可以追溯到下面的讨论.

本节可以看成是现金流分析法的另一个例子. 我们将说明, 当考虑违约风险时, 静态复制方法会发生怎样的改变. 当然, 从本质上说, 所用到的方法仍然是相同的. 但只有在其他标准工具中加上 CDS, 才有可能合成出一个令人满意的工具.

### 16.3.1 构造 CDS

构造 CDS 所遵循的步骤概括如下: 首先选取一个含有违约风险的债券, 然后说明如何将这个债券的现金流分解为更简单且具有流动性的成分. 这个分解过程自然地就产生了一个信用违约互换.

我们的讨论将产生一个包含违约风险的新型*合约方程*. 然后利用这个合约方程来说明怎样创造、对冲和定价一个信用违约互换. 该合约方程还显示出对冲和定价过程中存在的一些内在困难. 本节的最后将讨论实际对冲和定价中存在的问题.

### 16.3.2 风险债券的分解

我们尽量使所举的例子简单些, 这样能够更清楚地说明问题的本质. 考虑一个在 $t_0$ 时购买且具有违约风险的 "风险" 债券, 这个债券不含有任何的内置期权, 连续 3 年每年支付的息票为 $c$, 开始时债券以面值出售.

做两点假设以简化问题, 它们不会改变问题的本质, 但能够极大地加深我们对信用工具的理解. 首先, 假设发生违约时, 债券的回收值为 0. 其次, 不失一般性, 假

设违约只能在 $t_3$ 时发生.

图 16-2 给出了债券所隐含的现金流. 该债券开始时以 100 的价格购入, 如果没有了违约, 债券要进行 3 次息票的支付, 加上本金 100 的偿还; 另一方面, 如果发生了违约 (只能在 $t_3$ 时), 债券则什么也不支付. 有关违约概率的选择由 $t_3$ 时的分岔表示. 在 $t_3$ 时有两个可能, 可依具体情况而定.

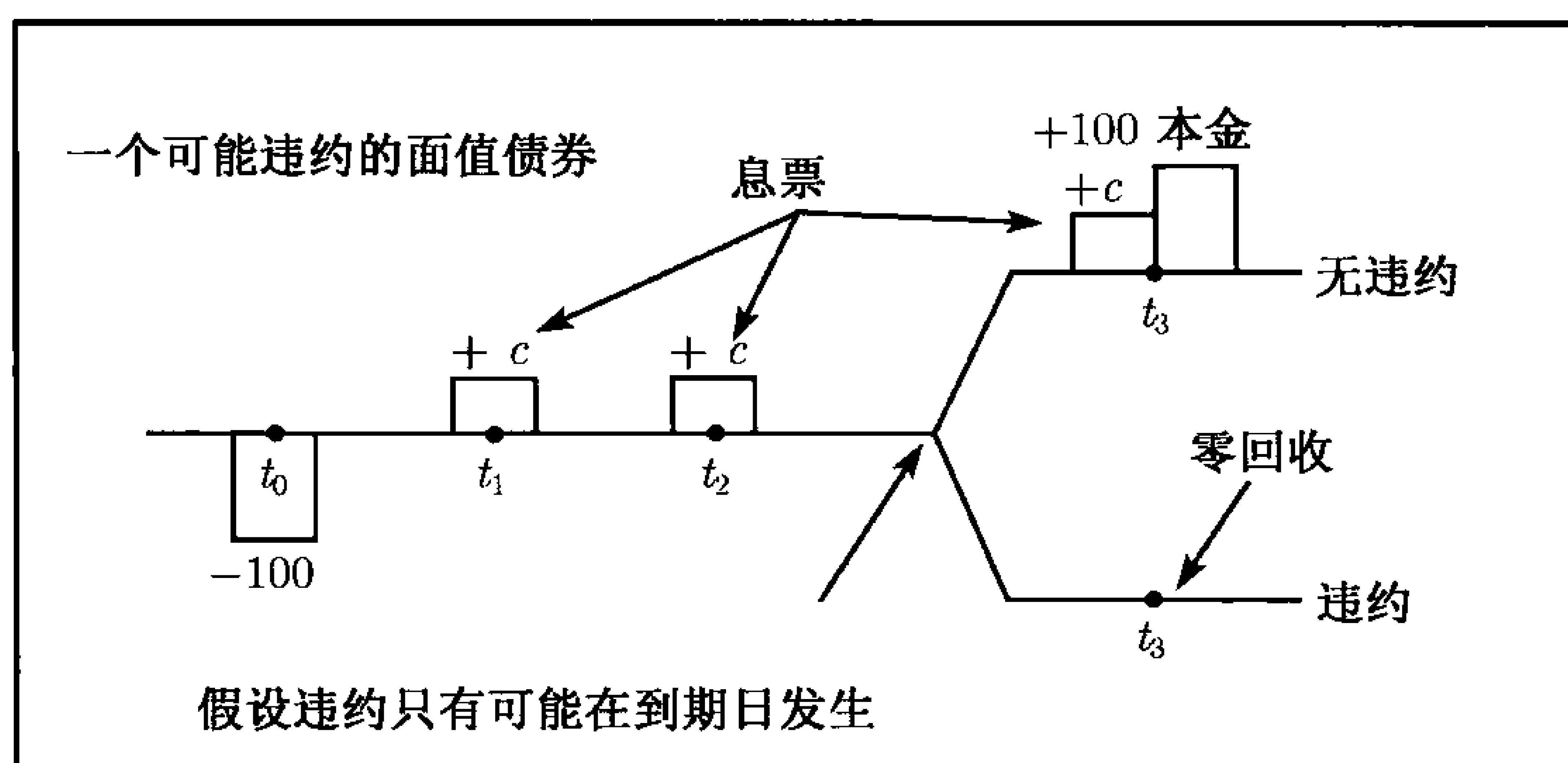



图 16-2

怎样将这些现金流转化成流动的金融工具呢? 我们将分步回答此问题.

首先, 需要引进一个有用的小技巧, 对可能违约的工具应用静态的分解方法. 记住我们的目标是利用一个单一的工具分离出标的信用风险. 在图 16-3 中, 为使问题简化, 在 $t_3$ 时同时加上和减去数量为 $c+100$ 的现金流. 注意, 这样的加减没有改变原始现金流, 但我们看到这将对分离出信用违约互换很有帮助.

现在来讨论这个可违约债券的分解. 图 16-2 中的债券具有 3 种不同类型的现金流.

(1) 在 $t_1, t_2$ 和 $t_3$ 时, 有 3 次息票的支付. 当然, 由假设, 第 3 次的息票有违约风险, 但是我们在 $t_3$ 时的现金流同时加上和减去了 $c+100$, 使得第 3 次息票支付是有保证的, 也就是没有了违约风险, 如图 16-3a 所示. 这就是说, 尽管最后一次息票有风险, 但我们仍然可以从债券的现金流中分离出无违约风险的 3 次息票支付, 于是在违约情况下存在负 $c$ 的现金流.

(2) 债券的第 2 种现金流如图 16-3c 所示, 初始时刻和最后时刻的本金支付为 100. 同样地, 在 $t_3$ 时同时加上和减去的 100, 在这一时刻也得到了一个无违约风险的收入 100. 将这两个现金流移到图 16-3c 中, 因此在图 16-3a 中还剩下违约发生时负 100 的支付.

(3) 最后, 图 16-3d 表明了所有剩余的现金流, 这些现金流包括了在 $t_3$ 时违约状态下的负现金流 $c+100$, 将此项拿出来放到图 16-3d 中.

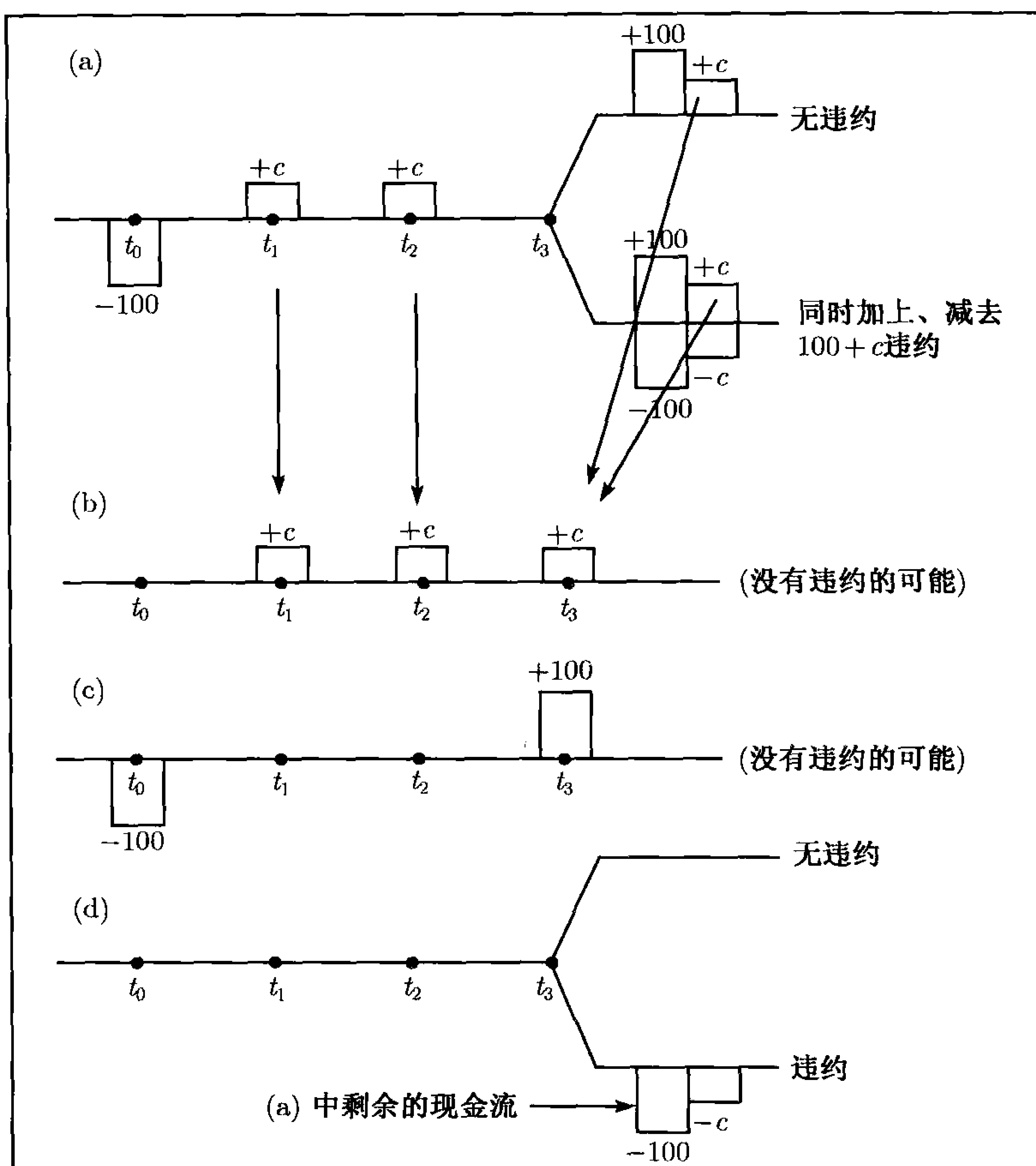



图 16-3

下一步就是要将图 16-3b, 图 16-3c 和图 16-3d 中的现金流转化成市场认可的、具有很好流动性的合约. 为了完成转化, 我们需要在下面的条件下, 在图 16-3b、图 16-3c 和图 16-3d 中加上和减去任意的现金流:

- 在加上一列现金流的同时, 必须于相应时刻减去同样的金额 (或者同样现值);
- 新现金流应该使我们所得到的工具具有流动性;
- 将修改的图 16-3b, 图 16-3c 和图 16-3d 中的现金流相加时, 应该得到如图 16-3a 中原始债券的现金流. 这样我们就能够恢复可违约债券的现金流.

将此过程表示在图 16-4 中. 将图 16-3b 中的现金流转化成市场所认可的工具, 最简单的方法是, 在 $t_1, t_2$ 和 $t_3$ 时刻分别加上以 Libor$L_{t_i}$ 为基础的浮动支付, 这些现金流看起来像一个固定收入的利率互换. 这是个很好的工具, 因为互换的流动性

非常强. 但是, 还需要做一个小的修改, 由于互换的利率是 $s_{t_0}$, 这个利率小于 $t_0$ 时面值发行的债券的息票, 因此我们有:

$$s_{t_0} \leqslant c. \tag{1}$$

两者之差记为 $d_{t_0}$,

$$d_{t_0} = c - s_{t_0}, \tag{2}$$

它是关于**互换利率的信用利差**. 这是一个评级为 $A$ 或者低于 $A$ 的信用主体由于违约风险所必须支付的利率超过互换率的部分. 注意, 我们现在将信用利差定义为超过相应的互换利率的部分, 而不是与国库券利率之差. 这实际上是市场操作中正确计算信用利差的方法, 很显然, 它可以从现金流的分解中得到.

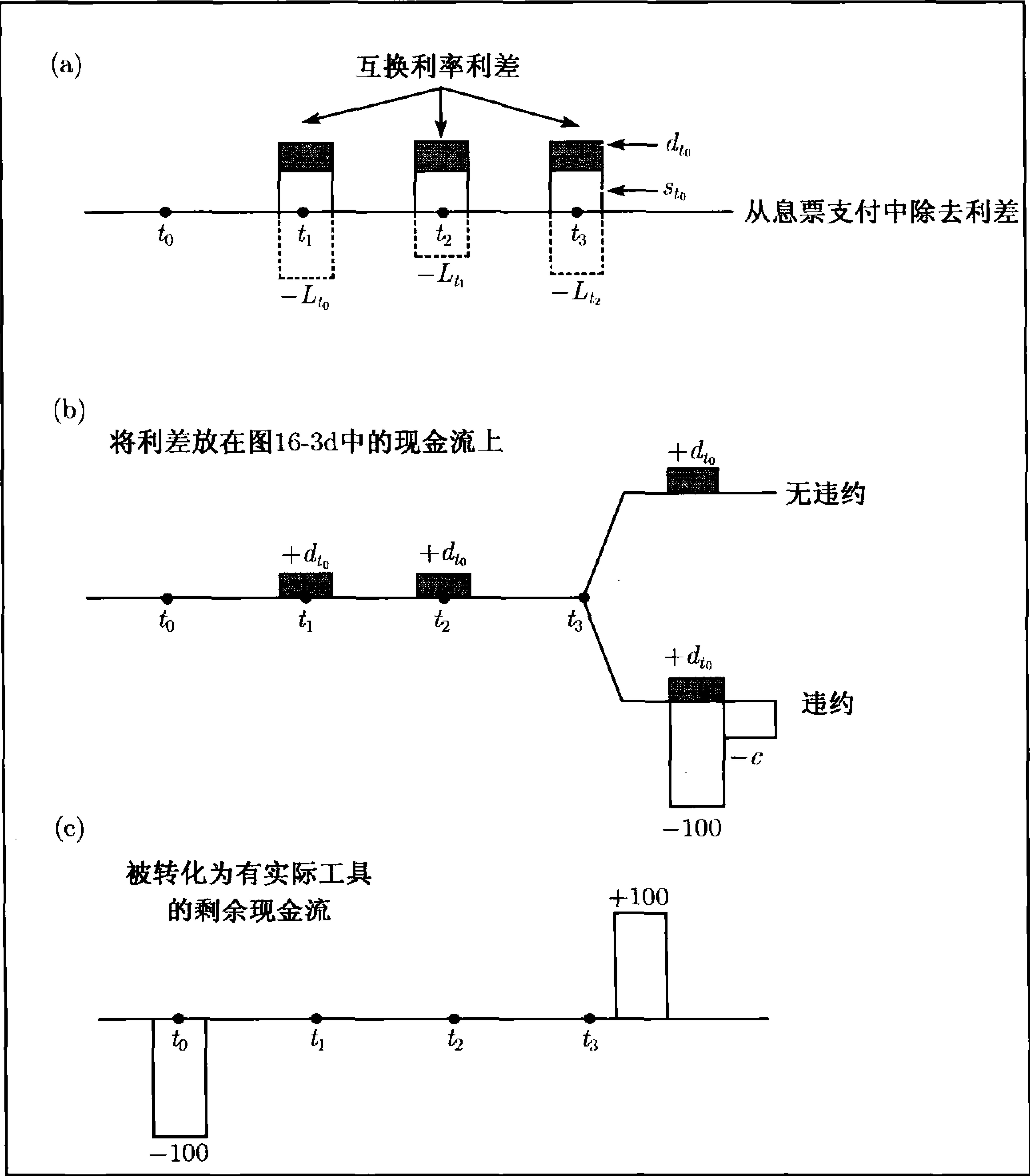



图　16-4

因此为了使图 16-4a 中的现金流等价于一个接受方互换, 我们需要像图 16-4a 那样从息票 $c$ 中减去 $d_{t_0}$, 这就使得固定的收入等于互换利率:

$$c - d_{t_0} = s_{t_0}. \tag{3}$$

所得到的现金流就成了一个真正的**利率互换**.

这种构造留下了一个很重要的问题没有回答: 在哪儿加上正的现金流 $L_{t_i}$ 和 $d_{t_0}$ 呢? 除非这些正的现金流被放在适当的位置, 否则, 它们就不会与我们在图 16-4a 中引进的现金流抵消掉, 这样所合成的就不能成为一个风险债券了.

很容易想到的 Libor 现金流的处理办法如图 16-5 所示, 加上的 Libor 现金流使我们得到了一个**无违约风险的货币市场存款**, 存款以浮动的 Libor 利率滚动. 注意这同样是一个流动性的工具.[1]

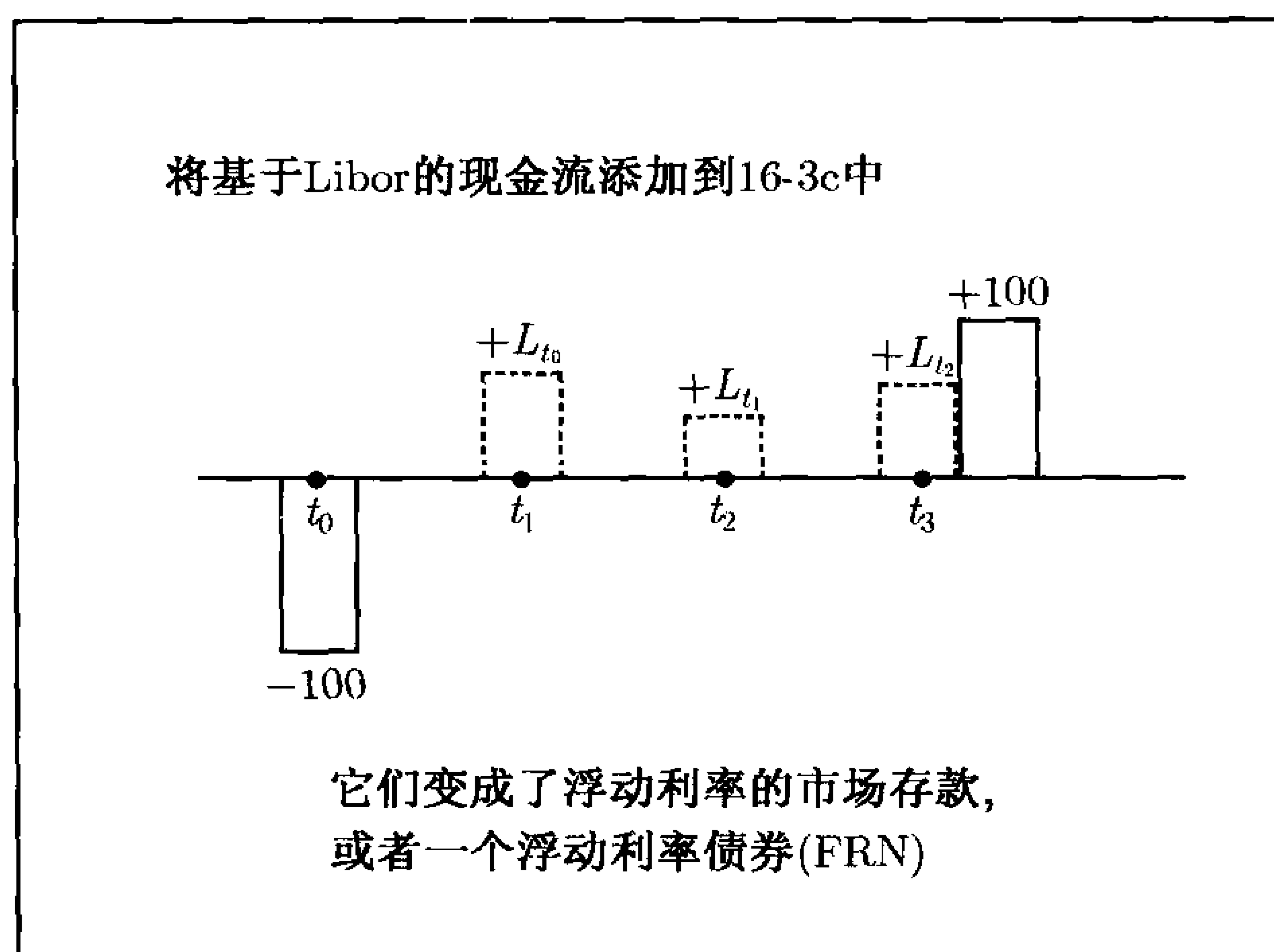



图 16-5

最后的调整怎样补偿从 $c$ 中减掉的信用利差 $d_{t_0}$ 呢? 我们将 $d_{t_0}$ 加入图 16-3d 中的现金流, 得到图 16-4b 所示的现金流. 这是非常关键的一步, 因为我们此时得到了一个**新工具**. 本质上, 这个工具在 $t_1, t_2$ 和 $t_3$ 时刻有 3 次 $d_{t_0}$ 美元的收入, 但是如果发生**违约**, 该工具将支付 $c + 100$[2].

为了确信我们的分解正确, 将图 16-4a, 图 16-4b 和图 16-5 纵向相加, 看是否能得到初始的现金流. 图 16-4a, 图 16-4b 和图 16-5 中现金流的垂直相加的确复制了这个可违约债券的现金流.

---

① 我们还将其称为浮动利率票据 (FRN).

② 由此知如果在时间 $t_3$ 发生了违约, 净支付变为

$$c + 100 - d_{t_0}. \tag{4}$$

我们在图 16-4b 中所得到的工具等价于出售债券的违约风险保险. 合约包括了违约前在每个 $t_i$ 时刻的保费收入 $d_{t_0}$. 发生违约时, 保护买方得到 $c+100-d_{t_0}$ 损失的补偿. 另一方面, 如果没有发生违约, 保护费用一直支付到合约到期, 此时不再有其他的支付. 我们将这样的工具叫做*信用违约互换* (CDS).

### 16.3.3 一个合成品

前面的讨论表明一个违约债券可以分解为: (1) 一个固定的收入利率互换; (2) 一个无违约风险的货币市场存款; (3) 一个信用违约互换组成的一个投资组. 这里, 债券、互换和 CDS 的到期日是一样的, 利用这些工具可以得到下面的合约方程:

[在信用基础上的违约债券] = [收入利率互换] + [无违约存款] + [在信用基础上的CDS] . (5)

通过对方程的各项进行一般的代数运算, 就得到方程中任何一个工具的合成产品, 下面给出此合约方程的两个应用.

### 16.3.4 合约方程的应用

第一个应用说明了怎样得到一个 CDS 头寸的对冲; 第二个应用将会讨论隐含定价及其在实际中所产生的困难.

当然, 前面介绍的合约方程还有很多用途. 例如, 利用一个 CDS, 我们可以为任何一个实际上不发行像辛迪加贷款或者公司债券的信用体, 构造出一个合成的辛迪加贷款或者公司债券. 我们将在本章后面讨论 CDS 在行业中应用后的一些事情.

1. 创造一个合成的 CDS

首先, 我们考虑怎样对冲一个 CDS. 假设做市商卖出一个 CDS, 那么它将如何对冲自己的这个 CDS 头寸呢?

为了得到一个 CDS 的对冲策略, 我们所需要做的就是对前面的合约方程进行运算, 对它重新整理得

[信用发起的违约债券] − [收入利率互换] − [无违约存款] = [在信用基础上的CDS] . (6)

记住负号表示对相关的工具建立反向头寸. 将一个信用违约互换的合成写为

[在信用基础上的CDS] = [信用风险债券] + [支出利率互换] + [无违约贷款] . (7)

卖出 CDS 的做市商需要建立一个与方程右边相反的头寸, 也就是说, 这个信用衍生品交易商要先卖空风险债券, 将得到的 100 存入一个无违约风险的存款账户, 并且签订一个固定收入互换. 这样这个头寸将与 CDS 头寸抵消掉, 这个做市商将赚取买卖价差.

2. *对冲和定价*

合约方程的第二个应用很简单, 至少在理论上不是很难. 产生合成 CDS 的这个合约方程, 同样可用于 CDS 的定价. 因此为了得到关于该信用的保护卖出费用, 我们需要计算具有相应流动性的违约债券*收益率*与*互换利率*之间的差.

### 16.3.5 实际中的复杂性

本章中得到的合约方程给出了 CDS 的一个自然对冲, 并提供了它的一种定价方法. 使用类似的合约方程, 也能为那些信用风险可忽略不计的基本工具提供有用的对冲和可行的定价方法. 但是对于 CDS, 这些合约方程本质上是*理论*的, 上面这种简单的方法有时可能会导致错误的 CDS 定价, 并有可能使得到的对冲方法也不成立. 有多种原因使得该信用体基准利差[①]与 CDS 利率之间可能会产生显著的偏差, 我们简单地分析一下这些原因.

(1) 上述例子中, CDS 的到期日为 3 年, 如果在 CDS 发行时, 没有 3 年期的债券怎么办? 这时定价就变得更加复杂了, 并且基准利差很有可能偏离 CDS 利率.

(2) 即使有相同期限的债券存在, 它们也可能不具有很强的流动性, 特别是当市场波动率很高时, 很自然地会看到 CDS 利率与基准利率之间的偏差.

(3) 公司债券和 CDS 的纳税政策不一样, 这会在 CDS 利率和相应的利差之间产生偏差.

(4) 正如前面提到的, 发生违约时, CDS 将会有实物的交割, 但是交割的债券来自一组可交割的债券, 这意味 CDS 包含了一个*交割期权*, 而在我们前面的合约方程中并没有包含这个期权.

在实际中, 还会产生另一个问题. 在前面合成产品的构造中, 使用了一个货币市场账户, 并且假设这个账户是无违约风险的. 一般而言, 这样的无风险货币市场账户几乎是不存在的, 接受存款的机构都有违约风险. 这就会导致理论上的构造和实际定价之间的差别. 如果这样, 那么来自货币市场的收益率就不再是无违约风险的 Libor 利率, 而是

$$L_{t_i} + \mu_{t_0}, \tag{8}$$

其中 $\mu_{t_0}$ 是接受存款机构的 CDS 利率.

---

① 超过互换.

这种构造中的附加信用风险原则上可以通过为存款机构买入一个新的 CDS 来消除. 根据定义, 这个 CDS 的成本为 $\mu_{t_0}$, 将这个 CDS 加入到初始的合约方程中去就可以解决此问题. 新的和约方程变为

| 信用违约债券 | = | 在信用基础上的CDS | + | 收入利率互换 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | 违约存款 | + | 在接受信用风险原则上通过存款机构买入CDS | . (9) |

它将给出该债券的"正确"合成. 考察这些实际生活中进行的修正, 很显然 CDS 的实际定价需要考虑几个困难. 这些困难在前面的简单构造中没有涉及. 然而通过这些分析, 我们已经捕捉到了本章中的关键所在, 也就是说, 信用衍生品的引进大大地方便了金融工具的合成, 这些工具几乎包括了所有的标准化工具.

### 实际对冲中的难点

考虑金融市场中一个有趣的现象. 设 $b_{t_0}$ 为一个可违约的附息债券收益率, 债券在时间 $t_0$ 以面值发行, $d_{t_0}$ 是到期日为 $T$、关于同样信用债券的 CDS 的利差. 最后设 $s_{t_0}$ 和 $r_{t_0}$ 分别为面值互换利率和国库券收益率, 则由前面的合约方程我们可以得到

$$d_{t_0} = b_{t_0} - s_{t_0}. \tag{10}$$

如果下面不等式成立:

$$d_{t_0} > b_{t_0} - s_{t_0}, \tag{11}$$

那么客户就不会购买发行人的信用保护, 而是简单地卖空债券并且得到一个接受方互换. 这样将使我们能以更小的费用得到相同的违约保护.

但是, 在 CDS 市场中观察到交易数据有时会具有如下的特点①:

$$d_{t_0} \neq b_{t_0} - s_{t_0}. \tag{12}$$

这意味着存在套利机会吗? 实际上, 这样的不等式可能由很多因素引起, 我们简短地将它们列出,

(1) 购买 CDS 保护很"容易", 但卖空债券的成本却较大. 我们首先要到回购市场寻找这样的债券, 回购还要盯市, 而使用 CDS 保护却没有这样的麻烦.

(2) 卖空债券是有风险的, 因为有可能会受到卖空挤压. 如果有过多的人卖空债券, 则恢复该头寸可能不得不付出很高的价格.

(3) 当我们突然需要保护时, 某些债券会很难找到.

① 新兴主权信用通常就是这种情形. 而对于公司信用, 这个"债券基差"有时是负的.

(4) 同样, 如前面所述, CDS 利率中包含了一个交割期权的权益金.

这些因素可能会引起理论上的对冲与卖给客户的 CDS 有所不同. 最后, 值得注意的是, 当发生违约的可能性变得非常大时, CDS 交易商可能会突然变动它们的价格, 并且停止交易.

## 16.4 总收益互换

总收益互换 (TRS) 同时对*违约风险、信用恶化风险以及市场风险进行交易*. 我们自然地想将它与 CDS 进行比较. 在 CDS 中, 购买保护的一方持有信用体发行的债券, 他在到期日之前定期地支付给保护卖方固定的费用, 这样就给可能的违约风险购买了一份保险, 类似于一个火灾保险. 如果在到期日前, 债券发行方违约, 则保护卖方对保护买方进行补偿后合约终止. 补偿的数额通常是向保护买方支付债券面值, 比如说 100, 然后从买方向卖方交割一个由相同信用体发行的可交割债券. 简单地说, CDS 就是一种仅交易违约风险的工具.①

一个总收益互换具有不同的结构. 考虑一个信用体发行的一种债券或任何一种风险证券, 此证券有两种支付: 第一, 它支付息票利息; 第二, 还有相关联的资本所得 (资产价格增值) 或者资本损失 (资产价格贬值), 这包括极端情况时的违约. 在一个 TRS 中, 保护卖方定期支付给保护买方资产价格的减少部分, 违约也包含在这类支付中. 一般而言, 资产价值发生损失的原因有很多, 这些原因并不都意味着发行者已经违约或将会违约. 但是, 保护卖方同样要向受保护的买方补偿这些损失.

另外, 在一个 TRS 中, 保护卖方的支付还不止这些, 还有 Libor 基础上的一个固定利差.

另一方面, *受保护的买方*要将标的资产的息票以及其上涨部分定期地支付给卖方. 通常, 资产价格上涨和息票的支付比资产价格下降更频繁, 这可由 Libor 加上一个利差进行补偿.

### 16.4.1 已融资头寸的等价性

TRS 的结构等价于下面的操作: 一个市场参与者通过基于 Libor 的贷款购买一份资产 $S_t$, 这笔贷款的利率是 $L_{t_i}$, 并且在每个 $t_i$ 时, 利息累积滚动, 市场参与者的评级是 A-, 必须支付在 $t_0$ 时确定的信用利差 $d_{t_0}$, $S_t$ 的定期息票支付等于 $c$, 市场参与者在 $t_{i+1}$ 时的净收入为

$$(\Delta S_{t_{i+1}} + c) - (L_{t_i} + d_{t_0})S_{t_0}\Delta, \tag{13}$$

① 对大多数公司信用, 典型期限是 5 年.

其中 $\Delta S_{t_{i+1}}$ 是资产价格在 $\Delta = [t_i, t_{i+1}]$ 期间的增值或贬值, $c$ 是在 $\Delta = [t_i, t_{i+1}]$ 期间的支付, 有关支付都是后付的.

一个 TRS 互换等价于利用 Libor 融资来购买一个风险资产. 此情形下, 市场参与者不用去进行这些交易, 而是简单地找一个适当的对手签订一个 TRS. 银行可能更青睐于这样的 TRS 互换, 而不愿将钱借给市场参与者. 下面的例子就说明了这一点.

**例**

根据交易商和信用衍生品策略家的说法, 总收益互换和信用违约互换一样, 应该是导致合成债务抵押债券 (CDO) 在 2001 年交易量创记录的原因.

与违约互换和信用票据比较, 作为一个信用衍生工具, 总收益互换常常被人们忽略. 但上周在纽约举行的 IMN CDO 会议上, 与会者大力宣传和推荐使用总收益互换作为转移标的资产信用风险和市场风险的工具.

总收益互换与信用违约互换类似, 不同的只是保护卖方将定期地向保护买方进行支付, 而且双方都寻求风险保护. 卖方除了支付标的价格减值部分以补偿买方的融资费用外, 通常还要给买方一个基于 Libor 的支付. 作为回报, 保护买方将标的资产的息票或利息以及资产市场价值的增值部分付给卖方.

与现金流套利 CDO 相比, 互换在执行所需时间方面更具优势, 这使得总收益互换近年来得到了广泛的使用.

一位银行负责人说: "在典型的 CDO 交易中, 资产通常通过一个信托进行融资. 不论是不是在资产负债表中, 总收益互换已经被某个机构用于得到这个资产, 并且它会将这个总收益互换传递给一群投资者." 他同时补充道: "一个总收益互换的执行可能会花上一两个月, 而一个现金流套利 CDO 的执行花费的时间可能会更长." (IFR, 2002 年 2 月)

总收益互换可以结合起来交换很多类型的风险现金流, 下面的讨论涉及到了发生于 1998 年亚洲金融危机时的著名案例.

### 16.4.2 另一个例子

图 16-6 表示了一个完全回报互换, 我们看到这个衍生物包括了两种非常不同的现金流的交换. 首先, 交换的是带有信用利差的现金流.

**例**

一个客户将发放给某个印度尼西亚公司的一笔贷款所获的 Libor+280bp 回报与收自一家韩国银行的 Libor+75 回报进行互换. 互换的现金流每 6 个月支付一次. 当然, 在每个交割日实际支付的只是净差值.

在这个 TRS 中, 交换的第二个现金流是这年内标的资产所产生的资本利得或损失. 特别地, 在上面例子中, 假如印度尼西亚公司破产了, 该家韩国银行将要补偿

跨国银行的损失. 为了交换更高的年预期回报, 这个韩国银行就要向跨国银行出售违约保护. 如图 16-7 所示.

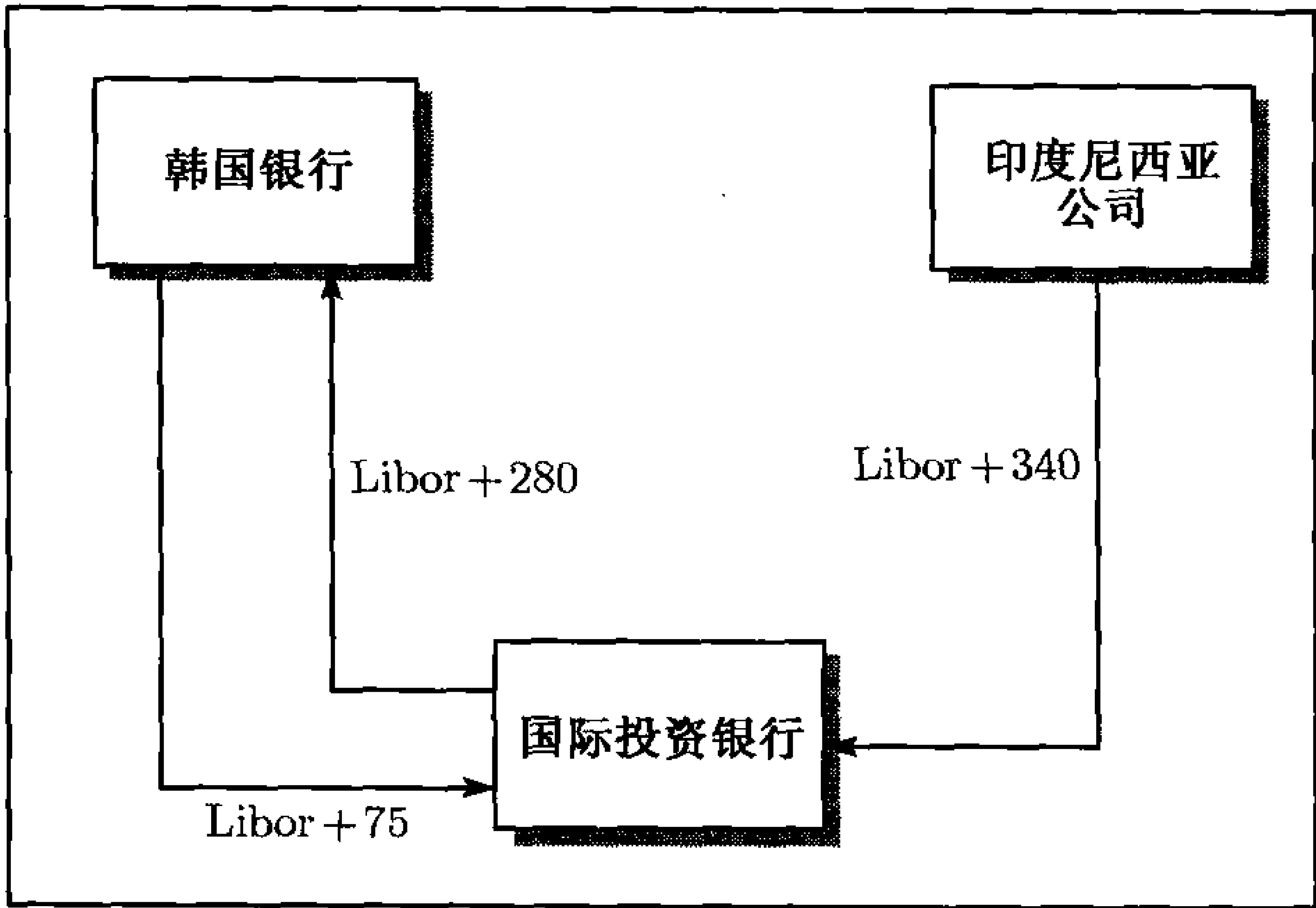



图 16-6

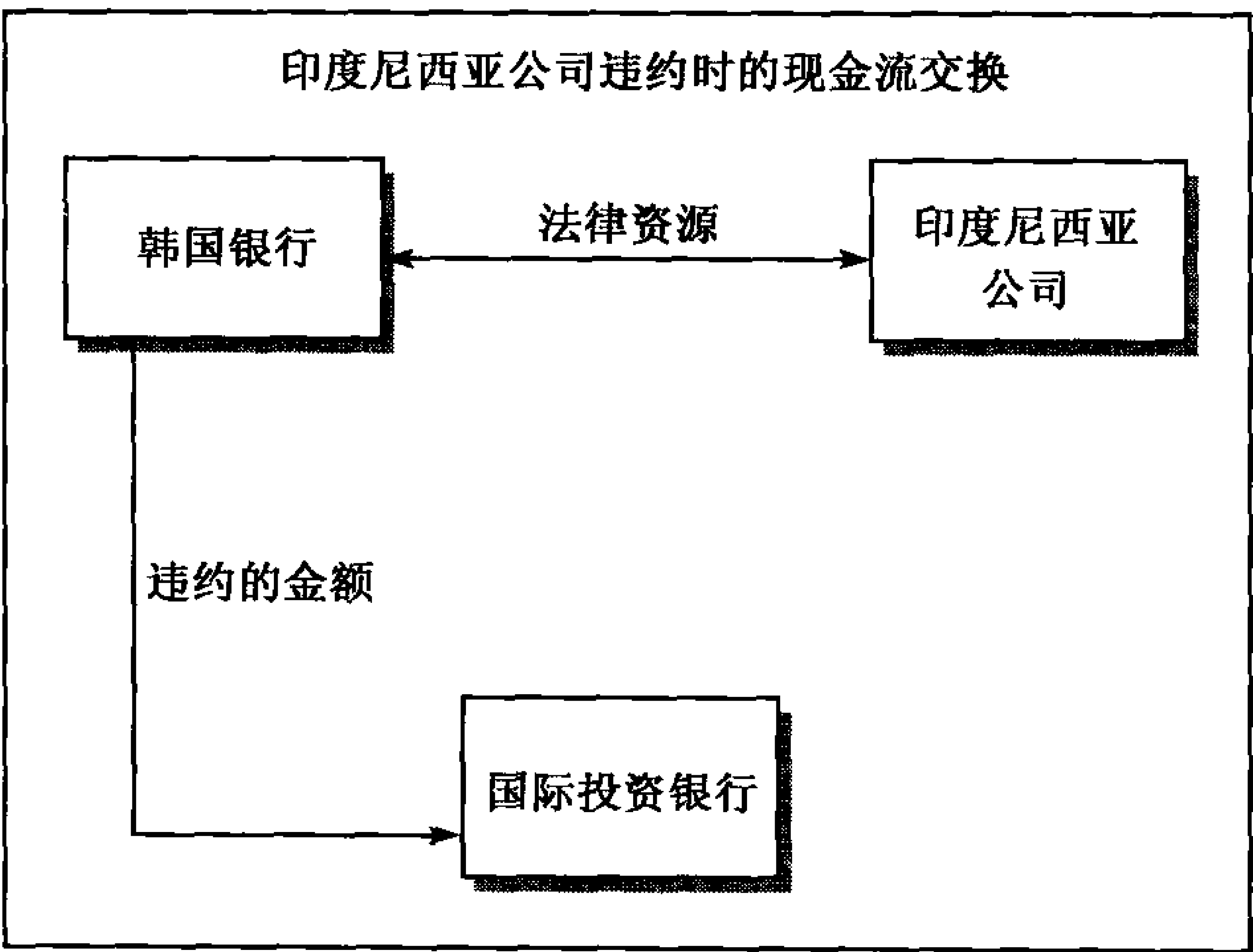



图 16-7

## 16.5 信用衍生品的用途

信用衍生品的用途很多, 本节用金融市场的例子来说明它们在某些方面的应用.

(1) 信用衍生品可以用来构造公司和主权债务证券的合成品.

(2) 信用衍生品在管理资产负债表中的信用风险管理方面很有用, 银行的信用投资组合可以通过买卖信用违约互换进行有效地管理.
(3) 它们可以改变多头头寸的融资成本.
(4) 可以提高收益率.
(5) 在税务安排方面有着重要作用.
(6) 对监管和资本充足性管理起本质作用.
(7) 为想要建立各种信用敞口的投资者提供杠杆.

说明信用衍生品的这些基础性贡献, 最好的办法是讨论一些重要的例子.

### 16.5.1 CDS 的用途

我们先来看看如何使用 CDS, 下面的例子描述了该市场的发展历程.

**例**

一个市场参与者这样叙述道: “在过去的几个月里, 特别是自从此次信用周期见底以来, 信用违约互换市场真正获得了它应得的地位. 现金交易商和违约交易商坐到了一起. 将现金和衍生品结合起来看, 我们可以更容易洞察这个市场的整体情况.”

根据英国银行协会 (BBA) 在 2000 年 6 月所发表的信用衍生品调查, BBA 估计到 2002 年信用衍生品市场的全球总额将达到 15 810 亿美元. 这意味着 5 年时间内增长了 9 倍. 在这份调查中, 它估计信用违约互换将占到市场总额的 37%, 而伦敦占了总数的 47%. 这些百分比与银行家的最乐观估计相符: 一个分析家指出, 如果这些数字具有代表性的话, 那么这说明了欧洲市场的大小与美国市场相近. (IFR, 2002 年 4 月, 第 1430 期)

下面是 CDS 市场的一个具体例子. 阿根廷、世界通信和安然公司都对 CDS 市场很有兴趣, 这个例子与阿根廷有关, 其中的 CDS 利率达到了 40%左右.

**例**

在上周, 一年期阿根廷信用违约互换的中间价格达到了 4 000 个基点, 尽管人们认为这个主权国家的最高交易是在本周早些时候以 2 350 个基点完成的.

衍生品市场的做市商对违约互换的报价显得非常谨慎, 买卖价差非常宽 (两年期的阿根廷中间价上升到 3 900 个基点左右), 但大多数合同是用来平衡现金市场对冲的, 这很不容易做到.

出售保护的交易商在咨询了他们的律师后制定了一些对策, 以防阿根廷违约或重组其债务. 在过去的几年里, 大概有超过 10 亿美元的阿根廷信用违约保护进行了交易, 如果发生明显的违约或债务重组, 有可能会导致最大的违约互换支付. 互换赔偿条款的履行取决于阿根廷当局如何处理债务重组.

当触发支付的时间很短时, 违约互换的定价就成为了一门艺术, 而不是一门科学了. 上周, 交易商们工作的基础是星期六阿根廷 FRB 的收盘价 63.5(这相当于超过了 Libor 3 060 个基点), 然后对卖出违约互换的理论风险加上 30%~40%相对于债券交易价值的基差. 这一年中大多数时间里, 交易商们在涉及拉美国家的交易中一直将违约相对资产互换的基差设定为总利差的 10%. (IFR, 2001 年 7 月)

### 16.5.2 结构化产品

最近信用市场的发展趋向是结构化产品, 下面的例子涉及了这个问题.

**例**

欧洲信用市场正实现从普通到高度结构化的飞跃, 显然这一飞跃跳过了所有中间步骤. 机构投资者们不愿意购买高 beta 的信用, 比如说, 高收益公司债券、新兴主权市场债券以及很少量杠杆化的贷款等. 他们似乎更喜欢对高度结构化的资产建立头寸, 而这些资产是专门设计来满足他们的投资组合需求的.

这些专门定制的资产的重要性怎么强调也不过分. 很多欧洲投资者, 不论其所属国家, 都要受到与货币单位 (本国货币产)、互换敞口、评级要求、上市等方面条款的限制.

例如, 一个受限的基金经理授权向欧洲发行人购买欧元上市债券时就不能利用廉价扬基票据的好处. 但他可以购买在扬基市场发行的从属债务支持的欧元再打包债券, 并且与该债券卖方做一个美元/欧元互换. 发行这些债券的特殊目的机构 (SPV) 可以在 EU 注册, 而这些债券可以在卢森堡上市, 从而让这些证券满足投资者的风险管理要求和法律准则.

一位投资者可能想利用现金债券与违约互换之间的基差, 但是他不能缔结衍生品交易合同. 这一点再加上一到两个穆迪和标准普尔评级的需要, 会鼓励投资者考虑使用中期票据. 但是, 如果 MTN 的发行方要价高, 或没有将他们的名称与投资者感兴趣的全部信用联系在一起的话, 也可以考虑使用再次打包的信用票据.

发行方 (SPV) 购买廉价的二级市场票据, 然后与承销商 (比如说德意志银行) 缔结一个信用互换, 这个 SPV 票据就具备了适当的评级, 并且与一组信用体相联系. (IFR, 1999 年 7 月, 第 1290 期)

这段材料也说明了在信用产品定价中, 法律上和监管中问题的重要性. 由于对持有信用的各种严格限制, 机构投资者利用衍生品和互换得到了相同的信用敞口, 这会导致 CDS 利率和互换的等价基准利差之间的差别.

### 16.5.3 另一个用途

在讨论 CDS 和其他信用衍生品时, 我们将它们的标的看成是发行在外的债券. 然而除了合约应明确规定违约的含义外, 这些工具是独立的衍生品. 再有, 如果发

生违约, 保护的赔偿将用来交换价值等于回收值的标的债券, 出售保护方将进行允诺的支付, 并接收已经违约的债券.

正如这个简单构造所示, 一个 CDS 可以以任何定期性利息支付契约为标的. 另外一个例子就是辛迪加贷款, 它们与债券的 CDS 具有不同的法律特征, 但是基本的思想是一样的. 下面的这段材料阐述了 CDS 型信用工具的一般特性.

**例**

*信用衍生品似乎已成为初级辛迪加贷款市场不可或缺的工具. 银行家们说, 信用衍生品现在既被当作一种决定授权的工具, 也可在一般辛迪加联合期间用来卖出贷款. 理性的投资者开始通过卖出信用互换而不是进行贷款, 这样可以绕过一般辛迪加进行套利.*

*希望卸掉赢利能力差的资产的那些辛迪加安排者所获的好处非常大. 次级贷款出售的缺点是需要债务人的同意, 而 CLO 计划很耗费时间. 利用信用违约互换, 债券人不但可以继续保持与原来客户的联系, 而且还增加了一些附加业务, 并减少了资本金要求.*

*出售关于贷款的信用违约互换的确给贷款市场带来了特别的问题. 次级贷款交易需要债务人的允许, 但是信用衍生物的交易却可以不需要借款人知道. 当公司违约时, 这会显得很棘手, 毕竟信用持有者必须承认这项交易, 这是进行交易的首要前提. 同样, 贷款本身包含了提前偿还风险, 信用协议载明了有关条款的变化.*

*公司的财务人员一般不愿意转移贷款, 这实际上对欧洲未公开的信用违约市场提供了方便. (IFR, 1999 年 7 月, 第 1290 期)*

这段材料表明了 CDS 工具可以用来重新安排银行的信用资产组合. 由于贷款通常是不能转移的, 而且因为银行想要保持与他们的客户之间的联系, 所以消除信用敞口最好的办法就是买一个 CDS. 然而, 正如这个例子所表明的那样, 一般而言, 当发生违约时, 银行的贷款并不是一个可以交割的证券. 因此, 用 CDS 对冲信用风险的银行可能会面临相当大的基差风险.

### 16.5.4 总收益互换的用途

我们现在考虑金融市场中的一个例子, 来看看市场参与者是怎样使用 TRS 工具的.

**例**

*那些试图建立信用资产组合的基金经理目前正在仔细地考虑基于欧洲公司债券指数的总收益互换. 使他们产生这种兴趣的原因是对欧洲货币联盟 (European Monetary Union)、预期利率平行移动和货币资产组合信用优化的担忧.*

*债券指数的总收益互换是一种用债券指数回报交换 Libor 相关支付的工具. 这类互换给持有者同时带来利率风险和信用风险的敞口, 投资者可以通过持有一个*

政府债券组合的空头头寸或一个政府债券总收益互换的空头头寸来消除利率风险,这样就只剩下了纯粹的信用风险.

指数总回报交易对银行非常有吸引力,这是因为它们可以利用这些交易来有效地对冲其债券交易. 有些银行利用这些互换对冲浮动利率债券的敞口,这种应用使得浮动利率债券的报价对资产经理人来说非常有竞争力. 而对其他信用衍生品专家而言,总收益互换是欧洲基金经理用来建立新型信用风险组合的理想工具. 它们可以向投资者提供 500 到 1 000 个信用体的敞口,从而轻易地构造出一个分散化的资产组合. 专家们说,通过挑选单个证券建立起来的资产组合在其变得很大以及充分分散化前,会承受很高的相关风险.

引起人们对总收益互换兴趣的另一个因素是缺乏高收益现金产品. 1997 年高收益债券的发行量大约是 10 亿美元,而 1998 年的预计发行量也仅在 50 亿美元到 100 亿美元之间,比起投资级债券市场,这是非常小的一部分. 高收益债券专家说,市场的流动性非常差,询价利差非常宽. 一个伦敦的市场专家说:“在欧洲,你根本买不到中间等级的债券,所以对追求高收益率的基金,衍生品是唯一的选择.”

总收益互换还可以视为一种融资的工具. 一个机构可能会通过借入资金为一个资产的多头头寸融资,得到一笔贷款,然后用这些贷款购买这种资产. 但是 TRS 为这个机构提供了一种类似的可供选择的机会. (IFR, 1998 年 4 月)

作为 TRS 的运用,考虑下面的套利. 一个银行的融资成本是 6%,这个银行想要买入一个回报为 5%的资产,如果该资产以市场利率融资,那么最后的回报将是负的.

此银行可以用一个 TRS 来得到 5%的回报,这时的融资成本将是互换对手的融资成本. 该银行支付 Libor 加上一个利差,这可能远远小于前面的 100 个基点差. 根据这个例子,TRS 可以用于融资费用的套利.

## 16.6 资产负债表和信用衍生品

资产负债表中的信用风险组合需要持续地进行管理,前面例子讨论的对冲贷款信用风险是其中一个方面. 但是,信用风险组合的管理涉及到多头监管的问题,下面的例子在概述这方面困难的同时,说明了这些越来越普通的结构化信用产品的用途.

**例**

据信用衍生品市场人士说,JP 摩根已经填平了经济对冲与有效资本管理之间的鸿沟. 据传这家美国银行将证券化和信用衍生品方法结合起来,打破了由 1998 年巴塞尔资本协议在对冲和资本监管要求之间建立的防火墙.

这个新的投资组合管理结构是第一个有效管理资本和经济风险的结构. 一个发行抵押贷款证券 (CLO) 的银行,通常会保留处于这项交易的资本结构底部的第

一损失权益档, CLO 的发行动机就是试图在持有权益所需监管资本的成本和持有标的贷款资产的成本之间进行套利.

信用衍生品虽然是一种很有效的对冲工具, 但是在减少监管资本方面的作用却不大. 巴塞尔协定没有承认信用对冲在投资组合中的效用. 信用对冲减少总风险资本的成本仅仅在下面情况下才有可能: 使用信用衍生品合成的卖空头寸抵消了银行资产负债表中的多头现金头寸.

这种对冲必须具有相同的到期日, 并且参考资产也要求是一样的. 因此对于一个 A− 级公司的 6 年期贷款的敞口, 如果用一个 3 年期信用违约看跌期权来对冲, 尽管转移了信用风险, 但是在风险权重方面并没有任何的减少.

在 Bistro 交易中, 一个属于 JP 摩根的 SPV 与 JP 摩根签订了一个 97 220 亿美元的信用违约互换. 这个互换的参考资产是一个由商业贷款、公司债券、市政债券以及一个衍生合约的对手信用敞口所构成的资产组合, 这里的信用敞口代表了一个商业循环中 JP 摩根的信用敞口. 这个 SPV 然后将 700 百万美元债券卖给广大的投资者, 债券的表现以信用违约互换作为参考. 通过 Bistro, JP 摩根成功地将真正的风险转移了——银行账目上证券信用质量的降低将与它对债券持有人债务的减少相匹配. (IFR, 1998 年 5 月)

## 16.7 结　　论

本章对一类重要的信用衍生品作了简要介绍. 我们看到, 信用违约互换在完善金融工程方法中扮演了关键性的角色. 同时, 我们还讨论了作为融资工具的总收入互换的作用.

## 参考文献

一些最近出版的书籍专门讨论了这类新产品. 要了解它们的理论背景和一些实际应用, 可参考 Duffie 和 Singleton(2003). Bielecki 和 Rutkowski(2001) 也是一本很优秀的著作, 但涉及到很多数学知识. 对于一些市场术语和产品的介绍, 读者可参考 Tavakoli(2001) 或 Das(2000). 本章的讨论没有涉及定价, 有关定价方面的经典著作是 Merton(1974). Giesecke(2002) 也是一本很好的有关定价方面的文献. 读者同样还应该参考 Schonbucher(2003).

## 习　　题

1. 这道题目涉及信用组合在险价值 (value at risk) 的计算. 利用公司财务报表数据回答下面的问题.

(a) 怎样计算违约的概率?

(b) 怎样得到一个信用转移矩阵?

(c) 怎样获得一个银行资产组合中的信用体的联合转移概率?

2. 假设给定两种风险债券.

债券 A

- 面值: 100
- 币种: 美元
- 息票: 10
- 到期日: 4 年
- 3 年后可赎回
- 信用等级: AA-

债券 B

- 面值: 100
- 币种: 德国马克
- 息票: Libor+78 个基点
- 到期日: 5 年
- 信用等级: AA

通过获得某个适当的信用合约, 要求将债券 A 转变为债券 B. 利用现金流图精确地表示这种转化.

(a) 表示出怎样利用一个货币互换转变为正确的货币.

(b) 表示出怎样利用一个利率互换转变为所需要的利率.

(c) 这里是否要使用互换期权合约? 利用远期上限和下限是否可以达到同样的效果?

(d) 最后, 利用信用衍生品, 通过两种方法转化为想要的信用等级.

3. 下面的阅读材料涉及抵押债务证券 (collateralized debt obligations, CDO)

*惠誉评级在上周发布的一份报告中说, 尽管 CDO 市场出现了大量的降级, 但银行将不会关注利率互换对套利现金流 CDO 的影响.*

*该报告说, 那些不起作用的利率对冲策略沉重打击了 1997 到 1999 年间所完成的高收益债券 CDO 的市场表现.*

*该报告发现, 这些事件的结合引起某些 CDO 被明显地过度对冲, 同时使得关于它们的互换头寸价格变为了价外. 在该报告中, 惠誉使用了 18 个最近经历过降级的现金流 CDO 作为随机样本.*

*有半数的 CDO 从利率下降中得到了好处, 而另一半则不然. 所有 9 个过度对冲的 CDO 都是 1999 年之前结束的高收益债券 CDO.*

*该报告还说, 由于事后可以获益, 一个平衡有担保或客户化的互换可能会减少过度对冲 CDO 的风险. 普通互换 1997 到 1999 年间在经济性方面曾经具有优势, 但长远来看将很费钱, 因为互换的本金平衡在其到期日进行而且不随时间改变. CDO 往往使用一个普通互换而不用客户化的互换, 因为前者比较便宜. (IFR, 1433 期, 2002 年 5 月)*

(a) 在图上表示出一个简单 CDO 产生的现金流. 假定卖出该 CDO.

(b) 你的风险是什么? 将如何对冲它们?

(c) 表示出该 CDO 与使用一个普通互换进行对冲相结合的现金流.

(d) 随着时间的推移, 违约率增加而利率下降, 这对该 CDO 和对冲有什么影响?

(e) 该材料中所说的购买客户化互换指的是什么?

# 案例分析

## 信用票据

此案例分析的对象是信用违约互换、合成的公司债券以及一种更有意思的工具 —— 信用票据.

案例分析的重点是两个问题.

(a) 这些工具的风险和现金流以及发行这些工具的原因.

(b) 从最近信用票据的发行活动中创造出套利机会.

读者在回答下面的问题时, 应该将注意力集中于这些方面.

## 问题

1. 什么是一个信用票据 (CLN)? 为什么投资者会买一个信用票据而不是诸如公司债券之类的投资产品? 分析这两种工具生成的现金流和风险, 并说明在什么意义上, CLN 更可取些.

2. 假设你发行了一个 CLN, 那么你怎样对冲你的头寸呢? 请给出两种对冲的方法. 顺便问一下, 你为什么需要对冲? 请具体回答.

3. 作为前面问题的延续, 为什么投资者是否卖出他们的公司债券在此情形下很重要?

4. 现在我们讨论套利的问题. 在这段材料中提到的套利论断的基础是什么? 请详细地解释, 并将你的解释用现金流图表示出来.

5. 某些公司票据的回购利率是 0% 意味着什么? 为什么利率会是 0?

6. 最后, 为什么这样就为公司财务人员创造了一个套利机会?

## 阅读材料

由于大量抵消合成信用连接票据与二级市场中债券的短缺同时出现, 再加上人们对全球信用前景预期的改变, 使得关于一些重要公司的信用互换的报价发生了大崩盘. 匆忙地对冲衍生品的空头头寸 (1) 为那些碰巧想清仓的交易商以及他们的客户提供了巨大的套利机会.

上个月中, 有至少相当于 50 亿欧元, 甚至有可能多达 150 亿欧元的信用连接票据发行, 卖空信用违约互换头寸的对冲使得在二级市场中标的债务的资产互换价值与信用违约互换之间的负基差进一步扩大.

能够获得公司债券的交易商可以以低于债务资产互换价值多达 20 个基点的价格购买违约互换, 并且能够为他们的客户创造出合成的打包产品, 这里唯一的风险是来自互换的对手. 那些正打算清仓的信用衍生品交易商已经通过所有权交易以及将这些打包产品的方式出售给他们的保险公司客户中获得了巨额的利润.

德意志银行、美林、贝尔斯登和花旗集团是最近几周中最积极的违约互换的出售者, 他们询价利差的交错已经使得相对于债券的负违约互换基点差越来越宽了.

一个由德意志银行发行的 22.5 亿的信用票据是推动这项运动的典型交易. 这个交易提供了 150 个单独的公司信用的敞口, 其中 51%来自美国, 剩余的 49%来自欧洲 (2). 因为 DB 将这项交易进行了评级, 它的竞争对手都撤出了对相关公司的违约互换的报价 (3).

与此同时, 其他银行则出售相类似的没有评级过的信用票据, 导致了在对冲互换头寸上的争夺. 由于二级市场中债券的短缺以及某些公司发行所能得到的 0%回购利率 (4), 交易商们被迫在市场上以任何能够得到的报价交割, 进一步使得很多投资级别的 5 年期违约互换的负基点差从 8bp − 16bp 上升到 12bp − 20bp.

很多违约互换的绝对基差还是很低的. 例如, 关于 A- 级别的法国制药公司 Aventis 的违约互换在星期五交易日的收盘价报价为 16bp/20bp. 其他公司的违约互换同样处于极端微利的水平. 劳斯莱斯的 5 年期的报价甚至低达 27bp, 大众为 26bp, 宝马的报价至少低于 26bp 而联合利华的报价为 21bp.

竞相出去.

这项活动并不局限于欧洲的信用产品. 违约互换的对冲导致了一些美国公司的负基差打包产品的出售, 这些美国公司包括了西尔斯, 美国银行, 以及菲利浦–莫里斯. 其中美国银行的 5 年期交易价低于 40bp, 今年早期的美国银行信用品质最低的时候, 这个价格甚至低于了它的交易点的一半.

一般市场中对于信用品质下滑的低迷时期已经过去的看法放大了违约互换的效果. 投资者很乐意持有公司债券, 这使得交易商们拼命地购买票据来对冲他们的头寸 (5).

其中一个有名的交易商在描述最近几周的交易时, 说到 "在同一时刻, 人们都竞相出去". 他预计互换和债券之间过宽的负基差将在一段时间内是交易的特色. 交易商们担心, 那些出售违约互换最积极的银行将会这么做, 因为他们正在准备过多的合成信用票据. 只要他们能够在票据和对冲敞口的水平之间保持一定的利润, 他们就会不停地交易互换.

违约互换对冲的需要, 债券的短缺以及正在改善的信用等级的预期之间的冲撞对公司财务人员是有利的. 世界通信公司在上周成功地从一个美国公司那里出售了一笔最大的交易. 如此大的一笔交易通常会促使相关公司违约互换的报价大幅上涨, 但世界通信公司却发现它的 5 年期报价从两周前的 150bp 下降到了上周的 140bp.

到目前为止, 违约互换报价的下降以及基于资产的互换水平相对与债券的拉宽, 都只限制于美国和欧洲. 如果人们对亚洲公司信用等级的预期提高了, 这里可能也将出现票据的发行和利差运动. 但是, 某些交易商正努力试图对冲假设为流动性的美国和欧洲的债券–互换市场中的头寸, 他们可能并不愿意在亚洲实施同样的做法.

由于可能有更多的关于欧洲和美国公司信用票据的发行以及互换–债券之间过宽的负基差的持续, 那些被允许所有权交易的交易商以及他们的保险公司客户会获得更多的套利利润. 然而, 那些被迫要抵消由他们的结构票据部门发行的票据头寸的交易员们未来数周将面临着令人烦心的对冲交易. (IFR, 2001 年 5 月 12 日)

# 第 17 章　权益工具的工程学：定价与复制

## 17.1　引　　言

固定收益工具的支付现金流一般是已知的固定值，它们也有固定的到期日. 若不考虑所用工具的信用质量，固定收益资产的现金流是相对简单的，它们只依赖于少数几个已知的风险因子. 可以使用一些较好且较精确的方法来计算与固定收益工具相关的期限结构. 也存在一些流动性好且效率较高的固定收益衍生品市场，例如互换、远期利率合约和期货等市场，它们使得固定收益证券的复制和定价问题得以简化.

对股票的分析相对来说要简单得多. 此时的标的资产通常是股票或股票指数，它们没有固定的到期日，且依赖于一些不透明的特殊风险，从而导致其现金流变得复杂. 未来现金流的时间和大小可能都是未知的. 有关这些资产的增长、投资和管理决策等使得权益工具的关系以及定价等问题进一步复杂化. 最后，权益工具几乎没有流动性较好并可用于复制的相关衍生品市场.

然而，权益的定价、复制和风险管理的一般原理应该都相同. 原则上对固定收益工具可以做的事情对权益证券也应该行得通. 当然，这些工具的近似和模型的建立可能变得更加困难，现有方法的成功率可能会降低.[①]

本章将前面的方法推广到权益及其相关产品的应用上，然后讨论作为权益工具代表的某些产品的工程学应用.

我们的目的是说明在固定收益工具中使用的方法如何被应用到权益类产品中. 为此，我们将分析这两类产品的主要差别和某些相似之处. 对于权益产品有两个额外的困难. 首先，权益分析可能需要建立模型来估计未来的收益，这是因为股票的隐含现金流从来不能准确地为人们所知且其很难预测.[②] 金融工程学方法使用资产定价基本定理，用无风险收益代替真实的 “期望收益”，从而避开了这个问题. 但是，事情并不是总能这样. 对于一些实践来说，股票隐含的未来现金流需要运用真实世界的概率来估计.

本章还引入了有关资产担保证券 (ABS) 和证券化在金融工程中的应用. 初看起来，证券化和混合资产的创造是两种目的不同，但过程相似的手段. 从发行者的

① 当然，运用期权或者那些直接以股票作为标的资产的其他衍生品来进行复制是可能的，但是这与，例如将一个附息债券分成折现债券成分，是非常不同的.

② 例如，公司的利润值是多少？从同样被广泛接受的会计准则出发的分析通常与精确数字不符.

角度看, 一个解决了资产负债表的问题, 有助于降低融资成本. 从投资者的角度来看, 证券化让投资者获得了以前无法获得的支付, 并且提供了更好的分散化机会. 另一方面, 混合资产可以被当作是复合的、现成的组合.

一个金融工程师需要知道如何建立一个资产担保证券. 实际上, 工程学隐含在了这个资产类别之中. 剩下的任务, 包括定价和风险管理, 都是自然而然的了. 对混合资产可以做出类似的陈述. 本章首先回顾权益工具的基本知识, 并将我们迄今所用过的方法进行适当修正以适用于处理权益工具.

## 17.2 权 益

债券是一种承诺在已知时间内交割已知现金流的合约. 这些现金流有时是浮动的, 但是交割的时间几乎总是已知的, 浮动利率工具的定价和风险管理等也不是问题. 最后, 债券的发行机构向债券的持有者*融资*, 也就是持有者将资金借给债券发行机构. 这意味他们之间存在着某个契约.

另一方面, 股票赋予持有者对于发行公司具有一定的*所有权*①. 因此, 它的持有者的头寸与公司合伙人的头寸相似, 都是直接从增加的利润中获益, 而在亏损时遭受损失. 原则上, 公司是由股票持有者选举的人来管理的. 那么权益证券应该看成一种可交易的证券. 证券的隐含现金流是公司未来的收益.

### 17.2.1 方法的比较

关于权益工具工程学的讨论, 最好的方法是先回顾简单固定收益工具的定价问题, 然后对一般的权益工具采用*类似*的方法. 对步骤进行比较, 就可以发现它们之间的差别, 并说明了新方法是如何被用于权益工具的.

首先考虑与一个 3 期附息债券 $P(t_0,T)$ 相关的现金流和参数, 如图 17-1 所示. 债券在 $t_0$ 时卖出, 而在 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 内支付 3 次数额为 $c$ 的息票, 日期 $t_3$ 是用 $T$ 表示的到期日. 债券的面值是 100 美元, 并且没有违约风险.

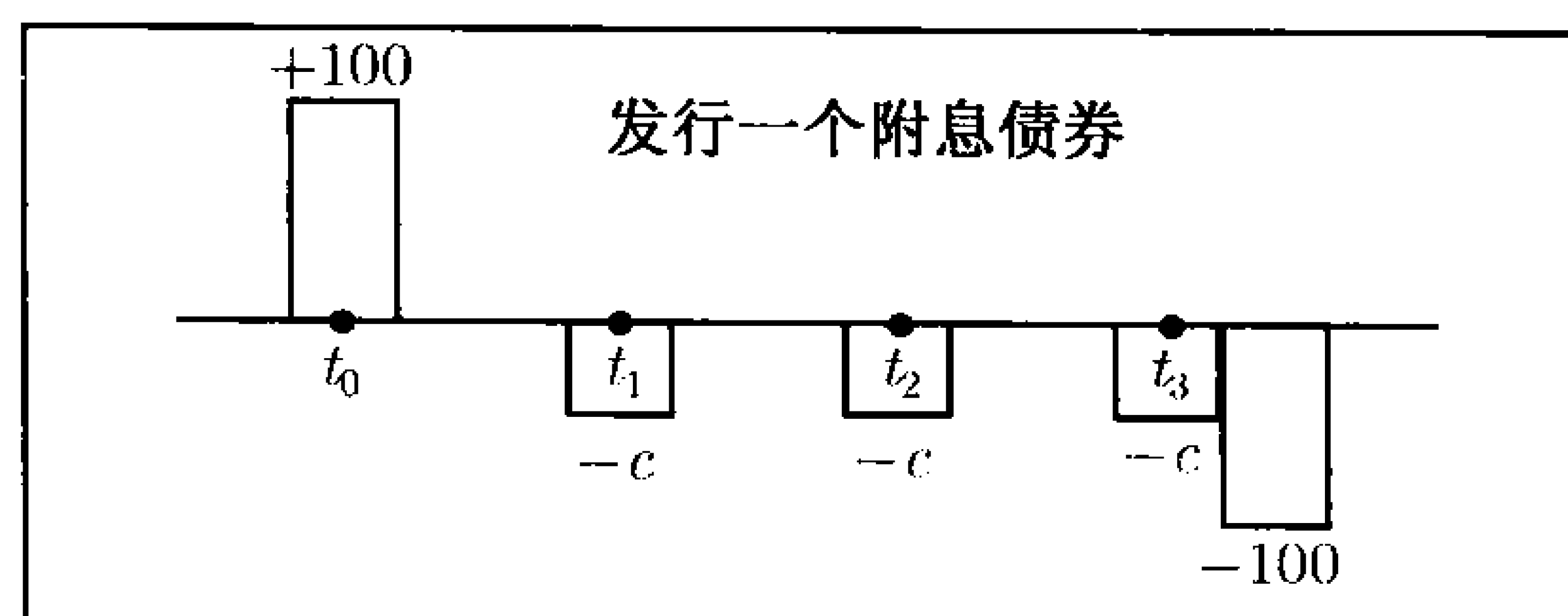



图 17-1

① 不是所有的股票都这样. 在欧洲权益里, 资产属于证券的持票人而且没有注册. 在这种情形下, 所有者是匿名的. 但是所有者仍然可以得到公司挣得的现金流, 虽然他没有投票权, 因此也就不能影响公司的运作. 这证明了欧洲股票的所有者并不是公司"真正"的所有者.

下面，考虑用 $S_t$ 表示、公开交易的、公司股票. 令 $Z_t$ 是代表 $S_t$ 所交易的市场里相关指数的过程，公司每股的未来收益用 $e_t$ 表示.

我们试图使用人工方法重新创造两个工具：一个是固定收益，另一个是权益. 目的是说明权益工具的定价与固定收益情形下相当简单的解决办法不同. 用于这两类资产的基本原理是：证券在 $t_0$ 时的价值应该等于合约中预期现金流的贴现值之和. 但是，这只是一个模糊的陈述，这里需要更加明确的阐述.

假设有 $P(t_0,T)$ 美元可以用于投资. 首先考虑一个储蓄账户，将这些钱投资到短期即期利率为 $L_{t_i}$ 的储蓄账户而不是投资到附息债券，3 期以后，即时间 $t_3$ 时，将产生下面的总额：

$$P(t_0,T)(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})(1+\delta L_{t_2}), \tag{1}$$

这里，$\delta$ 是以天数计数的调整因子，而 $\{L_{t_0},L_{t_1},L_{t_2}\}$ 分别是在时间 $t_0,t_1,t_2$ 观测到的短期利率.

第二种可能性是购买无违约风险的债券 $P(t_0,T)$. 这将导致收到 3 次息票支付以及本金的支付. 最后，我们可以购买 $k$ 单位的股票 $S_t$.

定价和风险管理债券组合的最简单方法是按下列程序进行. 3 次息票支付为 $c$ 的债券等价于适当的零附息债券组合：

$$\text{债券组合}=\{c\ \text{单位}\ B(t_0,t_1),c\ \text{单位}\ B(t_0,t_2),(c+100)\ \text{单位}\ B(t_0,t_3)\}, \tag{2}$$

这里 $B(t_0,t_i)$ 是到期日为 $t_i$ 的无违约风险的零附息债券. 很明显，这个组合产生的现金流与原始附息债券 $P(t_0,T)$ 的现金流一样. 假定这两个投资没有违约风险，也不存在其他现金流，那么它们的价值必须一样：

$$P(t_0,T)=cB(t_0,t_1)+cB(t_0,t_2)+(c+100)B(t_0,t_3). \tag{3}$$

但是，我们知道零息票的无套利价格由下式给出：

$$B(t_0,t_1)=\frac{1.00}{(1+\delta L_{t_0})}, \tag{4}$$

$$B(t_0,t_2)=E_{t_0}^{\widetilde{P}}\frac{1.00}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})}, \tag{5}$$

$$B(t_0,t_3)=E_{t_0}^{\widetilde{P}}\frac{1.00}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})(1+\delta L_{t_2})}. \tag{6}$$

由此得到风险中性概率 $\widetilde{P}$ 关于随机变量 $L_{t_1},L_{t_2}$ 在 $t_0$ 时的定价公式：

$$P(t_0,T)=E_{t_0}^{\widetilde{P}}\left[\frac{c}{(1+\delta L_{t_0})}+\frac{c}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})}\right.$$

$$+\frac{c+100}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})(1+\delta L_{t_2})}\Bigg], \tag{7}$$

这里, $L_{t_1}$ 和 $L_{t_2}$ 是在概率 $\widetilde{P}$ 下分布的随机变量.

我们还不能使用此公式, 因为它含有一个期望算子, 它只是一个表示式而不是一个可进行运算的公式. 但是我们这里先暂且停一下, 转而考虑这里的推导与权益证券情形的推导有何不同.

### 17.2.2 股票情形

下面, 我们试图应用同样的方法来给股票定价. 假设:

- 股票不支付红利;
- 没有股票分割、资本注入或者二级发行等其他公司行为;
- 存在一个按照市场上交易的所有股票计算出的市场股票指数.

我们可以购买 1 单位的 $S_t$ 来获得对未来收益 $\{e_{t_i}\}$ 的所有权. 使用同样的步骤, 我们需要做两件事情. 首先, 运用其他流动的、并且可能的基本证券来找到股票的合成物, 然后让它们的价格相等. 假设我们将下列组合放在了一起:

$$\{e_{t_1}\text{ 单位的 }B(t_0,t_1), e_{t_2}\text{ 单位的 }B(t_0,t_2), e_{t_3}\text{ 单位的 }B(t_0,t_3), \cdots\}, \tag{8}$$

然后按债券定价的步骤类似地继续进行. 这种方法至少有两个潜在问题. 其一, 公司承诺通过未来收益 $e_{t_i}$ 支付的美元数与到期时零息债券 $B(t_0,t_i)$ 承诺的美元数所具有的信用风险性质可能不同. 因此 $B(t_0,t_i)$ 可能不是 $e_{t_i}$ 合适的现值. 当然, (不现实地) 假定没有信用风险可以消除这个问题. 即使这样, 还存在着第二个问题, 不像在附息债券的情形里, 息票支付 $c$ 是常数, 而且在复制组合里的权重是常数, 在权益中未来收益 $e_{t_i}$ 是随机的. 所有 (8) 式中组合的权重均未知, 因此组合本身不能成为复制组合. 这意味着在权益证券情形里, 定价原理是不同的.

解决此问题的一种方法是回答下面的问题: 我们可以对固定工具所使用的方法做小的修正, 并且引进类似的方法吗? 实际上, 通过强制施加一些更加严格的假设, 我们就可以得到一个有意义的答案. 这种方法的单因素形式等价于所谓的资本资产定价模型 (CAPM)理论的应用.

本书不讨论资本资产定价模型, 但这里我们仍然给出一个关于衍生品情形和固定收益平行对比的描述, 其思想如下所示. 假设 $Z_t$ 是 $S_t$ 所交易的市场的正确股票指数, 并假设对于 $S_t$ 和 $Z_t$ 这对变量有下列 (离散的) 风险中性动态机理:

$$\Delta S_t = rS_t\Delta + \sigma_s S_t\Delta W_{st} + \sigma_m S_t\Delta W_{mt}, \tag{9}$$

$$\Delta Z_t = rZ_t\Delta + \sigma Z_t\Delta W_{mt}, \tag{10}$$

这里 $\Delta Z_t$ 和 $\Delta S_t$ 是变量 $Z_t$ 和 $S_t$ 的增量, 而 $r$ 是恒定的无风险利率. $\Delta W_{st}$ 和 $\Delta W_{mt}$ 是两个后面会进一步讨论的相应 Wiener 过程的独立增量.

我们假定 $\Delta W_{st}$ 是可分散化的, 并且它是单只股票 $S_t$ 所特有的风险. 影响市场指数的只有 $\Delta W_{mt}$. 这代表了不可分散化的风险, 股票持有者必须承受它. 因此, 这是一个具有两个因素的模型, 虽然其中一个因素是股票 $S_t$ 波动的一个真实来源, 但它不是真正的风险.

为了获得类似于债券定价的表示公式, 我们假定预期的未来收益经过适当贴现后应该等于 $S_t$ 的现价. 然后我们使用真实的概率 $P$ 和应用在公司所挣得的收益中的真实的贴现率 $d_t$, 写出对应于附息债券价格表示公式的等式[1]:

$$S_t = E_t^P \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{t+i}}{\prod_{j=1}^{i}(1+d_{t+j})} \right]. \tag{11}$$

值得强调的是, 在这个表达式中, 我们使用了真实的概率. 因此, 相关的贴现率将与无风险利率不同:

$$d_t \neq r. \tag{12}$$

我们需要讨论如何得到这样的 $d_t$.

为了做到这一点, 我们需要运用下面的经济均衡条件: 如果一个风险是可分散化的, 那么在均衡中它具有零价格. 市场不必通过为持有可分散化风险的投资者提供一个风险溢价来进行补偿. 我们在下一节中要用到这个结果.

beta

投资者需要得到补偿的唯一风险来源是 $W_{mt}$. 但是, 如果这是真实的情形并且风险 $W_{st}$ 可以认为是零价格的, 那么我们就可以使用 $Z_t$ 作为对冲, 来消除唯一由 $W_{mt}$ 引起的 $S_t$ 的波动. 解决这个问题有两种方法.

第一种是利用 $Z_t$ 的方程得到

$$\Delta W_{mt} = \frac{\Delta Z_t - rZ_t\Delta}{\sigma Z_t}, \tag{13}$$

对 (9) 式的右边进行代换

$$\Delta S_t = rS_t\Delta + \sigma_s S_t \Delta W_{st} + \sigma_m S_t \left( \frac{\Delta Z_t - rZ_t\Delta}{\sigma Z_t} \right), \tag{14}$$

除以 $\sigma_m S_t$ 并重新整理后得到

[1] 在下面的公式中, $t$ 的单位是年.

$$\frac{\Delta S_t - rS_t\Delta}{\sigma_m S_t} = \frac{\sigma_s}{\sigma_m}\Delta W_{st} + \left(\frac{\Delta Z_t - rZ_t\Delta}{\sigma Z_t}\right). \tag{15}$$

通过在真实的概率下求期望, 右边的第一项可以分散掉, 因此我们可以运用相应的(年) 期望收益 $R_t^s$ 和 $R_t^m$, 将其写成下式:

$$\frac{R_t^s\Delta - r\Delta}{\sigma_m} = \frac{R_t^m\Delta - r\Delta}{\sigma}. \tag{16}$$

现在, 从定价的角度看, 可分散风险的市场价格是零, 这意味着只有单一的因素起作用. 相应地, 我们可以假定, 关于 $\sigma_m$ 有下面的关系式:

$$\sigma_m = \beta\sigma. \tag{17}$$

将此式代入到等式 (16) 中, 就得到了权益收益所使用的贴现因子[①]

$$R_t^s = r + \beta(R_t^m - r). \tag{18}$$

如果已知右边的价值, 我们可以计算出 $R_t^s$, 而且将它作为贴现因子在下式中使用

$$S_t = E_t^P\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_{t+i}}{\prod_{j=1}^{i}(1+d_{t+j})}\right]. \tag{19}$$

同样, 这只是一个表达式, 还不是一个可供使用的公式. 下面, 我们将说明如何得到两种情形下可用的公式.

### 17.2.3 解析公式

我们怎样分别从等式 (7) 和等式 (19) 的表达式中得到可操作的公式呢? 在固定收益的情形下, 问题的答案相对比较简单, 而对于权益, 还需要作进一步的讨论.

为了将债券的表示公式转化为可操作公式, 我们可以使用如图 17-2 所示的两个流动的远期利率协定合同. 这些合同说明了市场参与者愿意为 ($t_0$ 时) 未知的现金流 $L_{t_1}$ 支付已知的现金流 $F(t_0,t_1)$, 并且愿意为随机变量 $L_{t_2}$ 支付已知的 $F(t_0,t_2)$. 因此, 任何风险溢价或者其他有关的随机支付 $L_{t_1}$ 和 $L_{t_2}$ 的计算都已经包含在 $F(t_0,t_1)$ 和 $F(t_0,t_2)$ 中了. 这意味着在 $t_0$ 时, 可以用 $F(t_0,t_1)$ 和 $F(t_0,t_2)$ 分别 "取代" 未知量 $L_{t_1}$ 和 $L_{t_2}$, 这是因为前者与远期利率合约所示的价值是等价的.

这意味着在下面的公式中

$$\begin{aligned} P(t_0,T) = E_t^{\tilde{P}}\Bigg[&\frac{c}{(1+\delta L_{t_0})} + \frac{c}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})} \\ &+ \frac{c+100}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta L_{t_1})(1+\delta L_{t_2})}\Bigg], \end{aligned} \tag{20}$$

① 资本资产定价模型里的 $\beta$ 等于股票与指数收益之间的协方差除以指数收益的方差.

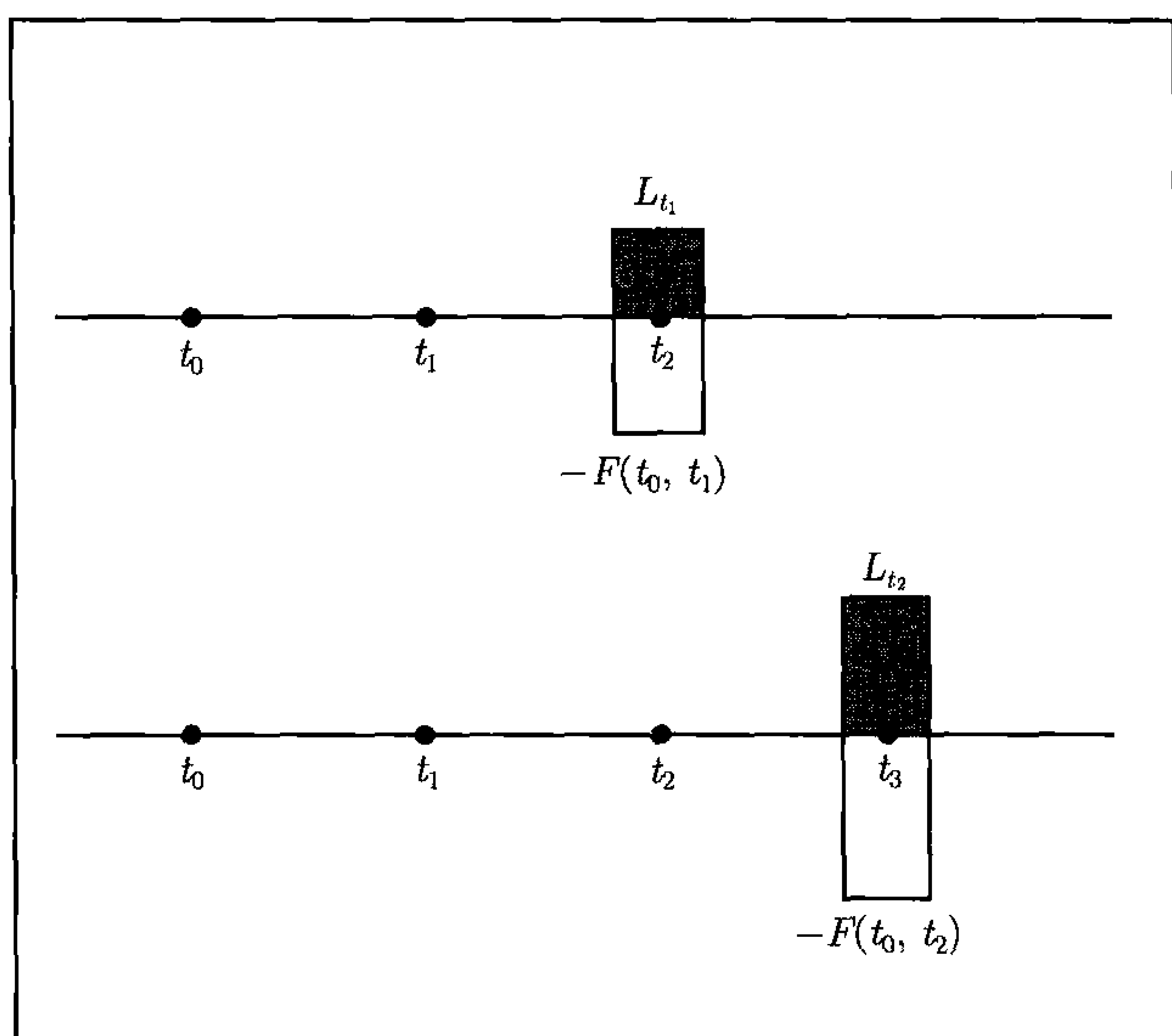



图 17-2

无套利条件将允许我们用已知的 $F(t_0,t_1)$ 和 $F(t_0,t_2)$"代替" 随机变量 $L_{t_1}$ 和 $L_{t_2}$. 从而有

$$\begin{aligned} P(t_0,T) = & \frac{c}{(1+\delta L_{t_0})} + \frac{c}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta F(t_0,t_1))} \\ & + \frac{c+100}{(1+\delta L_{t_0})(1+\delta F(t_0,t_1))(1+\delta F(t_0,t_2))}. \end{aligned} \tag{21}$$

这是通过风险中性定价方法获得的债券定价公式. 注意, 为了使用这个公式, 我们需要从市场中得到最近的即期和远期 Libor 利率 $L_{t_0}$, $F(t_0,t_1)$ 和 $F(t_0,t_2)$, 然后进行代换.

得到权益情形下的解析型公式并不那么容易, 除了已经给定的假设外, 还需要做进一步的假设. 为此, 我们从原始表示公式出发

$$S_t = E_t^P \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{t+i}}{\prod_{j=1}^{i}[1+(r+\beta(R_{t+j}^m - r))]} \right]. \tag{22}$$

为了将这个公式转化为一个可用的公式, 需要下面的假设.

在分子中有无穷多个 $e_{t+i}$. 首先, 我们需要在某个较大但是有限的整数 $n$ 处将它们截断. 其次, 假设公司收入的增长率为 $g$, 使得对于所有的 $i$ 我们有

$$e_{t+i} = e_t(1+g)^i. \tag{23}$$

最后, 运用计量经济学或者判断方法, 我们需要估计出每股的收益 $e_t$. 估计完 $e_t$, $\beta$, $R^m_{t+i}$ 后, 令

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_t(1+g)^i}{\prod_{j=1}^{i}[1+(r+\beta(R^m_{t+j}-r))]}. \tag{24}$$

这个等式可以用来估价 $S_t$. 最后, 大部分权益分析者使用这个原理的某种形式来估价股票. 但所做的假设比固定收益的情形要多, 条件也更强.

**小结**

让我们总结一下. 由于下列原因, 固定收益工具的估价相对比较简单.

(1) 由于息票率 $c$ 是已知的, 我们可以很容易地找到合适的零息债券, 根据息票赋予这些零息债券不同的权重, 构造一个复制组合.

(2) 债券的到期日是已知且有限的, 这使得我们可以运用已知且数量有限的工具来复制债券.

(3) 远期利率合约的存在允许我们用与市场等价的美元数量来 "代替" 未知的随机变量, 这些美元的数量是已知且确定的.

权益的估价需要更多的约束.

(1) 需要建立市场收益或者类似内容的模型, 这是建模成分.

(2) 因素的个数在模型中需要明确指定.

(3) 需要使用经济均衡断言可分散化风险不需要市场进行回报, 而且唯一起作用的波动率是不可分散化风险的波动率.

在进行了上述简单的概念回顾之后, 现在我们来考虑一些权益产品的例子.

## 17.3 权益产品的工程应用

本章的第二个目的是讨论一些流行权益工具的工程应用.

一大类的合成证券都是由权益工具创造出的, 而且这类工具越来越受欢迎. 这里不讨论这些大的资产类别的细节, 但我们用一些例子说明金融工程是如何用来满足不同的目的以及如何构造*混合权益产品*. 这里不做全面阐述, 但在本章最后, 我们提供了一些附加的参考资料.

本节的安排如下. 先考虑最早熟知的权益关联工具, 即可*转换债券*以及它们的相关产品——权证关联债券. 然后对这些工具进行深入的研究, 并且给出了相对简要的讨论, 这将使读者能更清楚地了解有关权益产品中的金融工程问题.

随后, 我们讨论*指数关联产品*, 这是一个比较新的品种. 这里, 虽然一般合成证券的结构差异不大, 但它们的构造目的却不同, 在可转换债券和权证关联证券中使用股票指数代替单个股票就是这个原因.

第三部分内容介绍比较新且具有广泛用途的混合证券.

### 17.3.1　目的

公司通过发行债务或者权益证券来筹集资本金.[1] 假设一个公司或者银行决定通过发行**权益证券**来筹集资金, 这是不是融资的有利方式呢? 事实证明公司可以直接卖出股权来筹集资金, 但它可能有一些特定的需求. 金融工程提供了若干可选择方案.

(1) 一些策略可以降低股权融资的成本.

(2) 其他的策略可以修改资产负债表的构成.

(3) 可以采取某些措施, 更好地根据利率、股票市场以及通货的走向来确定发行证券的时间.

(4) 最后, 存在一些用于指导扩大投资者范围的策略.

在讨论这些策略时, 我们假设读者已经熟悉三种基本工具. 首先是公司发行的**普通附息债券**. 这种工具的现金流如图 17-3a 所示[2]. 假定债券的违约概率为 0 从而其现金流是准确知道的. 息票为 $c$, 债券按面值出售, 所以初始价格为 100 美元.

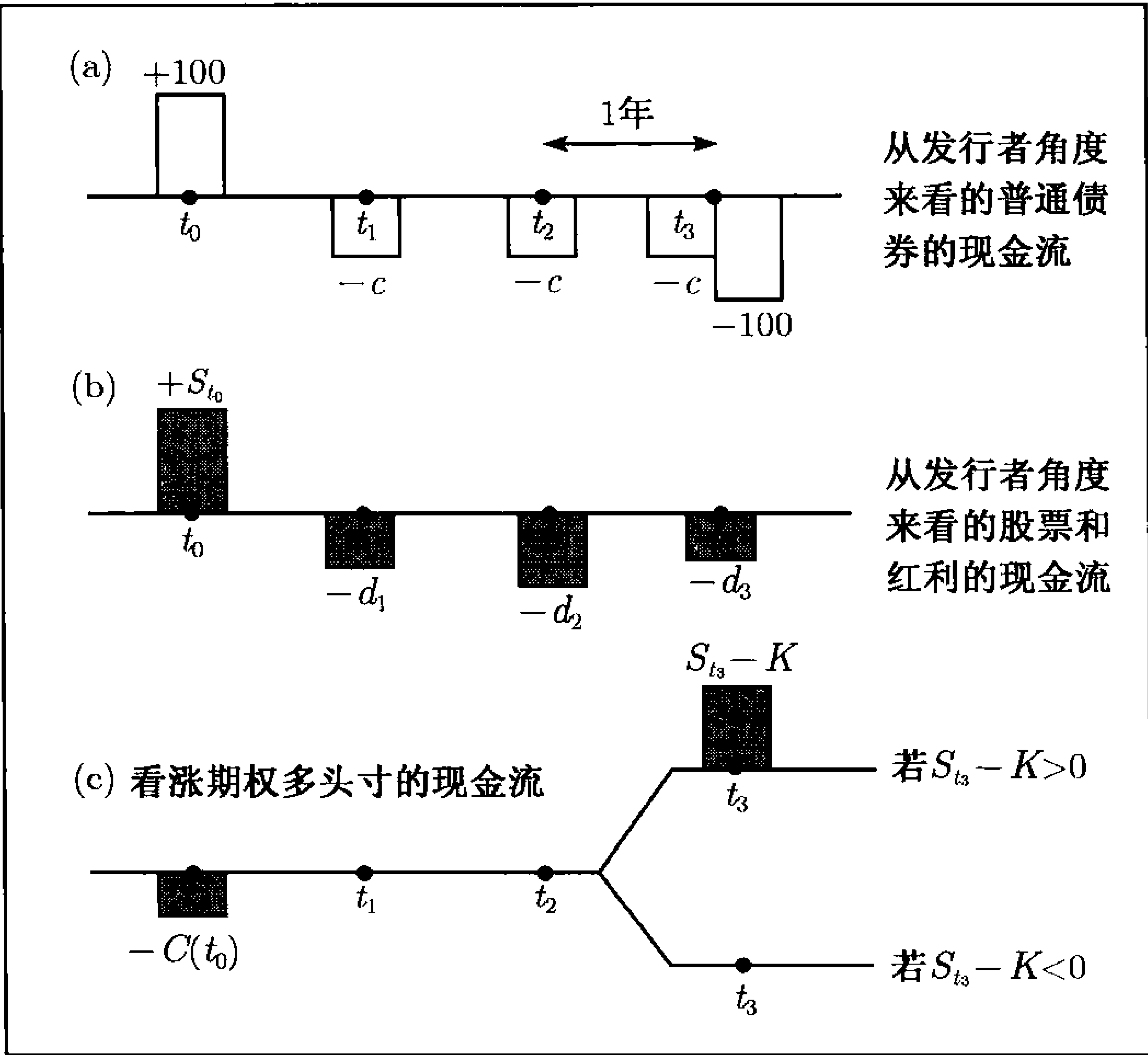



图　17-3

第二种工具是支付红利的**股票**. 初始价格为 $S_t$ 并且红利是随机的. 公司不会

① 还有被称为中间融资的方式, 它接近于这两者的组合.

② 为了简便, 我们假设有效期为 3 年.

破产. 现金流如图 17-3b 所示. 第三种工具是以股票为标的资产的*期权*. 以股票为标的的 (看涨) 期权是欧式的, 到期日为 $T$, 执行价为 $K$. 看涨期权卖出时的价格为 $C(t_0)$. 它在 $T$ 时的支付为

$$C(T) = \max[S_T - K, 0]. \tag{25}$$

我们还需要另外两种产品. 在一些权益关联的产品里, 我们可能也想运用以债券为标的资产的期权, 期权是欧式的. 而在其他一些特殊情形下, 我们可能想要在分析中加入信用违约互换. 利用这些基本的工具, 可以创造出很多有用的合成证券. 我们将在简化的背景下讨论*可转换债券*的工程应用.

### 17.3.2 可转换债券

*可转换债券*是含有期权的一种债券. 在到期日, 如果债券的持有者愿意, 本金可以按预先确定好数量的发行公司的股票来支付, 否则将得到面值. 换句话说, 债券的所有者购买了 "转换" 的权利. 很显然, 可转换债券是给予债券持有者在标的权益显著增值的情形下对公司股票建立敞口的一种*混合产品*. 我们在简化的假设下讨论这样一个可转换债券的工程应用. 在第一种情形下, 我们讨论没有违约风险的债券. 这只是说明性的, 在现实中并不存在这样的债券. 所有的公司债券都有某种违约风险, 有时, 这个风险是显著的. 因此, 我们在第二个例子中加入*违约风险*后, 重新讨论工程应用.

1. *情形 1: 没有违约风险的可转换债券*

假设一个*无违约债券*在到期日支付 100 美元, 并且考虑下列组合:

$$\text{组合} = \{1\text{个债券}, \text{购买}n\ \text{个看涨期权}, \text{基于}\ nK = 100\text{的股票}\}. \tag{26}$$

这个由一个债券和 $n$ 个看涨期权构成的组合, 如图 17-4 所示. 考虑图的上部分, 组合的持有者为债券付款然后收到 3 次息票支付. 在 $T = t_3$, 债券持有者将收回本金. 这是一个典型的无违约附息债券的现金流.

第二个现金流说明了到期时, 如果期权是价内的, 将会发生什么. 购买 $n$ 个这样的期权, 债券的持有者开始时要支付 $nC(t_0)$ 美元. 已知这些期权是欧式的, 在到期日之前没有其他的现金流. 在到期日, 如果期权是价内的, 债券将被转换, 而且支付是

$$n[S_T - K]. \tag{27}$$

这可以看作是每股价值为 $S_T$ 的 $n$ 股股票与 $nK$ 的现金的交换. 但是 $n$ 的选择要使得 $nK = 100$. 因此这好像是组合的持有者收到 $n$ 股每股价值为 $S_T$ 的股票, 而只需为它们支付 100 美元. 这正是一个普通看涨期权在价内时所要做的事情. 但是在这种情形下, 从债券的本金支付中还有额外的 100 美元.

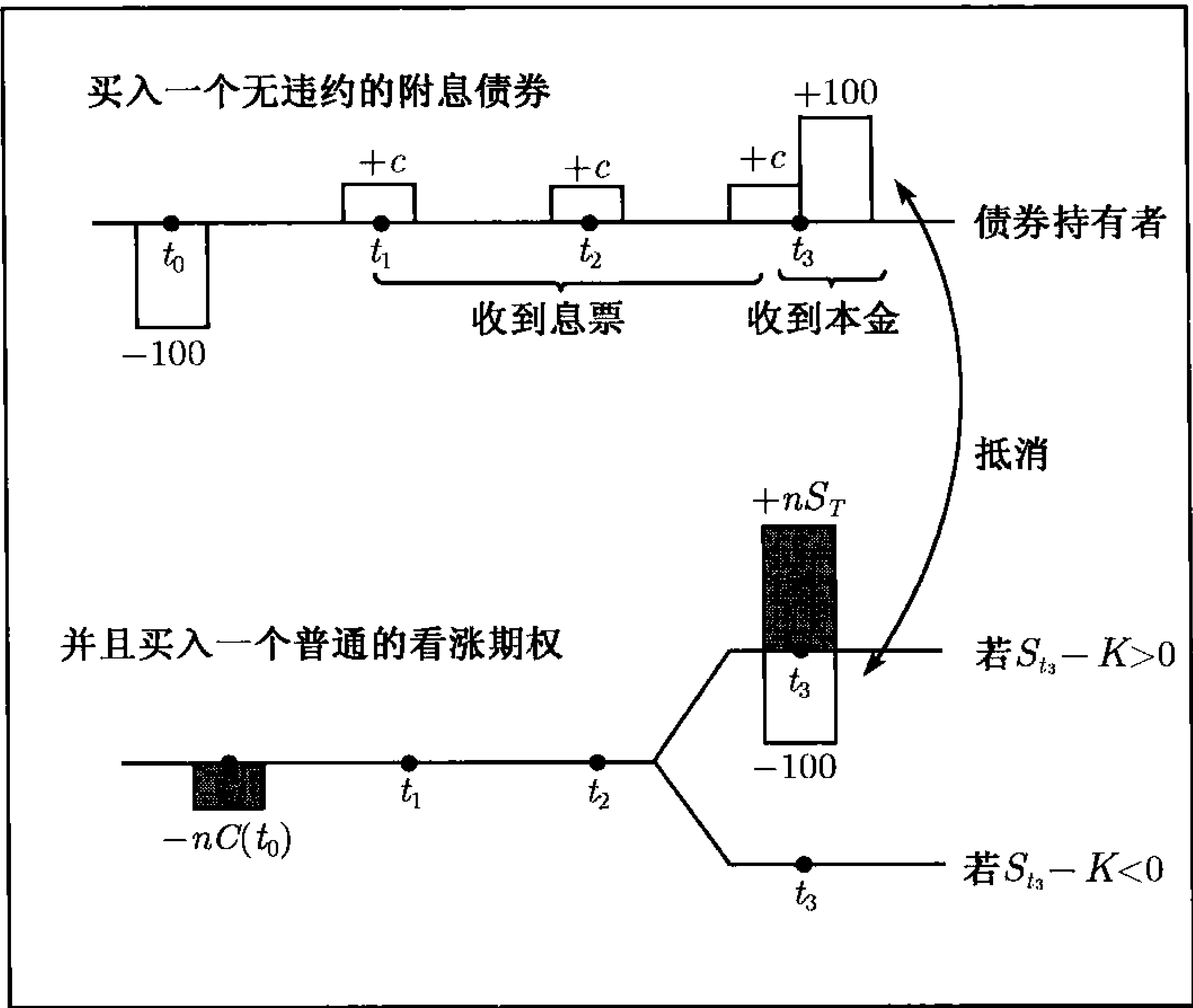



图 17-4

将这两列现金流放在一起, 我们看到了组合持有者将支付 $100+nC(t_0)$, 而在到期日前的每个息票支付日收到 $c$ 美元. 此后如果期权在到期时是价内的, 那么最后将得到价值为 $S_T$ 的 $n$ 股股票. 否则, 债券持有者最后将获得本金 100 美元. 若期权到期时是价外的, 它们将不会产生额外的现金流. 这种情形等价于购买了一个附息债券. 息票 $c$ 是由当初以 $100+nC(t_0)$ 卖出的债券支付. 因为在发行日, 它高于面值 100, 所以这个债券的**到期收益**将小于 $c$. 这可以运用**平价收益** $y$ 的等价收益率的表示公式得出:

$$100+nC(t_0)=\frac{c}{(1+y)}+\frac{c}{(1+y)^2}+\frac{c}{(1+y)^3}+\frac{100}{(1+y)^3}. \tag{28}$$

只要 $nC(t_0)>0$, 我们就需要有 $y<c$.

这里的讨论说明了可转换债券是什么, 并且提出了如果没有违约风险时对它进行定价的方法. 可转换债券在 $S_T<K$ 时, 也就是股票价格不能升高至执行价 $K$ 以上时, 以 "昂贵" 的价格购买了这个可转换债券. 在这种情形下, 我们称债券**转换失败**. 但是如果在到期日 $S_T>K$, 债券将给予它的持有者 $n$ 股价值为 $S_T$ 的股票, 其总价值超过 100 美元, 即一个典型的债券所支付的本金. 债券兑换为价值高于本金的 $n$ 股股票. 为了定价这种简单情形下的可兑换债券, 我们首先分别定价所有的成分, 然后将它们的价值加起来.

### 2. 情形 2: 加入违约风险

上面讨论的可转换债券的分解是不完全的. 为了简化前一节的讨论, 我们假定可兑换债券是由一个没有违约风险的公司发行的. 很显然, 这并不现实, 因为所有的公司债券都伴随有一定的信用风险.

在我们处理这个议题的分析之前, 看一下市场实践是比较有帮助的. 考虑下面的材料.

**例**

纽约和康涅狄格的市场官员说, 美国的可转换套利对冲资金正在进入信用违约互换市场. 需求的上升是对上月投资级可转换债券保险上涨的响应, 再加上美国资产互换市场的非流动性和可转换债券交易者投资组合信用敏感性不断增加的结果.

套利对冲资金运用信用违约互换来消除可转换债券的违约风险, 只留下隐含的权益衍生品和利率风险. 后者通常通过期货或者国库券进行对冲. 某交易员说, 基于投资级可转换债券的价格, 这个策略通常比直接购买权益衍生品期权便宜.

资产互换涉及从可转换债券中消除权益衍生品, 是对这些资产的一个最佳对冲, 一个交易员这样说. 因为它允许他们以较低成本为该头寸进行融资, 而且一举消除了利率风险和信用风险. 但是伴随着近 12~18 个月以来美国发行者信用质量的下降, 寻找愿意担当资产互换另一方的机构变得更加困难了……(摘自《衍生产品周刊》的文章)

从这篇材料中很清楚地看到, 涉及可转换债券的套利策略需要将某种信用工具例如信用违约互换当作成分之一. 我们现在讨论包括信用风险的可转换债券的工程应用. 这将分离出存在于这些工具之中的信用违约互换 (CDS).

### 3. 可违约的可转换债券的金融工程

在之前讨论的可转换债券分解中, 可转换债券是没有违约风险的普通附息债券. 我们现在给出两个新的假设:

- 可转换债券具有信用风险;
- 不失一般性, 只有当公司对债券不违约时, 债券才能兑换 (即 $S_T > K$).

可转换债券的工程应用可以如图 17-5 所示进行. 在这个图中, 为了简便我们再次考虑一个 3 期的有风险债券. 债券本身等价于一个互换的接收者、一个存款以及一个信用违约互换的组合. 因此, 这里所隐含的普通债券不再是无违约的.

图 17-5 说明了我们如何分解第 16 章讨论的有风险债券. 我们现在据此引入利率互换和信用违约互换. 在加入一个以股票为标的的期权后, 图中所示的现金流在水平轴上的和与具有违约风险的可转换债券的现金流相同. 得到的合成证券产生

了下面的合约方程:

$$
\boxed{\text{具有违约风险的可转换债券}} = \boxed{\text{三期收入利率互换}} + \boxed{\text{三期无风险 FRN}} + \boxed{\text{三期在信用基础上的 CDS}} + \boxed{n\text{个看涨期权, 交割价为 } K}. \tag{29}
$$

这个方程说明了如果一个市场从业者想要分离出可转换债券中隐含的以股票为标的的看涨期权, 那么他需要: (1) 建立一个支付方互换头寸; (2) 通过信用违约互换购买违约保护; (3) 通过可变的 Libor 利率获得贷款; (4) 购买可转换债券. 这实际上是前面阅读材料中得出的结果.

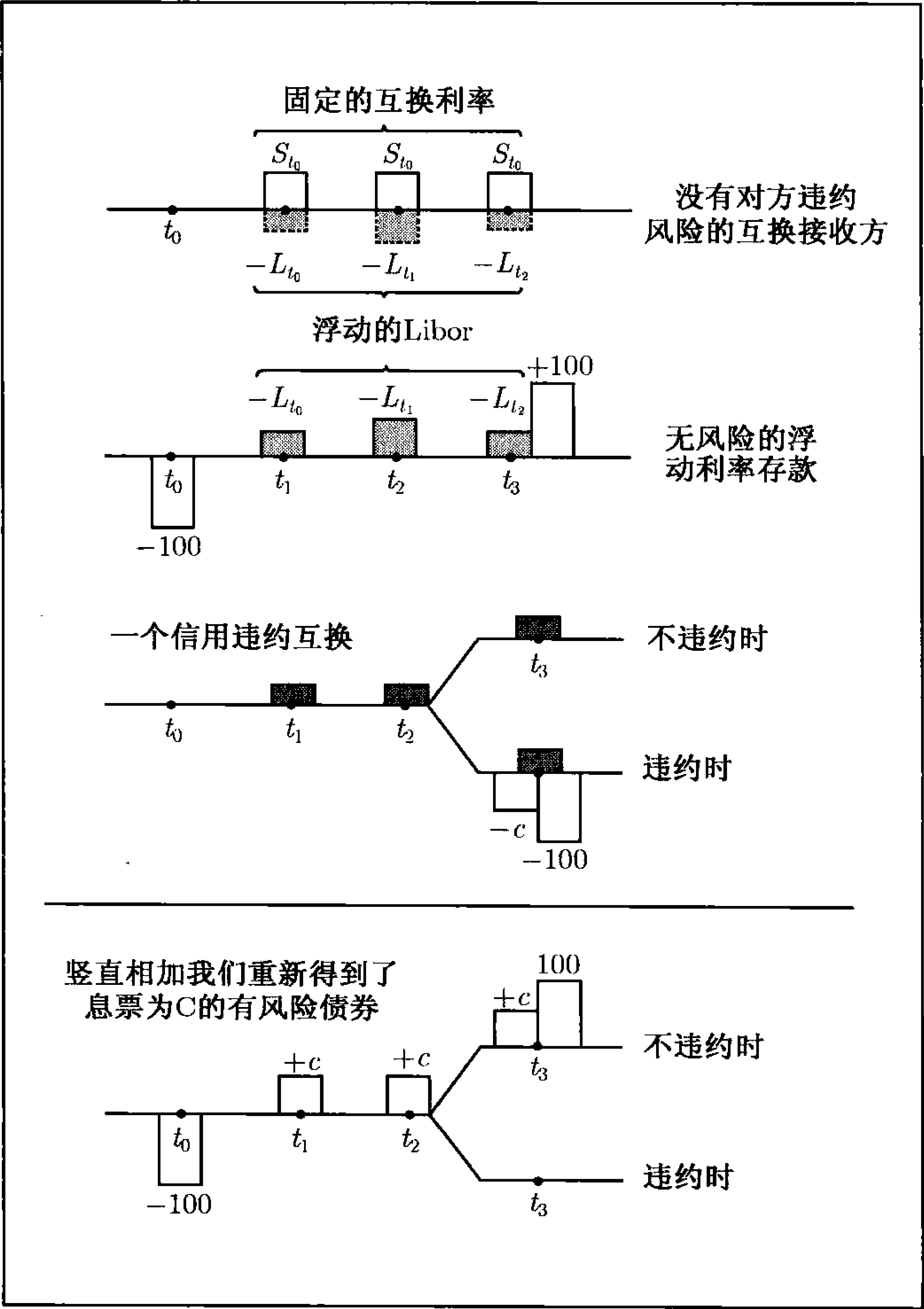



图 17-5

### 17.3.3 重要的变化

本节考虑这个基本可转换结构的两个变化. 第一种变化是, 对可转换债券进行适当修改, 从而允许其购买者使用两种*不同货币*进行操作. 实际上, 可以卖出以美元命名的债券, 但是标的股票可能是以欧元命名的, 例如法国股票. 我们将会看到, 这相当于加入了一个以外汇为标的资产的看涨期权或者看跌期权, 是一个有趣的选择.

第二种变化也很重要. 基本的可转换债券可以变为*可赎回的*. 这等于是让标的债务发行了一个可赎回的债券. 也等于加入了一个以债券为标的资产的看涨期权. 对此存在着一些有趣的推论. 在分析如何使用这些工具之前, 我们考虑在每种情形下的某些金融工程问题.

*汇率敞口*

假设可转债是用两种货币构造的. 一个泰国公司通过在欧洲美元市场上卖出欧元可转换债券获得资金, 结构中的债务成分以美元命名. 所以, 债券具有面值, 例如 100 美元. 通过转换可以变为例如在曼谷交易的公司股票, 股票以铢命名. 我们(不现实地) 假设没有违约风险.

因为泰国股票在泰国交易市场上交易, 并且以泰铢报价, 所以包含在可转换债券中的转换价格需要明确说明在可能的转换中所使用的汇率. 否则, 转换法则将是不完全的. 也就是说, 不再是仅仅说明股票数量 $n$ 以及转换价 $K$, 然后运用等式

$$100\$ = Kn, \tag{30}$$

这时的转换条件应该变为

$$e_t 100\$ = Kn, \tag{31}$$

这里 $e_t$ 表示的是用泰铢表示的 1 美元在 $t$ 时的价格 (汇率). 这是必需的, 因为原来的转换价 $K$ 以泰铢表示, 而债券的面值以美元表示. 债券结构可以为 $e_t$ 指定一个值, 并且在合同中将它作为一个参数包括进去. 通常, $e_t$ 是当时的汇率.

现在假设一个泰国发行者以 $e_t$ 即当前汇率卖出这样一个欧元可转换债券. 此后, 如果泰国的股票上涨*并且*汇率保持不变, 那么转换将会发生, 这是重要的. 在这种结构中, 在到期日, 泰国公司将运用自己的*股票*而不是把初始的 100 美元归还给债券持有者来偿还他的债务. 但是, 如果同时 $e_t$ 上涨,[①]那么, 尽管股票价格比较高, 但初始本金 100 美元的价值当以泰铢来衡量时可能仍然比 $nS_T$ 高, 因此转换不会发生. 结果是泰国公司将面临相当数量的美元现金流失[②].

① 例如, 泰铢贬值了.

② 这可能是在不好的时候发生的事情, 因为如果货币贬值, 国际市场不能接受滚动泰国公司的美元债务.

这说明一个以主要货币发行但是以国内股票为标的的可转换债券将带有汇率敞口. 如果我们重建这种类型的可转换债券并且创造出它的合成证券, 将可以更清楚地看到这一点. 在图 17-6 中进行了复制.

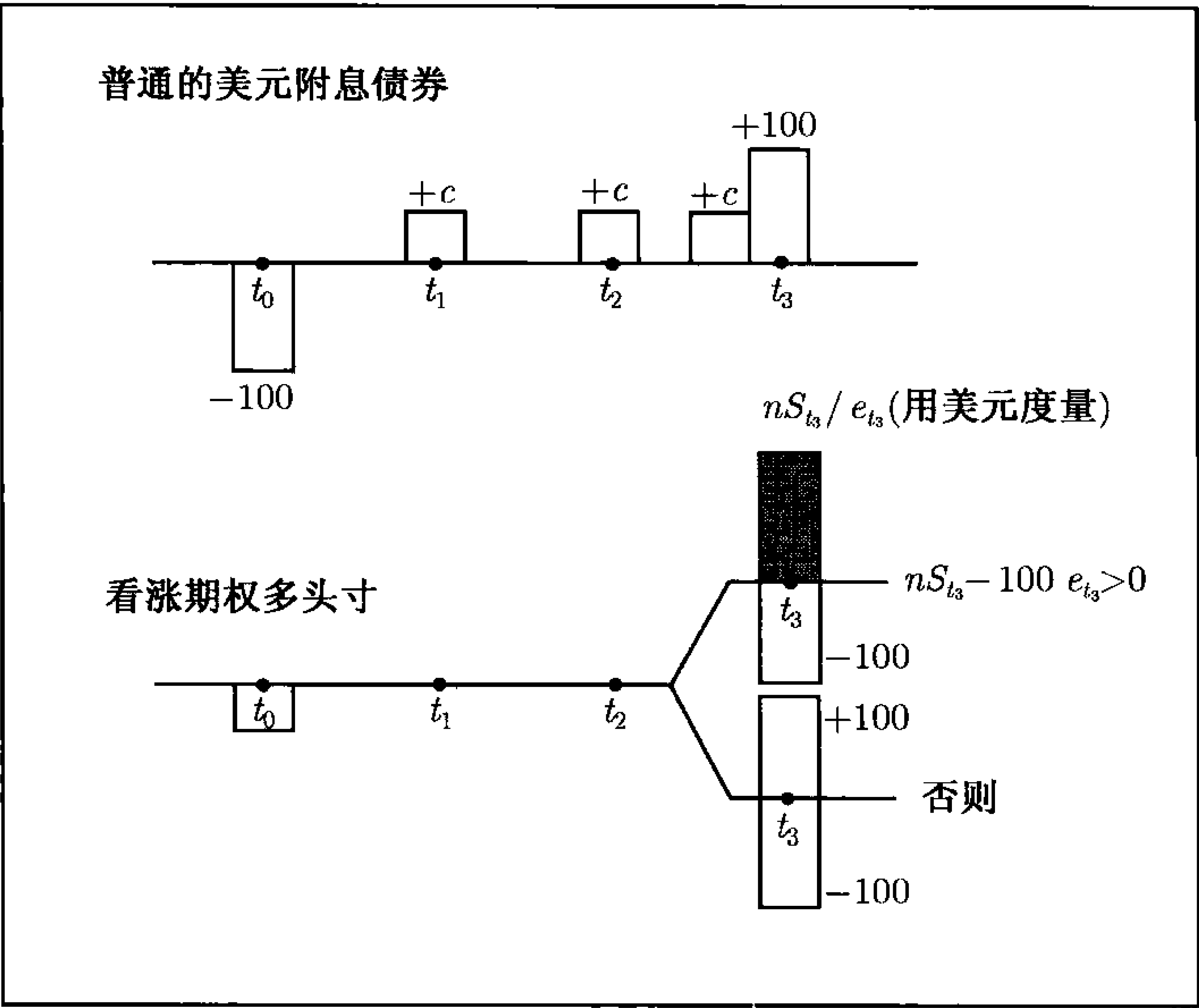



图 17-6

图 17-6 的上部分与图 17-4 类似. 一个具有息票 $c$ 的普通附息债券在时间 $t_3$ 到期, 并且支付本金 100 美元. 区别在于图中的第二部分, 像通常一样我们有一个以股票 $S_t$ 为标的资产的看涨期权. 但是 $S_t$ 以泰铢计价, 而且看涨期权将是价内的 —— 也就是说, 只有当下面的条件满足时, 才会发生转换

$$nS_{t_3} > 100e_{t_3}. \tag{32}$$

图 17-6 的思想如下. 我们可以从 1 美元的债券开始, 然后将这个新的看涨期权转变为前面情形中的期权. 但是, 如果泰铢暴跌,[①]那么到期日收到的本金 100 美元将比 $S_{t_3}n/e_{t_0}$ 更有价值.

### 17.3.4 使可转换债券可赎回

我们可以将基本可转换债券的结构进行第二种推广, 加入一个以隐含的可转换债券为标的资产的看涨期权. 例如, 如果债券的到期日为 $T$, 那么我们可以加入一

① 这意味着泰国股票市场也下跌了.

个内置期权, 从而给予发行者在 $U(U < T)$ 时以下面的价格购回债券的权利

$$\max[\$100, nS_U]. \tag{33}$$

通过这种方式公司具有了*强制*转换, 并且在 $U$ 时发行新证券的权利. 一些公司可能发现了这是一个有用的策略.

在这种类型的可转换债券中, 强制转换是主要目的. 假设下面两个条件都满足:

(1) 股票以高于转换价 (即执行价 $K$) 的较高价格交易;

(2) 股票支付的未来红利的期望比可转换债券的当前息票要低.

那么, 如果可转换债券可以赎回, 发行者可以通过赎回债券来强制转换. 这将使发行者资产负债表上的债务发行转变为权益, 并且影响一些相关的重要比率. 第二, 公司目前的现金流将得到改进.

### 17.3.5 更复杂的结构

对基本的可转换–担保的结构进行修改就可以满足金融工程上的进一步需求. 我们考虑另一个例子.

假设可转换债券在转换时, 转换为*另一个*公司的证券. 这是可能的, 例如, 如果公司 $A$ 占有公司 $B$ 的股份. 这种方式下, 公司 $A$ 能够卖出可转换债券, 该债权的转换发生在公司 $B$ 的证券上.

从金融工程的角度来看, 这种 "可交换" 的结构是一样的. 但是, 定价和风险管理是不同的, 因为现在影响债券价格的有*两个*信用体: 发行债券公司的信用以及债券将要转换公司的信用.

另一个区别涉及目标公司股份的稀释. 当可转换债券发行, 并且在未来某一天发生转换时, 可能会有股份的稀释, 但是在可交换的情形下, 可交换的股票一般来自于自由的流动.[①]

### 17.3.6 使用可转换债券

从终端投资者的角度来看, 可转换债券具有一定的吸引力. 例如, 买入可转换债券的投资者可能对股票价格具有某种敞口. 如果 $S_t$ 显著上升, 债券将变为股票的一个组合. 另一方面, 如果债券转换失败, 投资者至少可以依靠某个最小的现金流作为收入, 而且也可以重新获得本金 (当没有违约时).

但是, 本书的兴趣不在投资者上, 而是从发行者的角度来看待产品的优势. 我们使用可转换债券到底是为了何种目的呢?

---

① Lyon's 是最近的另一种产品. 隐含债券不是附息债券, 而是具有长有效期的折扣债券.

- 发行可转换债券而不是普通债券的第一个意义在于可转换债券的息票比较低. 因此, 它 "看起来" 是以低成本获得的资金.
- 对于金融工程师来说, 更加显著的是可转换债券在资产负债表的管理上有一些有趣的推论. 如果一个权益关联资产被认为是权益, 它对债务/权益这样的比率的影响可能会比较小. 但是, 通常评级机构会把普通的可转换债券当作是债务而不是权益.
- 注意到在可转换债券中如果发生了转换, 股票卖出的价格将比发行时的原始股价高.
- 最后, 可转换债券是债券, 而且它们可以在欧洲市场上以欧元可转换债券出售. 通过这种方式可以得到新的投资者.

我们应该指出, 当可转换债券与其他工具结合时可能会有一些显著且微妙的税收优势. 说明这一点的最好方式是看一个市场中的例子.

**例**

(ABC 资本) 已经缔结了一个基于 COX 通信的 154 000 股优先股可转换为 Sprint PCS 股票的一个总收益互换, 以及一个基于 225 000 股 Sprint PCS 股票的总收益互换. 在 COX 互换中, 对冲资金支付 3 个月的 Libor 加上 50 个基点, 并且收到可转换优先股的收益.

在 Sprint 互换中, ABC 支付股票的收益并且收到 3 个月的 Libor 减去 25 个基点. 这两个总收益互换大约在 13 个月后到期.

总收益互换是由于税收原因而缔结的. ABC 头寸被开曼群岛的一个有限期限公司持有. 因为开曼群岛与美国没有税收协定, 所以这些证券的收入以 30%的无协定比率进行扣除. 缔结总收益互换将确保 ABC 不亲自持有证券, 因此也不受美国扣除的限制.

标的头寸已成为可转换债券套利行为中的一部分. ABC 买入可转换优先股, 然后运用现金权益进行 delta 对冲固有的股票期权. 市场低估了这些可转换的优先股. 根据一个交易员的说法, 他谈到虽然这些股票目前以 76.50 美元进行交易, 而资产模型表明它们应该定价于 87 美元附近. 公司模型部分基于标的股票的波动率. 发行者的信用质量以及可转换债券的特征. 在这种情形下, 市场可能低估了债券, 这是因为它的定价并不是根据复杂优先股的所有特征, 也是电信类股票的普遍问题. (《衍生产品周刊》, 2000 年 11 月)

这段材料也是内置期权如何用来形成套利组合的一个例子. 但是, 如前面所示, 要做这件事情还有许多微妙之处.

### 17.3.7 权证

认股权证是与债券关联的可分离期权. 在这个意义上, 它们与可转换债券是相

似的. 但是, 从金融工程的角度来看, 它们之间还有一些重要的区别.

(1) 权证是可分离的, 而且可以与债券分开出售. 当然, 金融工程师总是能够分离出可换转债券中的内置期权, 但仍然有区别. 事实上, 认股权证的可分离意味着本金总能在到期日支付.

认股权证的数量不必要选得使现金的流入恰好等于因支付本金所产生的现金流出. 因此, 投资者原则上最后能够获得由同一发行所产生的债务和权益.

(2) 在可转换债券中运用的汇率是固定的. 但是, 由于对权证并没有这样的要求, 并且由于后者是可分离的, 所以通常不是这种情形. 因此, 在权证情形下, 没有以汇率为标的的内置期权. 在这个意义上, 权证被认为对强势货币的借入者来说相对更有吸引力, 而可转换债券对弱势货币的借入者更有吸引力.

(3) 最后, 由于权证是可分离的, 所以它不能被强制转换. 债券可以被赎回, 但是不需要进行转换.

我们现在转移到另一个话题, 并且考虑证券化现金流. 这可以被看作是新产品构造的一个例子.

## 17.4 证券化的金融工程

任何商业机构或者金融机构都关联着 "信用", 或者更确切地说是信用等级. 如果这个实体发行了一个债务工具来获得资金, 那么所产生的债券一般与这个公司具有同样的信用等级. 但是一个公司可以被认为是不同信用等级的未来现金流的接收者. 公司的价值和信用等级是这些未来现金流的一个函数. 不是所有的应收款项都具有相同的信用等级. 例如, 一些现金流是具有信用问题记录的机构所欠, 并且这些现金流在违约或者逾期的情形下可能无法收到. 其他现金流则可能是声誉非常好的公司的债务, 因而具有比较小的违约概率, 其偿付的概率非常高.

但是, 债券发行是用这些信用的平均值来担保的, 因为是平均可收取的现金流决定了债券在到期日被偿还的概率. 如果一个公司的应收款项大部分具有相对较高的违约概率, 那么公司在未来可能会经历困境, 因此公司最后可能在贷款上违约. 另外, 债券的信用保费将增加, 而且投资者将常遭受盯市损失. 所有这些可能性均反应在公司发行的债务上, 并且是决定筹资成本的因素.

另一方面, 不是以未来将要收到的平均现金流为担保发行债务, 公司可以发行特殊类型的债券, 这些债券只以应收款项的高等级部分为担保. 很显然, 这样的应收款项的违约概率相对较小, 而且这使得债券具有较小的违约概率, 筹资成本将显著降低. 公司因此把未来将要收到的现金流中的某一部分证券化了. 换句话说, 证券化可以被看作是发行高于公司等级债务来筹集资金的一种方式. 它也是重新打包不同现金流的一种方法.

对此类金融工程中关键的问题是什么呢? 本质上, 是要分析不同的现金流并做出合适的选择, 从而获得最优的组合, 然后通过特殊类型的债券卖给投资者.

但是, 除去金融工程方面问题外, 证券化还包括: (1) 法律的考虑; (2) 资产负债表的考虑; (3) 税收的考虑. 证券化是为操作筹资的一种方式. 公司不是通过卖出债券或获得银行的服务, 而是通过发行资产来担保证券. 证券化的选择帮助公司和银行在不同的筹资选择中做出决策.

### 17.4.1　选择现金流

考虑图 17-7. 这里给出了预计未来有三种不同 (随机) 现金流的一个银行. 应该支付这些现金流的机构具有不同的信用等级. 例如, 第一种系列的现金流, 等级为 BBB, 可能代表信用卡支付. 而第三种能够代表由过去所做的抵押而产生的随机现金流. 可以论证, 人们对适时的抵押支付给予的注意要比对无担保的信用卡收入的适时支付给予更多的注意. 信用卡违约比抵押逾期更加普遍且看似有理得多. 因此, 抵押现金流将被评为较高的等级, 例如, 图 17-7 所示其具有 A 等级.

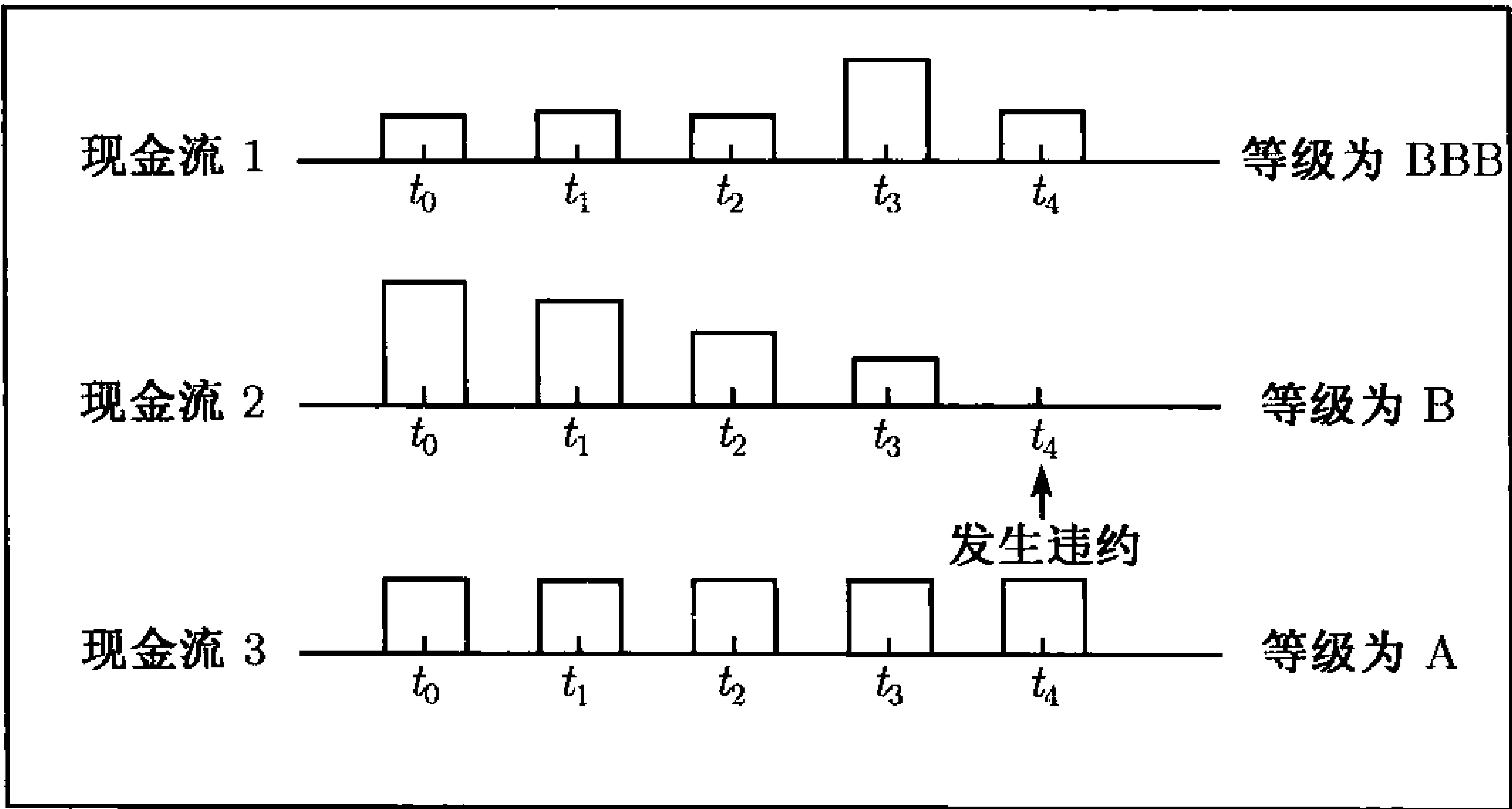



图　17-7

现在如果规定一个公司只接受这三种现金流, 假设债务相似, 那么公司的平均等级将可能在 BBB+ 附近. 这个公司发行的公司债券将具有 BBB+ 的信用利差.

考虑包装同一现金流的两种不同方式. 如果公司 “卖出” 现金流 3, 并且只用这个现金流为债券发行作担保, 则违约概率将小得多, 而且能以一个较低比率担保. 由现金流 1 和现金流 3 担保的债券具有较低的信用等级, 但是融资成本仍然低于一般发行债券发行的成本. 第二种选择的融资成本稍高一些, 但是同时可以借入更多的资金, 因为在此选择下应收款更多.

### 17.4.2　关键步骤: 证券化现金流

证券化的思想相当简单. 并不像公司卖出一个普通附息债券时所发生的那样,

以公司应收款项的平均质量为担保借入资金, 实体决定运用应收款项的一个高质量子集为担保来借入资金. 在违约的情形下, 这些应收款项被收回 (补偿) 的可能性比较高, 因此这些资金的成本将比较低.

但是存在着一个关键的步骤. 资产担保证券的买方如何确保应该用于担保这个证券的应收款项, 而不会被公司用于其他目的, 特别是在破产的情形下, 公司是否会用这些应收款项来补偿损失呢?

问题确实存在. 因为在发行资产担保证券 (ABS) 后, 仍然是原始公司在处理新的应收款项 (例如通过发行新的抵押) 的事务以及由这样现金流所产生的现金收入, 然后在公司的日常事务中运用它们. 很显然, 必须有额外的机制来保证违约发生时至少有部分现金流不被挪用.

一个*破产隔离*的 SPV 就是这样一种机制, 它在实际中相当频繁地被用来解决这类问题. 想法如下: (1) 发行公司形成一个特殊的目的机构 (SPV), 它也是一个壳公司, 通常与其母公司独立, 它的唯一目的是在构造 ABS 中作为一个*媒介*; (2) 采取步骤使得 SPV 是*破产隔离的*, 这就是说, SPV 本身违约的概率为 0(因为除去发行债券外, 它并不参加任何有意义的经济活动), 并且在原始公司破产的情形下, 隐含现金流仍然在 SPV 的手中; (3) 发行公司签署所有必要的文件, 使得至少从法律角度来看, 现金流是卖给了 SPV. *在法律上*这是一个*真实的卖出*.[①]

上述想法是要将这些现金流的权利转移出去, 并且尽可能地保证它们在资产担保证券 (ABS) 项下[②]. 实际上, 若干具有不同目的的 SPV 可以分层次来确保资产担保证券 (ABS) 具有想要的性质.

(1) 可能因税收原因而需要 SPV.

(2) 可能由于资产负债表原因而需要 SPV.

(3) 为了符合规定而需要 SPV.

因此, 一个可能的结构如图 17-8 所示进行分层. 注意到在这里, 第一个 SPV 是公司的一个子公司, 所以公司可以 "买入" 现金流, 并且这也是它存在的原因. 但是如果这个 SPV 保持着现金流, 那么这些现金流仍然在原始公司的资产负债表上.

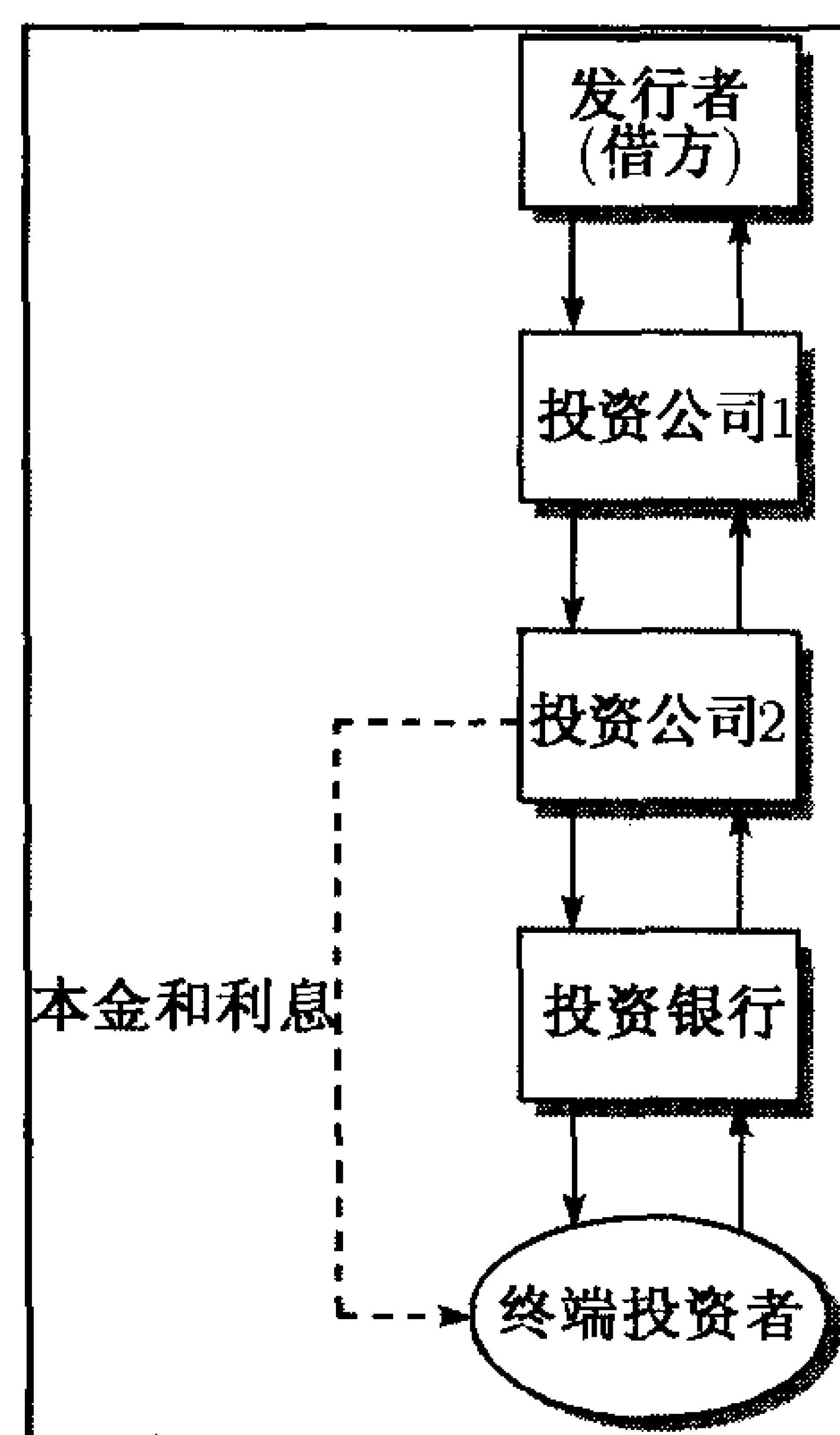



图 17-8

最后, 注意到投资银行所发挥的作用. 前三层构成了资产担保证券的结构, 而且投资银行仍然需要处理 ABS 的原始出售. 结构清楚地说明了 ABS 具有

① 这点可以由一个有名望的律师所给出的证书来证实.

② 但是, 这类破产隔离 SPV 的存在并不能完全保证存在可用的现金流. 破产有时是一个混乱的事件, 它涉及困难的法律问题.

三个重要的目的, 即降低融资成本、管理资产负债表以及处理税收和会计限制.

### 17.4.3 一些比较

证券化的第一个应用涉及到已经讨论过的*融资成本*. 证券化是融资的一种形式. 但是我们必须补充说明它也是一种不受限制的融资方式, 对于小型和中型公司来说, 它是在*资产负债表*之外的流动性. 最后, 它是一种可分散化的融资来源. 以这种方式, 它能够降低杠杆作用. 证券化也隐含着较少的公共暴露.

证券化既不是有担保的公司融资, 也不是资产的出售. 它是两者的一个混合以及一个组合, 它运用了普遍接受的且已经存在的法律的、管理的、税收的和会计的概念.

1. *贷款出售*

我们应该比较一下整体贷款出售与证券化. 证券化是建立在服务保留基础上的, 而贷款出售是服务释放. 贷款的买方想要亲自为贷款服务.

第二点, 信用和预缴风险的保持力. 在贷款出售中, 这些风险 100% 被转移出去. 通过证券化, 这些风险中的一些可能被保留了.

第三点, 贷款出售通常带有费用, 而证券化发行通常在面值附近.

第四点, 时间选择问题. 在证券化中, 资产中的现金流通常投资于短期投资品上然后转移给债券持有者. 因此, 投资者收到支付要比*服务者*晚一些. 最后, 证券化有时使用信用增强, 这将使得合约更具流动性.

2. *有担保借出*

证券化与有担保的融资类似, 只有一个重要的区别. 在一个资产担保证券中, 发行公司不对资产担保证券负责. 就好像公司并没有真正地 “借入” 资金. 需要建立一个单独的法人实体来进行借入. 证券化的构造使得这个实体变为资产的法定所有者. 如果公司违约了, 现金流将不再属于公司, 而是属于 SPV. 通过这种方式, 债券的所有者在证券化情形下具有了*所有者权益*, 而在有担保借出的情形下, 他们只有担保物权益.

## 17.5 结 论

权益工具的金融工程学遵循的原则与前面章节中介绍的原则相同. 但是, 估价可能需要更加严格的假设, 就像在资本资产定价模型 (CAPM) 中所说明的那样. 本章也介绍了一些基本的权益和证券化产品.

## 参 考 文 献

*本章提供了混合权益产品的一个简要介绍. 读者可能想要以两种方式把讨论*

探究到底. 首先, 需要关于这些产品的更多细节. 若干书中涉及了混合权益工具的目前状态. Das(2000) 是一个例子. 读者也可能想要更多地了解有关混合权益工具的定价, 对冲和风险管理的技术性问题. Kat(2000) 讨论了一些相关的问题. 证券化的其他例子可以在 Fabozzi(1998) 中找到.

## 习　题

仔细阅读下面的文章并回答随后的问题.

**不确定的逆可转换债券**

*以里拉命名的逆可转换债券的发行由于在意大利法律下税收不断增长的不确定性而被停止. 意大利权威人士关注到, 投资者可能由于相信这些工具是资本保护的固定收益工具而购买它们, 而实际上它们也会暴露在股票下跌的风险中.*

*根据权证市场的参与者所说, 大约在一个月前意大利银行警告以里拉命名的逆可转换债券的潜在发行者, 这些工具可能被划为"反常证券". 如果按这种分类, 证券的息票将以 27% 的比率征税, 而不是按照正常的固定收益和衍生结构所使用 12.5% 的比率. 自从那时起, 里拉逆可转换债券的发行就逐渐减少, 因为构造者在等待与它们有关的决定.*

*市场评论员说意大利银行非常关注此结构中缺少本金保护. 逆可转换债券通过加入股票看跌期权的空头寸使得产生的收益远远高于普通债券的收益.*

*只要特定权益的价格在到期日高于一个指定水平, 投资者就可收到一个高息票和正常的债券赎回. 但是, 如果权益跌到这个指定水平之下, 那么投资者会被迫接受股票实物而不是正常的债券本金.*

*结果是, 逆可转换债券的买方最后可能获得低水平的股票多头寸, 这可能意味着初始本金的贬值. 相反, 普通债券合约的买方能确保拿回初始的本金投资.* (IFR, 1998 年 5 月)

(a) 运用现金流图表示出将逆可转换债券分解为一个风险债券和一个期权.

(b) 这里需要哪种类型的期权? 这能解释出为什么逆可转换债券的收益比一般的要高吗?

(c) 在逆可转换债券中为什么没有本金保护?

(d) 在有风险债券中是否有本金保护? 为什么会这样? 逆可转换债券在什么意义下不同?

## 案例研究

### 波动率交易

#### *对可转换债券和逆可转换债券的应用*

本案例给出了波动率交易的另一个例子. 我们试图同时达到两个目的.

一个目的是定义、量度和定价波动率. 为了做到这点, 最好从某些特殊产品出发. 因此, 在这个案例中我们选择了*可转换*债券和*逆可转换*债券, 它们本身就是一个重要的资产类别.

通过操作这些工具, 我们想要实现第二个目的, 即提供有关金融工程师如何使用公司金融知识的例子.

下面的材料应该按给定顺序阅读. 它们都来自于 IFR 的不同论题, 并且提供了使用波动率交易的最新例子. 但这里并没有给出更加先进的工具.

## 问题

(1) 让我们简要考虑一下波动率的一些模型. 例如, 波动率的均值回归模型是什么? 还有其他模型吗? 试给出简要的讨论.

(2) 可转换债券是什么? 如何分解这个工具? 一个公司财务人员如何使用可转换债券?

(3) 给出最近在欧洲发行的可转换债券的一个例子. 讨论其主要参数. 转换成本是什么? 稀释效应是什么?

(4) 逆可转换债券是什么? 你如何分解这个工具? 一个公司财务人员如何使用逆可转换债券?

(5) 市场专家如何使用逆可转换债券? 为什么有 "洪水"(flood)?

(6) 合成可转换债券是什么?

(7) 在原文中提到的其他解是什么? 在这个解背后的可能风险是什么?

(8) 最后是关于管理者. 考虑法国管理者和逆可转换债券的情形. 为什么管理者对这些产品有争论? 你认为这可以被证明吗? 简要地讨论一下.

## 材料 1

抛售活动的重新开始是由 1998 年前 5 个月内长期隐含波动率的急剧增长引发的. 在去年整个 11 月和 12 月里显著下跌后, 3 年期波动率指数水平自 1 月份起开始平稳增长.

这个趋势反映出隐含波动率在去年经历的变化. 隐含波动率水平在 1997 年首次使用, 是由担保权益资金市场的波动所驱使的. 基金的管理者从银行中买入长期的期权来对冲包含在零售商品中的担保. 由于缺乏长期波动率的非自然卖家, 还有波动率的一个短期挤压迅速发展, 从而推动比率的上升.

市场专家在上周声称短期挤压是恶性循环的一个结果. 抛售期权空头寸的银行将波动率推得更高, 反过来促使其他机构也抛售自己的头寸. "这是链式反应的结果. 我认为大部分专家是相当关注的." 在伦敦交易期权衍生品的一位负责人这样说.

虽然在波动率挤压的严重性上看法一致, 但是市场专家在它的成因与解决上却存在分歧. 一些专家断言银行的风险控制者通过制定更加严格的风险限制使得波动率挤压恶化. "这是会计师无论发生什么都固执己见的一个典型例子. 这是一个不会持续的特殊情况, 他们应该考虑到这点." 有人这样说.

历史难道会胡言乱语吗?

专家也指出了他们认为最终能减轻需求/供给不平衡的因素. 若干市场参与者说他们认为高波动率只是暂时现象. 他们指出波动率是均值回归的, 并且隐含波动率将很快降到 (低得多的) 历史水平.

对波动率两种看法之间的差异存在于有关市场发展的相互矛盾的看法中间. 隐含波动率是通过往期权模型中代入期权现价计算得出的, 对于波动率的供给和需求函数也是这样. 相反, 历史的波动率则是从以往的权益市场波动中计算得出的. 3 年的 FTSE100 历史波动率水平大约为 11%.

在历史水平和隐含波动率之间裂开的缺口已经为非传统的波动率供应者创造了交易机会. 当交易商仍保持自然的空头寸时, 其他交易公司已经有了更加灵活的操作波动率的方式. 对冲基金已经试图卖出长期波动率, 因为它们认为隐含波动率将跌至历史水平.

权益衍生品专家断言较低的参与率是隐含波动率增长的一个直接结果. 担保产品是权益多头寸的一个混合体——通常通过一个或更多个期货合约——以及一个提供可能的损失下限的期权来达到. 如果该下限比较高, 提供给这个担保产品买方的上限将减少以降低产品的总成本.

据一些市场专家说, 新的较低的参与率是波动率挤压的结果, 它仍会继续这样. "我认为参与率将降低, 从而降低波动率需求. 这只是市场在寻找均衡." 一个权益衍生品市场交易商这样说. (IFR, 1998 年 6 月)

## 材料 2

逆可转换债券活动上周剧增至新的高度, 原因是欧洲和股票市场持续的股票指数高波动率引起了不安. 股权证方面的专家高度关注涉足这类证券的结构性银行的数量逐渐增加, 以及其货币范围的扩大.

他们说, 这些因素就是这些产品在整个工业中获得不断认同的证据. 自从今年初以来, 欧洲的股票指数波动率一直在二十几个百分点的较高水平.

为了解释在需求上的突然增加, 权益衍生品方面的专家说逆可转换债券是利用整个欧洲目前高波动率的一个理想方式. 其他人说产品中的利益正在向整个欧洲扩展, 而它之前只限于瑞士和德国. "已经是一场洪水了, 而且它已遍及各处, " 一个德国银行衍生品官员激动地说.

逆可转换债券是包含一个看跌期权的信用产品, 这个看跌期权是关于 1 单位特定报价的公司股票的. 债券的面值贴现后的价值等于期权费. 如果股价突破了某个最小限制, 债券投资者收到股票而不是现金.

里昂纳信用权益衍生品部是该活动的中心, 它创造了 3 桩交易. 大众汽车被选为支付 10% 息票的发行标的. 意大利电通被选为支付 11%息票的发行参考股票, ABN AMRO 是第 3 个参考物.

如果最后日期股价高于或等于初始价格的 95%, 那么投资者将得到 100%的现金赎回. 但如果价格低于此的话, 投资者收到的则是实物. (IFR, 1998 年 6 月)

# 第 18 章　一个重要应用: 互换期权和按揭贷款

## 18.1　引　　言

互换期货市场同互换市场一样都是世界上面值最大的市场, 也是流动性最强的市场之一. 其中的原因是什么呢?

互换有很多用途. 借款人要套取信用利差, 借进成本最低的货币, 这通常意味着要借进自己不需要的货币. 因此, 必须将借入的货币转换为需要的货币. 理论上, 这样的操作可以通过一个货币互换来完成, 在这种互换中不同货币的浮动利率可以互相交换. 虽然在第 5 章中我们所讨论的货币互换不是利率互换, 但这项操作中还涉及到了普通利率互换, 这是因为大多数发行者都愿意*支付*长期的固定息票, 所以在货币类型转换的这个过程中要求: 首先, 将固定的息票支付换为同种货币的浮动支付; 然后, 通过货币互换, 将前面得到的浮动利率现金流换为所需要的货币类型的现金流. 一旦对需要的货币建立起了浮动利率支付, 就可以通过一个利率互换将浮动利率支付转换为同种货币的固定支付. 因此, 一个新的发行需要用到两个两种不同货币类型的普通利率互换和一个普通的货币互换. 所以, 新债券的发行是普通利率互换流动性的来源之一.

利率敞口的资产负债表管理是互换高流动性的另一个原因. 金融机构资产和负债的利率敞口可以通过利率互换和互换期权来调整. 如果以浮动利率得到一笔贷款, 然后以固定利率将此贷款借出, 这时我们可以通过缔结一个利率互换来有效地管理其中的敞口.

然而, 互换市场的这些用途也适用于*按揭贷款支持活动*. 事实上绝大多数互换期权交易和大部分普通互换交易都是在按揭贷款支持金融策略的要求中产生的. 按揭贷款有提前偿还的条款, 它给银行的固定收入组合带来了凸性. 这个凸性可以利用互换期权来对冲, 因而会在互换期权市场中创造流动性; 另一方面, 互换期权的头寸需要动态地进行对冲, 这种对冲可以通过将远期互换作为标的, 这样就产生了进一步的互换交易. 而按揭贷款市场非常巨大, 因此有些时候, 这种活动可能会主导互换市场和互换期权市场.

本章将按揭贷款作为例子来研究互换期权的金融工程, 并简单介绍*互换测度*. 互换测度在第 11 章中曾介绍过, 并曾出现在第 12 章和第 13 章中详细讨论过的测度变换方法的例子中. 除此之外, 本章还提供了另一个例子, 它将用到本书中介绍

过的绝大多数工具. 作为开始, 我们首先介绍关于按揭贷款的一些基本知识.

## 18.2 按揭贷款市场

按揭贷款银行家 (mortgage banker) 和商业银行通过把原始资金放贷给住房购买者发起按揭贷款, 他们的这些活动构成了初级按揭市场. 初级市场的放款人是抵押银行、储蓄机构、商业银行以及信用联合体.

然后, 这些放款人将相类似的按揭贷款分组、打包卖给房利美 (Fannie Mae) 或者房地美 (Freddie Mac) 这类联邦机构 (agency), 这就是二级市场的一部分. 二级市场还包括了养老金基金、保险公司以及证券交易商.

联邦机构至少可以通过两种途径购买按揭贷款: 第一, 他们为按揭贷款支付"现金", 然后将它们保留在账簿上[①]; 第二, 发行按揭支持证券 (MBS) 来交换从放款人那里得到的按揭贷款池. 放款人要么持有这些 MBS, 要么将其出售给投资者. 将按揭贷款转化为 MBS 后, 所购买的按揭贷款就被证券化了. 联邦机构保证本金和利息的支付, 因此它们对这些发行机构要承担 "信用风险"[②]. 下面将讨论按揭贷款交易的金融工程及其所产生的头寸, 和往常一样, 我们使用的是一个高度简化了的模型.

### 18.2.1 一个典型的按揭贷款的运转过程

从住房购买活动到对冲互换期权是一个很长的过程, 在此之前最好先说明一下初级抵押市场和二级抵押市场的机制. 从其所隐含的现金流图中, 我们将最终将得到一个互换期权头寸. 本小节的目的是标示出这个过程中所生成的现金流序列. 我们将看到, 提前还款的权利等同于一个互换期权的空头头寸. 这是从持有这个按揭贷款并用直接固定利率贷款融资的金融机构的角度来看的. 本质上, 这个机构卖出了一个固定支付互换的美式看涨期权, 当未来按揭贷款利率下降到一个确定的水平时[③], 这个期权将被执行.

购买住房、发行按揭贷款以及联邦机构的活动之间的相互联系如图 18-1 至图 18-3 所示. 一步一步地向前并把所有的头寸放在图 18-4 中就得到了按揭贷款池联合头寸. 不过我们将选择这样一种讨论方式: 先从一种较简单的情况入手, 然后将其一般化. 有些一般化是直接的, 而有些则涉及到了许多其他的问题.

我们考虑以下的步骤. 一个气球按揭贷款在 $t_0$ 时发行, 按揭贷款的持有者仅

① 借出机构然后使用该现金作进一步抵押贷款.

② 这些联邦机构可以直接从财政部借款, 在市场中有这样一种理解, 就是这些是联邦机构具有隐含的政府担保.

③ 但是, 多头这个期权的一方并不是一个金融机构, 而且可能不会在正确的时候以最优的方式执行这个美式期权. 这样的话, 就使得定价问题更加复杂了.

支付利息, 并在到期日偿还本金. 按揭贷款的本金是 $N$, 利率为 $c_{t_0}$, 并且在按揭贷款到期日为 $t_4$, 时间单位为年.① 需要强调的是, 对于这样的一个气球按揭贷款, 定期支付的仅仅是利息, 没有本金的摊销, 这将简化金融工程的过程, 并允许我们使用普通利率互换期权.

如果住房购买者在按揭贷款的有效期内没有提前还款的话, 他将进行 4 次利息支付, 然后在时间 $t_4$ 支付本金 $N$. 此外如果按揭贷款利率下降到某一个门槛水平值时, 该住房购买者选择再融资. 我们假设他只能在时间 $t_2$ 提前还款, 当这笔贷款在 $t_2$ 还清时, 它将被一个新的、利率更低的两期按揭贷款所代替.② 这种情形如图 18-1 所示.

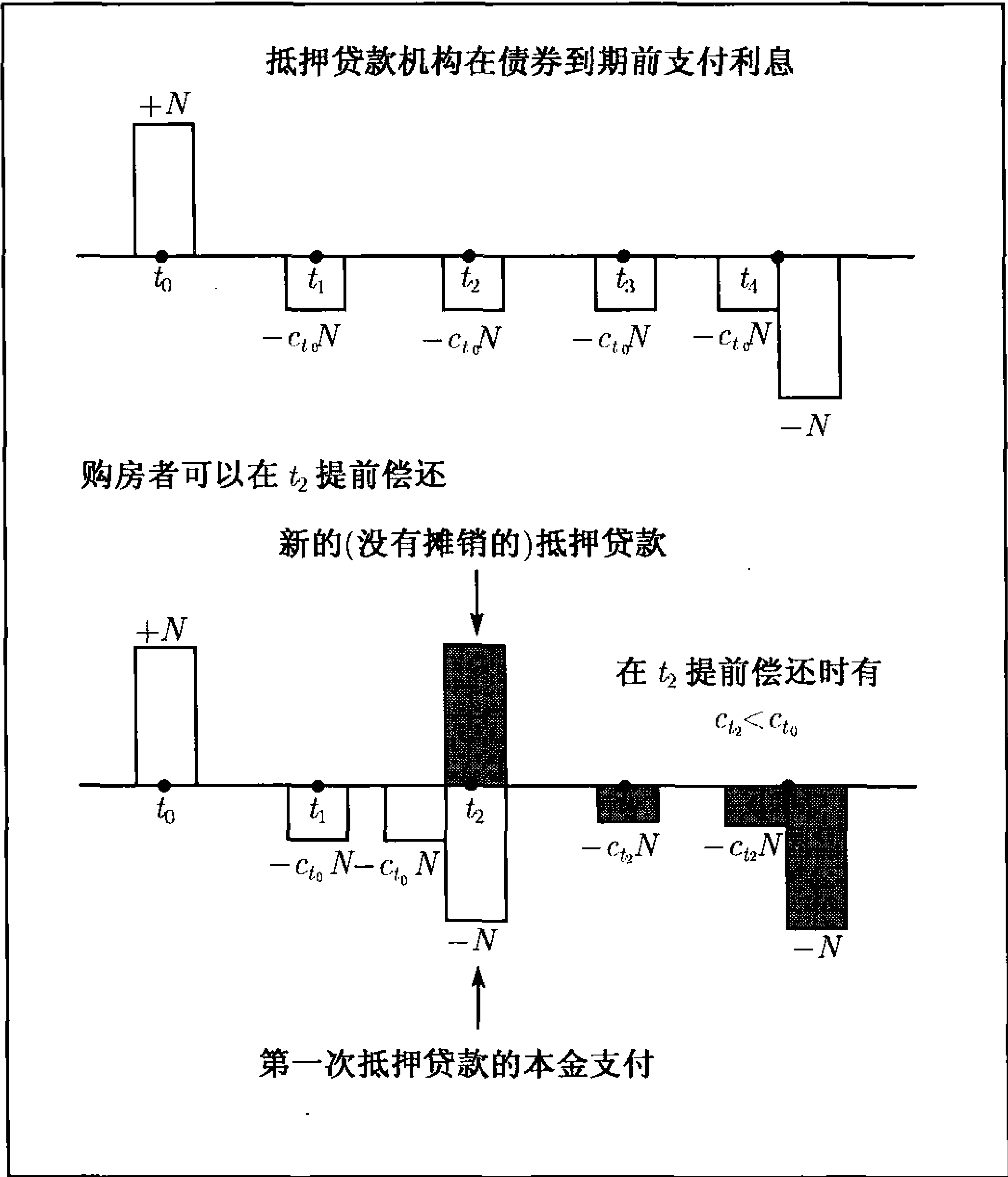



图　18-1

银行以浮动 Libor 利率 $L_{t_i}$ 借入资金, 然后以固定利率 $c_{t_0}$ 将这些钱贷出去. 该按揭贷款然后被卖给房利美这样的机构或者其他的抵押商, 这种情形中银行只是

① 当然, 按揭贷款的支付通常是每月一次. 但这样可以假设简化记号, 一般化是很容易的.

② 事实上, 提前还款期权在未来任意时间都可执行, 因此, 提前还款时间是随机的.

一个中介, 它赚取一定的抵押服务费用.

有趣的是最后获得按揭贷款机构的头寸, 该机构将买进的按揭贷款记入它的账簿, 成为其资产负债表中的资产. 问题是二级市场中这种购买活动是如何融资的, 在实际中这种融资方式不止一种. 一些按揭贷款是通过向投资者发行**机构证券**融资购买后被保持在账簿上; 而另外一些按揭贷款则被打包成按揭贷款支持证券 (MBS) 并且重新卖给终端投资者.

假设在我们所考虑的情形中, 联邦机构使用一个 4 年期, 利率为 $c_{t_0}$ 的**固定息票票据**来融资, 则该机构的负债如图 18-2 所示, 资产表示在图的底部. 现在关键的问题是**提前还款**. 根据图 18-2b, 机构所面临的提前还款风险只可能发生在时间 $t_2$.[①]

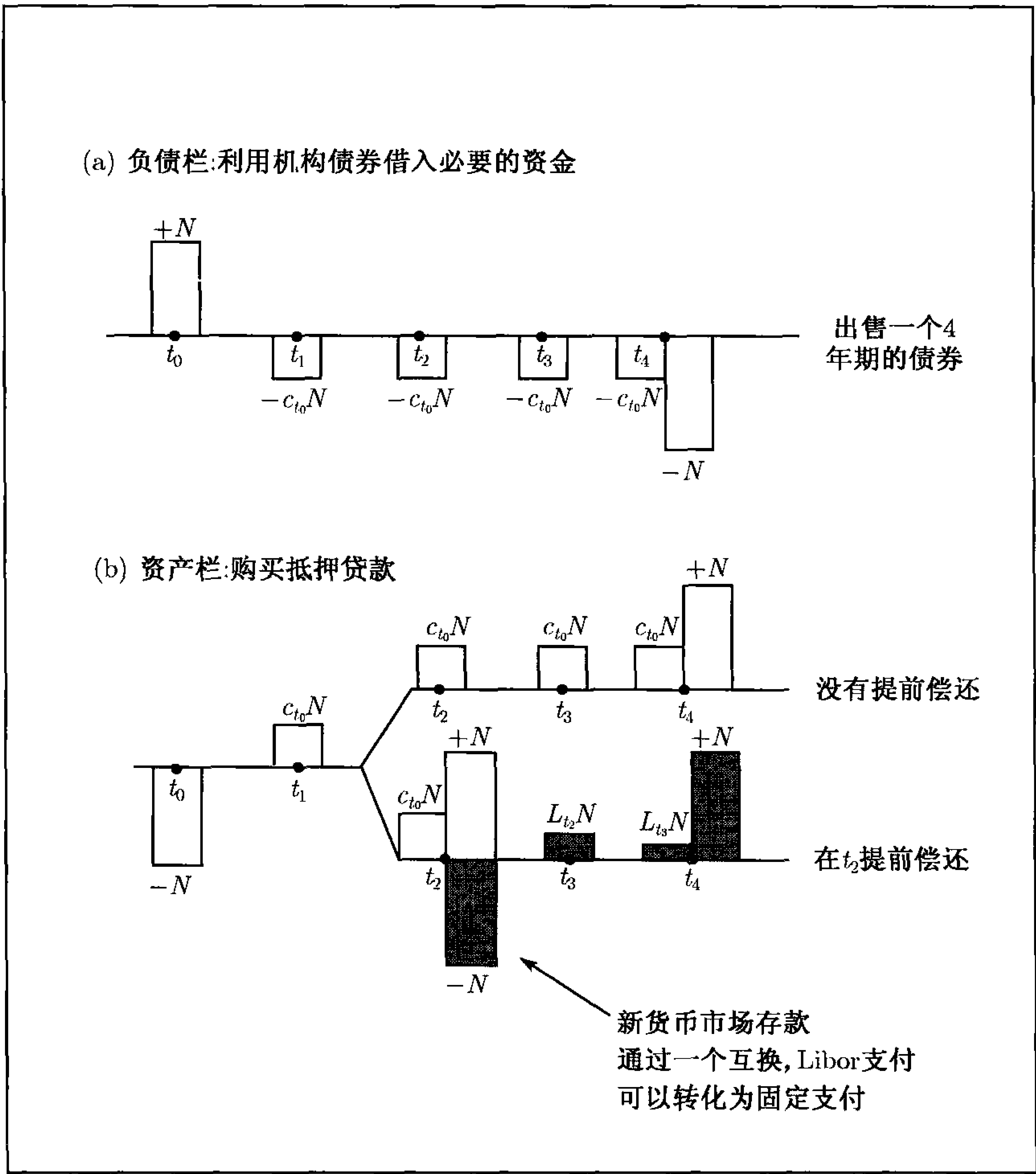



图 18-2

① 根据我们的简化假设, 住房购买者只能在时间 $t_2$ 提前还款.

如果购房者不选择再融资, 则联邦机构得到 4 次金额分别为 $c_{t_0}N$ 的利息支付, 最后在时间 $t_4$ 得到本金的偿还, 这里我们假设了该购房者不会违约;[①]另一方面, 如果住房购买者在时间 $t_2$ 支付 "最后" 一笔利息 $c_{t_0}N$, 提前偿还了本金, 那么联邦机构会将提前还款的这些资金投资于浮动利率的货币市场账户直到时间 $t_4$, 这个浮动利率就是 $L_{t_i}$. 另外, 联邦机构也可以签订一个互换, 从时间 $t_3$ 开始得到互换利率. 这个互换利率用 $s_{t_2}$ 表示. 这样就解释了如果住房购买者提前还款时的现金流.

将联邦机构的资产和债务头寸一起放在图 18-3 中. 我们看到, 除了提前偿还的现金流外, 其他的都抵消掉了. 图 18-3 表示如果购房者提前还款的话, 联邦机构将会买进一个固定收入远期互换, 互换的利率为 $c_{t_0}$. 如果没有提前还款的发生, 联邦机构的头寸是平直的.

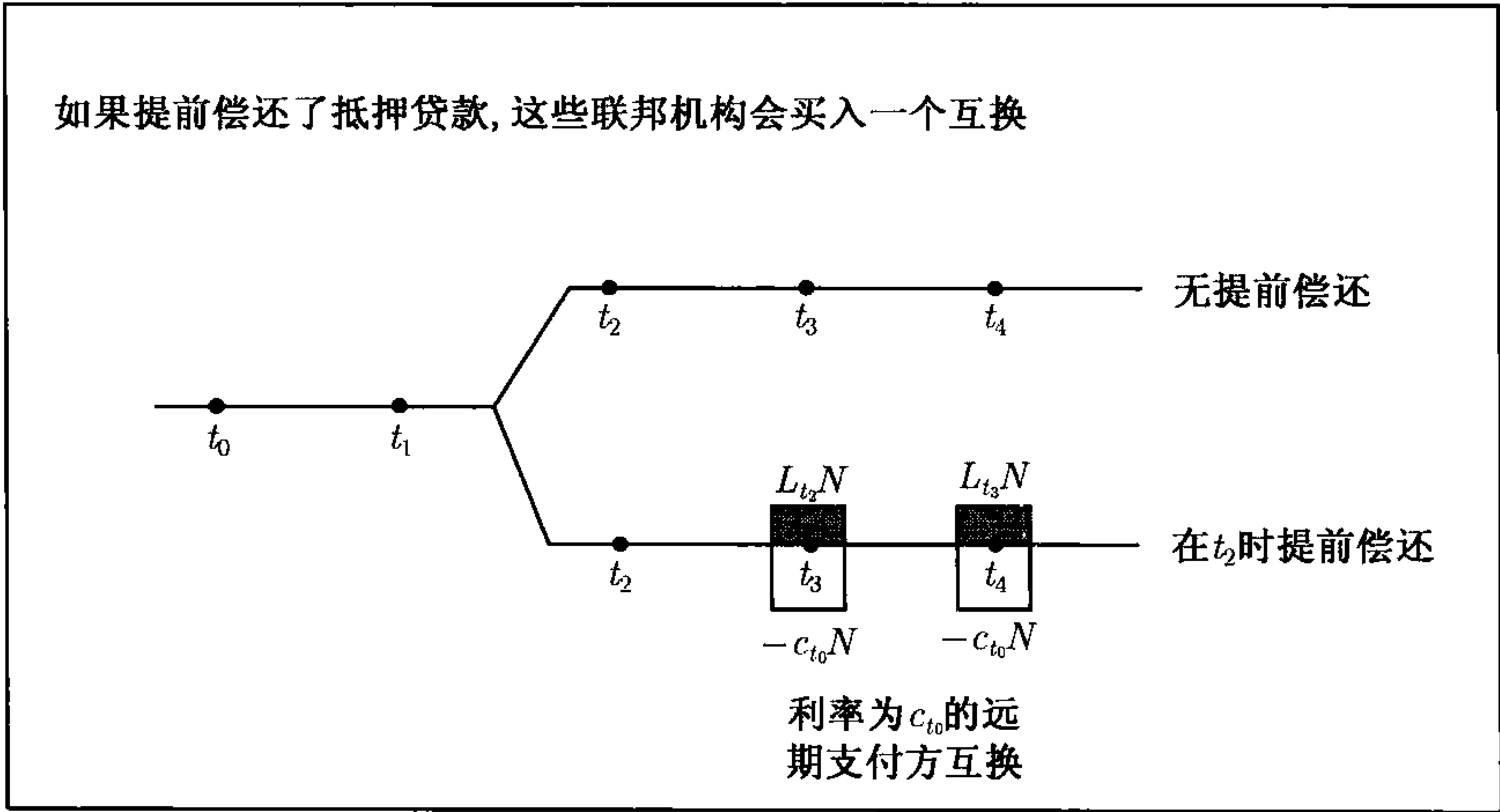



图　18-3

为了简化问题, 不失一般性假设互换利率和按揭贷款利率对所有时间 $t$ 都相等:

$$c_t = s_t. \tag{1}$$

这时, 联邦机构最终的头寸相当于下面的合约.

联邦机构将以预定利率 $c_{t_0}$ 缔结一个固定收入互换的权利卖给对手方. 这个互换的名义本金是 $N$, 期权是欧式的,[②] 交割日为时间 $t_2$, 标的现金互换的期限是 2 年. 该联邦机构将卖出这个期权, 如果期权被执行的话, 它就是固定支付方.

这样的一个合约就是一个互换期权. 联邦机构在卖出一个互换合约的期权的

① 一般来说, 所有的违约风险均由联邦机构承担.

② 由于我们假设购房者只允许在时间 $t_2$ 提前还款, 因此期权是欧式的. 实际上, 住房购买者可以在按揭贷款久期之内的任意时间提前还款, 因此期权实际上是百慕大期权.

同时就卖空了凸性. 购房者是对手方, 也将是凸性多头方. 如果 $s_{t_2} \leqslant c_{t_0}$, 该期权将被执行. 期权的权利金是 $Sw_{t_0}$,[1]它在时间 $t_0$ 支付.[2] 显然, 上面我们忽略了交易费用.

### 18.2.2 头寸的对冲

前几节中的关键问题是联邦机构最终要面临提前还款的风险, 这产生了一个互换期权的空头头寸. 有几种方法可以用来对冲此欧式互换期权头寸, 其中一种是直接动态对冲. 对冲者需要: (1) 首先计算这个互换期权的 delta; (2) 买入 delta 单位从 $t_2$ 开始的 2 年期远期固定收入互换.[3]

在这些步骤之后, 联邦机构将得到一个空头凸性头寸, 这个头寸还是一个波动率空头头寸. 如果波动率增加, 机构将会遭受损失. 为了消除这种风险, 机构将必须从市场上买入凸性. 对冲这个互换期权空头的另一种方法是发行可赎回债券, 并从投资者那里直接买入凸性.

**例**

*房利美可赎回基准票据的面值至少达到了 5 亿美元, 最低有 1 亿美元是重新挂牌的. 每个月至少有一次发行, 发行的结构有 4 种: 5 年期 2 年内不可赎回 (a five-year, non-call two); 5 年期 3 年内不可赎回; 10 年期 3 年内不可赎回; 以及 10 年期 5 年内不可赎回. 这种发行的数量和模式有望抑制波动率.*

*机构总是需要波动率, 它们传统上由银行提供. 但是随着可赎回基准发行计划的出现, 机构已开始转向从机构投资者那里获取所需求的波动率了.*

最后, 消除互换期权空头头寸的另一种方法是: 机构从市场中买入一个类似的互换期权.

### 18.2.3 模型的假设

到目前为止所进行的讨论都做了某些简化假设, 这些假设有些可以放松; 然而, 有些假设所起的作用却是本质的, 我们将它们列举如下.

(1) 假设购房者只能在时间 $t_2$ 融资. 这导致互换期权是欧式的. 通常, 购房者可以在时间 $t_1, t_2$ 和 $t_3$ 的任意时刻进行再融资, 这样将使问题极大地复杂化. 我们可以进行类似的现金流分析, 但是标的互换期权将是百慕大期权了, 期权可能的交割时间为 $t_1, t_2$ 或 $t_3$, 交割日期的选择由购房者决定, 这不是一个平凡的扩展. 由于百慕大期权没有显示的定价公式, 对它们的定价需要更高级的技巧, 利率波动率微笑的存在也会使事情进一步复杂化.

---

① 我们这里忽略了按揭贷款, 互换利率以及房利美的债务资本成本之间的差别.

② 比如, 在美国市场上, 这可以在按揭贷款的开始期间以 "点" 百慕大的形式支付.

③ 记住, 按照惯例, 买入一个互换意味着支付固定利率, 所以这里的定价等价于出售一个互换.

(2) 假设不存在信用风险. 在讨论的模型中, 购房者或联邦机构的违约概率为 0, 此假设可以很容易地放宽. 质押资产, 从而贷款的回收值很有可能等于 $N$, 甚至超过 $N$.

(3) 假设按揭贷款是气球贷款. 通常, 按揭贷款在一个固定的期限内分期偿还, 比如说 15 年或 30 年. 这样就改变了图 18-1 至图 18-3 中现金流的结构, 这个假设可以通过用摊销互换 (amortizing swap) 替代标准的普通互换得以放宽. 这时在金融工程中会出现一些非常有意思的问题, 这里我们不作讨论.

最后, 还有交易成本、费用、到期日以及交割期间的指定等问题. 它们是相对次要的, 不会改变讨论问题的本质.

### 18.2.4　两个风险

根据前面的讨论, 与提前还款有关的风险有两个. 一个是银行或发行机构需要买入一个支付方互换以防发生提前还款. 这样一来, 机构将在初始按揭贷款的剩余期限内支付固定利率 $c_{t_0}$, 这个 $c_{t_0}$ 将大于当前的固定收入互换的利率.[①] 因此在初始按揭贷款的剩余寿命内, 该机构将面临值为 $s_\tau - c_{t_0}$ 的负成本, 其中 $\tau$ 是提前还款时间, 它是一个随机变量.

第二个风险更复杂. 联邦机构不知道提前还款会在什么时候发生. 这意味着当购买按揭贷款时, 联邦机构不得不估计这个按揭贷款的期望到期日, 然后, 根据这个期望到期日出售固定到期日的票据. 这时, 虽然所有负债都会有一个可料的久期, [②] 而资产的平均到期日却很难计算. 下面的例子表明这种问题有时会变得很严重.

**例**

正如在 9 月份发生的那样, 随着利率下跌后的上升, 按揭贷款使用者更容易受到提前赎回风险的冲击, 这种风险会导致他们的资产久期缩短. "华尔街的按揭贷款供给变得非常沉重, 因此出现了大量地买进波动率来对冲来自房地美和房利美的凸性风险," 一家固定收入衍生品商行的首席策略专家这样说道. 大量的再融资已经使得一些按揭贷款使用者遭受了不小的损失. 一个新泽西的套期保值基金宣布它们在 10 月底已经损失了大约 4 亿美元, 这家基金专门从事抵押证券. 分析家说, 这个基金没有充分地对冲掉利率上升的风险.

尽管一些人猜测对于房利美的久期的差距——也就是它的资产和负债的到期日之间的差距的批评, 会给投机商从房利美对冲中谋取获利的机会, 但是, 这并不是波动率上升的主要因素.

---

① 因为提前还款意味着利率已经下降, 固定利率互换利率已经移动到 $c_{t_0}$ 水平以下, 所以必将出现这种情况.

② 或者是平均到期日.

然而, 随着其按揭贷款组合的大幅上升, 房利美, 这个同样创建了自己的按揭贷款资产组合的机构正面临逐渐递增的扩展风险——由于收益率的增加和提前还款的减少而使得抵押资产的久期变长的风险.

房利美的名义衍生品敞口在 6 月末达到了 5 945 亿美元, 而房地美声称它们的衍生品敞口总计达到了 1.1 万亿美元.

按揭贷款交易所涉及的这两个风险中, 第一个是对冲凸性头寸的问题, 另一个则涉及到了隐含提前还款期权的美式化.

## 18.3 互换期权

按揭贷款组成了家庭直接或间接所有的最大的一类资产. 按揭贷款的总量与美国财政债务的总量相当. 大多数按揭贷款具有提前还款的条款, 这会导致大量的互换期权空头头寸. 因此, 百慕大互换期权成了一类主要的资产. 实际上, 具有提前还款条款的工具并非只有按揭贷款, 其在别的很多工具中也存在. 可赎回债券同样会产生依情况而定的远期互换头寸, 从而创造出类似的互换期权敞口, 它们可以通过在相关的互换期权市场中建立相反头寸得到完全对冲. 由于互换期权在金融市场中起着重要作用, 我们有必要研究一下互换期权的模型. 本节将讨论欧式互换期权. ①

一个互换期权可以被视为上限和下限的一般化. 上限选取一个Libor 浮动利率 $L_{t_i}$, 如果 $L_{t_i}$ 大于利率上限 $\kappa$, 则上限买方得到利率差额的补偿. 我们可以将它一般化: 选取一个 $n$ 期的浮动互换利率, 如果用 $s_{t_1}$ 表示这个互换利率在时间 $t_1$ 的值, 若 $s_{t_1}$ 大于固定的交割水平 $f_{t_0}=\kappa$, 则这个工具的买方将得到等于两者差额的支付. 在这种情况下, "标的利率" 和交割利率所覆盖的时间不止一个周期, 并且它们都是远期互换利率. 一个固定的支付互换期权可以看成一个上限的推广. 类似地, 一个固定收入互换期权可以视为一个下限的一般化.

我们更详细地分析这个问题. 考虑一个到期日为 $t_1$ 的欧式普通看涨期权. 该期权的标的是一个普通利率互换而不是股票或外汇. 期权的持有方有权利以制定的交割价格 "买入" 标的, 但是这个标的现在是一个互换. 换句话说, 期权持有方在时间 $t_1$ 有权利以指定的互换利率 $\kappa$ 缔结一个*支付互换*. 交割价格本身可以以互换利率或标的互换价值的形式规定.

设 $t_0$ 是交易时间, 为简单起见, 考虑一个两期的远期利率互换. 互换在时间 $t_1$ 开始, $t_0<t_1$, 并且交换的是 12 个月 Libor 利率 $L_{t_1}$ 和 $L_{t_2}$. 设这个远期固定支付

① 百慕大互换期权的定价和风险管理更加复杂, 在这里就不做讨论了. 相关的问题可以参考 Rebonato(2002).

互换在目前的互换利率为 $f_{t_0}$，即期互换利率 $s_{t_1}$ 将在时间 $t_1$ 观察到，但是远期互换利率是已知的.

互换期权的买方相当于购买了可以在时间 $t_1$ 缔结一个面值为 $N$、支付互换利率为 $f_{t_0}$ 的固定支付 (即期) 互换的权利. 如果交割价格 $\kappa$ 等于当时的 $t_1$ 互换的远期互换利率，则这个互换期权被称为 ATM 互换期权. 一个远期固定支付互换在时间 $t_0$ 签订，而远期互换利率 $f_{t_0}$ 在时间 $t_0$ 设定，互换将在时间 $t_1$ 开始. 相应的即期互换在时间 $t_1$ 签订，因此，互换利率 $s_{t_1}$ 在 $t_0$ 时未知.

ATM 互换期权涉及到下面的交易. 在时间 $t_1$ 没有现金支付，期权的权利金在 $t_0$ 时支付. 在时间 $t_1$，如果即期互换利率 $s_{t_1}$ 比交割利率 $f_{t_0}$ 高，互换期权的持有者将以前面设定的利率 $f_{t_0}$ 缔结一个固定支付互换. 如果在时间 $t_1$，即期互换利率 $s_{t_1}$ 比交割利率 $f_{t_0}$ 低，期权持有者就会选择从市场上买入一个新的互换. 因为这样做他的成本比执行期权的花费要少，互换期权没有进行交割而到期. 因此，如果忽略询价利差，并假设在时间 $t_1$ 有

$$f_{t_0} < s_{t_1}, \tag{2}$$

那么这个支付固定利率 $s_{t_1}$，并得到 12 个月 Libor 的 2 年期利率互换在 $t_1$ 时的价值为 0. 这就意味着在时间 $t_1$，互换期权持有者可以决定支付 $f_{t_0}$ 并得到 $s_{t_1}$. 因此它所产生的现金流在时间 $t_1$ 的价值可以表示为：[1]

$$\left[\frac{s_{t_1} - f_{t_0}}{(1 + L_{t_1})} + \frac{s_{t_1} - f_{t_0}}{(1 + L_{t_1})(1 + L_{t_2})}\right] N. \tag{3}$$

注意，在时间 $t_1$ 时 $L_{t_1}$ 是已知的，而 $L_{t_2}$ 仍是未知的. 但是，从前面的章节我们知道可以用在 $t_1$ 时已知的、$[t_2, t_3]$ 这段时间的远期利率来 "代替"$L_{t_2}$(随机变量). 远期利率 $F(t_1, t_2)$ 在远期测度 $\widetilde{P}^{t_3}$ 下是 $L_{t_2}$ 的无偏估计：

$$F(t_1, t_2) = E_{t_1}^{\widetilde{P}^{t_3}}[L_{t_2}]. \tag{4}$$

由此知以预定利率 $f_{t_0}$ 签订的互换在时间 $t_1$ 的价值为

$$\left[\frac{s_{t_1} - f_{t_0}}{(1 + L_{t_1})} + \frac{s_{t_1} - f_{t_0}}{(1 + L_{t_1})(1 + F(t_1, t_2))}\right] N. \tag{5}$$

如果互换期权到期时是平价的，即

① $\delta = 1$，因为我们假设交割的区间是 12 个月.

$$s_{t_1} = f_{t_0}, \tag{6}$$

则该价值为 0. 因此, 我们也可以将互换期权看成一个其标的是等式 (5) 中决定的现金流的期权. 因此一个关于固定支付互换的 ATM 互换期权既可以理解为一个标的是 (远期) 互换利率 $f_{t_0}$ 的期权, 也可以看成一个交割价为 $\kappa = 0$、标的是某个远期互换价值的期权.

**一个合约方程**

正如上限和下限的情形那样, 我们可以获得将互换期权和远期互换联系起来的合约方程:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{以利率 } f_{t_0} \text{ 远期} \\ \text{固定支付方互换}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{以交割价 k 的} \\ \text{支付方互换}\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{以交割价 k 的} \\ \text{接收方互换}\end{matrix}}. \tag{7}$$

可以这样来解释这个合约方程: 考虑一个远期支付互换, 利率为 $f_{t_0}$, 开始时间为 $t_1$, 并在时间 $t_{n+1}$ 结束. 远期互换在这段时间内有 $n$ 次交割, 支付 (接收) 以下的现金支付序列 (后付):

$$\{(f_{t_0} - L_{t_1})N\delta, \cdots, (f_{t_0} - L_{t_n})N\delta\}, \tag{8}$$

无论 $s_{t_1} > f_{t_0}$ 是否成立, 支付均发生.

另一方面, 一个支付方互换期权在 $s_{t_1} > f_{t_0}$ 时支付这些现金流. 为了 $s_{t_1} < f_{t_0}$ 时得到 (8) 式中的现金流, 必须买一个接收方互换期权.

## 18.4 互换期权的定价

互换期权的定价和风险管理可以从多个角度使用不同的工作测度来实现. 例如, 我们已经在第 5 章和第 13 章中所看到的, 一个开始于 $t_1$、结束于 $T$ 的远期互换的远期互换率将是远期利率 $F(t_0, t_i, t_{i+1})$ 的加权平均. 如果我们采用这种表示, 一个可行的*工作测度*是时间 $T$ 时的远期测度. 所有远期利率在这个测度下的鞅动态机理就能被确定了, 从而互换期权和其他各种互换衍生品可以利用它来定价.

我们也可以采用另外一种方法. 对于定价和风险管理方面的问题, 取*互换测度*作为工作测度会更方便些. 这就给了我们一个在相当简单情况下讨论这类十分有趣的工作测度的机会, 我们将利用互换测度得到欧式互换期权的定价函数.

### 18.4.1 互换测度

到目前为止我们所考虑的测度变换是通过某种单个资产价格进行正规化而得到的. 在有些情况下, 我们可能需要用一列支付的价值而不是单个资产价格进行正规化, 其中一种就是熟知的*互换测度*. 我们将在有限状态下讨论一个简单两期模型

中的**互换测度**. 这个模型与本章前面所讨论的时间以及现金流的结构相同. 首先, 我们来定义**年金**.

考虑一个每隔 $\delta$ 单位时间, 支付 $\delta$ 美元的合约, 支付的时间用 $t_i$ 表示,

$$t_i - t_{i-1} = \delta. \tag{9}$$

例如, $\delta$ 可以是 1/2, 即每 6 个月支付一次, 持续 $N$ 年. 这就是一个年金, 我们可以用它在时间 $t$ 的价值来对资产 $t$ 时间的价值进行规范化, 这一程序就产生了所谓的互换测度.

假设在时间 $t_2$ 世界的状态有有限多个, 分别用 $i = 1, 2, \cdots, n$ 来标示. 在此背景下, 假设一个年金开始于时间 $t_2$, 分别在时间 $t_3, t_4$ 支付 1 美元, 因此此时的 $\delta = 1$. 这种情形表示在图 18-4 中. 显然, 这里我们排除了任何信用风险, 假设这个年金是无违约风险的.

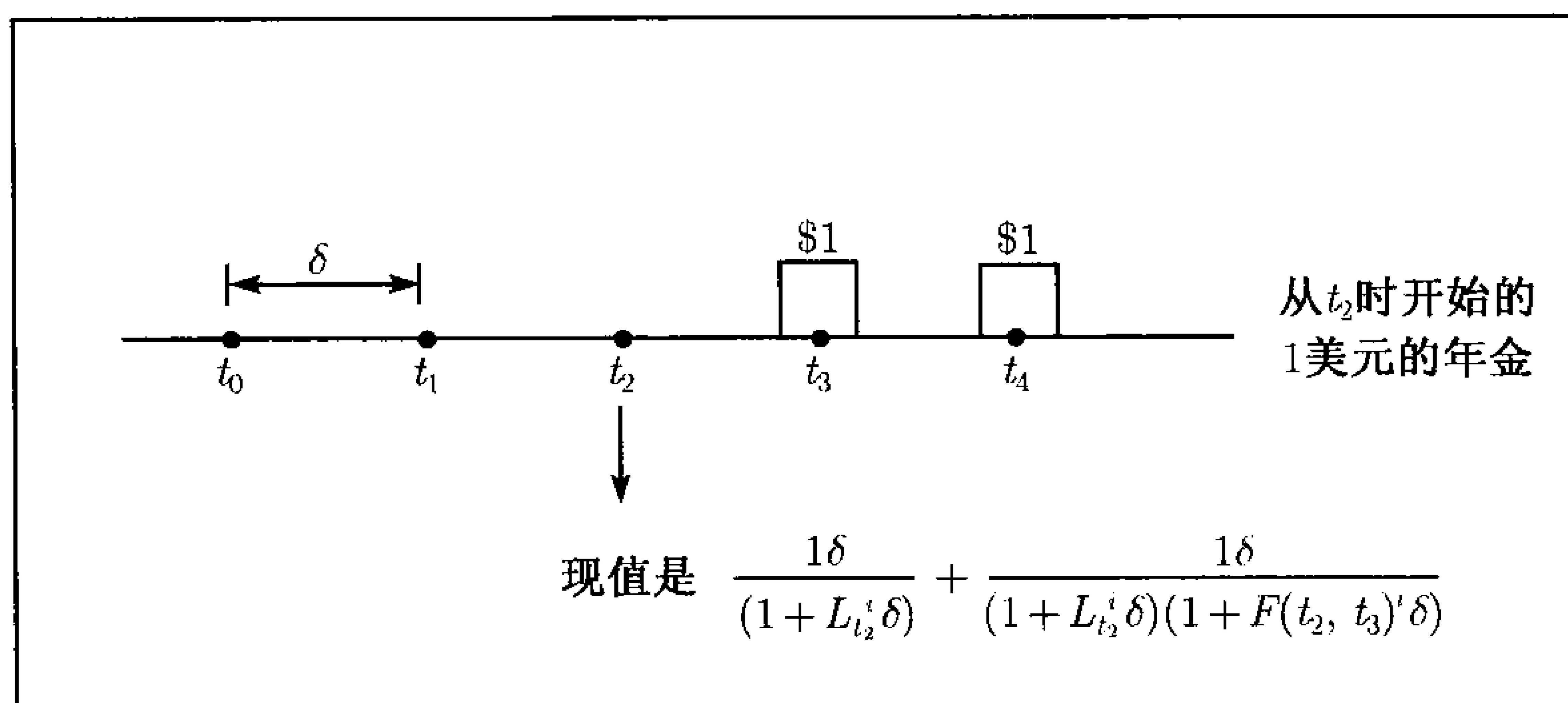



图　18-4

如果在时间 $t_0$ 考虑问题, 那么这些支付在 $t_2$ 时的现值是一个随机变量, 它可以表示为①

$$PV_{t_2}^i = \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}. \tag{10}$$

这里 $L_{t_2}^i$ 是时间 $t_2$ 的 Libor 利率, $F(t_2,t_3)^i$ 是 $t_2$ 开始、$t_3$ 结束的远期利率在状态 $i$ 时的值, 货款在 $t_4$ 时偿还. 我们利用这些利率来计算年金支付在 $t_2$ 时的现值, 这些值与状态有关, 因此 $PV_{t_2}^i$ 带有上标 $i$.

利用无违约风险的贴现债券 $B(t,t_3)$ 和 $B(t,t_4)$, 我们可以将 $PV_{t_2}^i$ 写成

$$PV_{t_2}^i = (\delta)B(t_2,t_3)^i + (\delta)B(t_2,t_4)^i. \tag{11}$$

① 尽管在这种情形 $\delta = 1$, 但是我们更愿意在公式中使用符号 $\delta$.

在这个表达式中, 等号右边的无违约风险债券的价格与状态有关, 原因是它们是在时间 $t_2$ 测量的.

假设两期的利率互换交易活跃, 如图 18-5 所示是一个在时间 $t_2$ 开始的即期互换. 这个即期互换利率 $s_{t_2}^i$ 在时间 $t_0$ 是未知的. 在 $t_0$ 时, 假设市场中交易的是一种利率 $f_{t_0}$ 与 $s_{t_2}^i$ 相对应的远期互换.

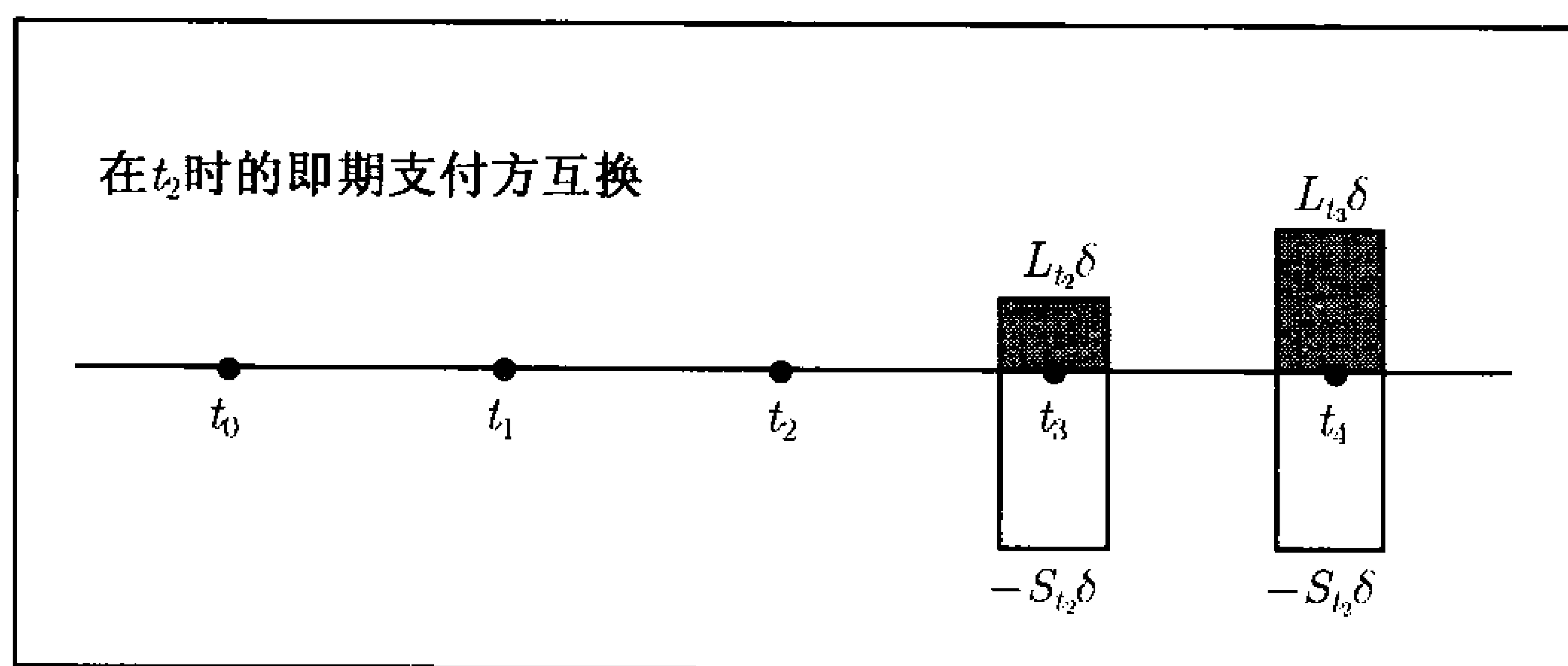



图 18-5

现在考虑在时间 $t_2$ 开始的两期远期互换合约在时间 $t_0$ 的市场价值. 在第 11 章中资产定价基本定理的条件下, 我们可以得到一个包含年金、远期互换合约以及欧式固定支付方互换期权的矩阵方程, 其中欧式期权 $Sw_t$ 当 $s_{t_2} < f_{t_0}$ 时交割相同的两期远期互换. 把这些资产代入第 11 章中的简化矩阵方程中, 我们有

$$\begin{bmatrix} B(t_0,t_3)\delta + B(t_0,t_4)\delta \\ 0 \\ Sw_{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)} & \cdots \\ \cdots & (f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta & \cdots \\ \cdots & Sw_{t_2}^i & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots \\ Q^i \\ \cdots \end{bmatrix}, \tag{12}$$

这里 $\{Q^i, i=1,\cdots,n\}$ 是 $t_2$ 时期的 $n$ 个状态价格, 在无套利条件下, 这些状态价格存在并且都为正

$$Q^i > 0, \tag{13}$$

对所有 $i$ 成立. ①矩阵方程的最后一行表明了互换期权的现价是 $Q^i$ 和期权在到期时各个状态下价值的函数. 在使 $s_{t_2}^i < f_{t_0}$ 的那些状态下, 互换期权到期时具有价外值, 相应的 $Sw_t^i$ 将为 0. 不失一般性, 假设这些状态就是前 $m$ 个状态

$$Sw_{t_2}^i = 0, \quad i = 1,\cdots,m, \tag{14}$$

对剩余的 $n-m$ 个状态, 互换期权到期时的价值为

$$Sw_{t_2}^i = \frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}, \quad s_{t_2}^i < f_{t_0}. \tag{15}$$

① 这个矩阵方程只写出了前 3 行, 忽略了其他的资产. 但是, $Q^i$ 的存在性要求存在其他 $n$ 种资产.

矩阵方程的第一行表示了年金的价值. 我们从相应面值为 1 的无违约风险贴现债券的无套利价格得到

$$B(t_2,t_3)^i=\frac{1}{(1+L^i_{t_2\delta})},\tag{16}$$

$$B(t_2,t_4)^i=\frac{1}{(1+L^i_{t_2}\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}.\tag{17}$$

因此, $B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta$ 就是年金支付的现值. 这个数值在前面被称为 PV01. 实际上, 这里的讨论表明了当我们处理固定收益现金流时, PV01 怎样变成了我们讨论的中心的.

由矩阵等式的第一行得到

$$B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)}+\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]Q^i.\tag{18}$$

现在我们对测度进行变换, 由此得到一种新的工作测度, 也就是所谓的互换测度. 将第一行除以上式的左边, 有

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta}\left[\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)}+\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]Q^i.\tag{19}$$

利用下式定义测度 $\tilde{p}^s_i$

$$\tilde{p}^s_i=\frac{1}{B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta}\left[\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)}+\frac{1\delta}{(1+L^i_{t_2}\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]Q^i.\tag{20}$$

注意只要满足 $Q^i>0$, 我们就有

$$\tilde{p}^s_i>0,\quad i=1,\cdots,n,\tag{21}$$

和

$$1=\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}^s_i.\tag{22}$$

这样, $\tilde{p}^s_i$ 定义了一个完备的离散概率分布, 我们将这个测度称为互换测度. 我们将看到这个测度两个有趣的应用. 首先, 在这个测度下, 相应的远期互换利率是一个鞅, 它具有很简单的动态机理. 其次, 我们将看到通过使用这个测度, 很容易对互换期权进行定价.

### 18.4.2 远期互换利率作为一个鞅

为了表明为什么远期互换利率在适当的测度下是一个鞅, 考虑矩阵方程 (12) 中的第 2 行. 由于远期互换在初始时间的价值为 0, 我们可以写出

$$0=\sum_{i=1}^{n}(f_{t_0}-s_{t_2}^i)\delta\left[\frac{1}{(1+L_{t_2}^i\delta)}+\frac{1}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]Q^i, \tag{23}$$

将它表示为

$$0=\sum_{i=1}^{n}(f_{t_0}-s_{t_2}^i)\delta\left[\frac{1}{(1+L_{t_2}^i\delta)}+\frac{1}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]\left[\frac{B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta}{B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta}\right]Q^i. \tag{24}$$

现在, 我们利用 (20) 中关于互换测度的定义, 得到

$$0=\sum_{i=1}^{n}(f_{t_0}-s_{t_2}^i)[B(t_0,t_3)\delta+B(t_0,t_4)\delta]\tilde{p}_i^s, \tag{25}$$

将常数项提到求和号外, 消掉常数项后, 变为:

$$0=\sum_{i=1}^{n}(f_{t_0}-s_{t_2}^i)\tilde{p}_i^s, \tag{26}$$

或

$$f_{t_0}=\sum_{i=1}^{n}s_{t_2}^i\tilde{p}_i^s, \tag{27}$$

这意味着

$$f_{t_0}=E_{t_0}^{\tilde{P}^s}[s_{t_2}]. \tag{28}$$

因此, 在互换测度下, 远期互换利率是一个鞅, 它在这个测度下的动态机理也就可以写成

$$\mathrm{d}f_t=\sigma f_t\mathrm{d}W_t,\quad t\in[t_0,T], \tag{29}$$

这里我们假设了一种特定的扩散结构, $T$ 是一般互换的到期日. 假定远期互换利率的波动率是 $\sigma$, 很自然地从这些动态机理生成 Monte Carlo 轨道.

### 18.4.3 互换期权的价值

为了得到欧式互换期权的定价公式, 由矩阵方程 (12) 中的第 3 行得到

$$Sw_{t_0}=\sum_{i=1}^{n}Sw_{t_2}^iQ^i. \tag{30}$$

利用互换测度 $\widetilde{P}^s$ 的定义

$$\tilde{p}_i^s = \frac{1}{[B(t_0,t_3)\delta + B(t_0,t_4)\delta]}\left[\frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]Q^i, \quad (31)$$

重新将 (30) 式中的等式写为

$$Sw_{t_0} = \sum_{i=m+1}^{n} Sw_{t_2}^i \left[\frac{[B(t_0,t_3)\delta + B(t_0,t_4)\delta]}{\frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{1\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}}\right]\tilde{p}_i^s. \quad (32)$$

注意, 我们已经成功地在等式右边引入了互换测度, 现在由等式 (15) 知互换期权到期日的非零价值由下式给出

$$Sw_{t_2}^i = \frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}, \quad s_{t_2}^i < f_{t_0}, \quad (33)$$

代入 (32) 式后得到

$$Sw_{t_0} = \sum_{i=m+1}^{n}\left[\frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+F_{t_2}^i\delta)} + \frac{(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}\right]$$
$$\frac{[B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)]\delta}{\frac{\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)} + \frac{\delta}{(1+L_{t_2}^i\delta)(1+F(t_2,t_3)^i\delta)}}\tilde{p}_i^s. \quad (34)$$

这里我们看到了互换测度起到的重要作用. 这个表达式的右边与状态相关的年金价值被抵消了, 于是我们有

$$Sw_{t_0} = [B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)\sum_{i=m+1}^{n}[(f_{t_0} - s_{t_2}^i)\delta\tilde{p}_i^s]. \quad (35)$$

这等价于

$$Sw_{t_0} = [B(t_0,t_3) + B(t_0,t_4)]E_{t_0}^{\widetilde{P}^s}[\max[(f_{t_0} - s_{t_2})\delta, 0]]. \quad (36)$$

利用这个定价方程, 并记住远期互换利率在适当的互换测度下是一个鞅, 我们很容易得到欧式互换期权的解析定价公式. 在市场操作中, 可以用很多方法将这个定价用公式表示出来, 我们将遵循下面的步骤. 对市场作以下假设.

(1) 远期互换利率服从几何 (对数正态) 过程

$$\mathrm{d}f_t = \mu(f_t,t)\mathrm{d}t + \sigma f_t\mathrm{d}W_t, \quad (37)$$

这个过程在互换测度下变成一个鞅

$$\mathrm{d}f_t = \sigma f_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t. \quad (38)$$

(2) 可以利用 Black 公式得到价值

$$f_{t_0}N(d_1) - \kappa N(d_2), \tag{39}$$

其中,

$$d_1 = \frac{\log(\frac{f_t}{\kappa}) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_2 - t_0),}{\sigma\sqrt{t_2 - t_0}} \tag{40}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_2 - t_0}, \tag{41}$$

这里 $t_2$ 是本节讨论的欧式互换期权合约到期日.

(3) 最后, 欧式互换期权 $Sw_t$ 的价值可以通过年金现值进行贴现而得到. 对于时间 $t_0$ 它是

$$Sw_{t_0} = [B(t_0, t_3)\delta + B(t_0, t_4)\delta][f_{t_0}N(d_1) - \kappa N(d_2)]. \tag{42}$$

换句话说, 互换期权定价的惯例是先利用 Black 公式, 然后用一个适当的年金贴现得到的.

### 18.4.4 实际中的复杂化

实际中情况可能会复杂得多. 首先, 市场直接给出的是互换期权的波动率报价, 再利用前面得到的公式来计算一个互换期权的价值. 但是在实际的运用中, 它们大多数都是百慕大式期权, 这使得期权具有美式特征. 一般而言, 对百慕大互换期权没有解析形式的定价公式.

其次, 像上限和下限一样, 波动率微笑的存在使得互换期权定价复杂了许多, 特别是当这些期权又是百慕大期权时, 情况更加复杂.[①]如果互换曲线不平时, 相对于单一交割水平, 不同远期互换利率具有不同的价值特征, 百慕大互换期权的定价将变得愈加复杂.

## 18.5 按揭贷款支持证券

MBS 代表按揭贷款支持证券. 这类证券构成的市场是一个非常重要的市场, 尤其是在美国. 按揭贷款支持证券也叫做 "按揭贷款过手凭证". 它们本质上将购房者支付的利息和本金所产生的现金流转手支付给购买了 MBS 的投资者. 在 MBS 中, 将一个被选定的按揭贷款池作为标的资产, 一个 MBS 投资者按份额分配由标的按揭贷款所产生的现金流.

**例**

一个典型的房利美 MBS 具有以下的特征.

① 一个百慕大互换期权具有不止一个确定的到期日, 它们不是美式的, 但是可以在特定的设定日执行.

每个按揭贷款池都有一个过手利率, 这个利率形成了转手支付给投资者的息票, 它们通常是在初始发行月的下一个月的第 25 天完成的.

过手利率比在资产池中的标的按揭贷款利率要低 (我们在本章中就是这样假设的).

此利率的差额用于支付给房利美以及其他服务机构的费用. 这些服务机构从住房所有者那里收取利息和别的款项, 并担负其他一些职责.

在抵押资产池形成的过程中, 房利美确保标的贷款的按揭贷款利率下降幅度在 250 个基点范围内.

MBS 通过证券交易商出售给投资者.

凭证以簿记 (book-entry) 的形式发行, 并且通过电子汇兑 (wire-transfer) 支付.

房利美的支付机构是纽约联邦储备银行. 这个集中化的支付方式简化了会计程序, 因为投资者持有的各种 MBS 都在每个月一起一次性支付.

凭证最初代表最少 1 000 美元的按揭贷款的未偿还本金. 但是, 随着时间的推移, 本金逐渐摊销得以偿还, 因此剩余本金会不断地减少.

房利美这类机构的活动导致一些重要的后果. 第一, MBS 和房利美机构证券的发行量很大, 形成了一类流动资产. 更进一步地, MBS 和一些机构证券包含了某些隐含的看涨或看跌期权, 这样就创造出了一大类凸性资产. 对冲、套利以及定价等一些重要的问题由此而生. 第二, 房利美这样的机构是衍生物市场的重要参与者, 它们影响着互换、互换期权和其他期权市场的功能和流动性. 第三, 提前还款问题需要引起特别的注意. 第四, 房利美机构承担了按揭贷款的信用风险, 它们将信用风险从按揭贷款的市场风险中分离出来. 最后, 这些机构资产负债表的结构和与联邦政府的特殊关系可能不时地对市场产生重大影响.

## 18.6　结　　论

互换期权在经济活动和世界金融市场中发挥着基础性的作用, 本章通过一个简单的例子说明了互换测度怎样定义并如何将其用于互换期权的定价.

## 参考文献

阅读本章后, 读者可以查阅 Rebonato(2002) 以及 Brigo 与 Mercurio(2001) 这两本著作, 在这两本书中可以找到更进一步的参考文献. 在学术以及实际应用中, 关于本专题的著作越来越多, Andersen et al.(2000) 和 Pedersen(1999) 就是两篇技术性的参考文献.

# 习 题

下面是一段关于互换期权典型策略的材料. 首先仔细阅读它们.

雷曼兄弟和第一波士顿信用建议他们的客户在即将召开的美元联邦开放市场委员会 (U.S. Federal Open Markets Committee) 会议之前购买长期互换期权波动率. 在这项交易中, 银行推荐他们的客户买入长期互换期权的跨式组合 (straddle), 如果长期互换期权的波动率上升, 则这个组合的价值也会随之上升.

一位纽约第一波士顿的官员说, 按揭贷款服务商和投资者都会非常敏捷地用互换期权对冲利率下降时所产生的再融资风险, 这就意味着长期互换期权波动率应该会在接下来的 6 个月中上升.

据纽约的一位交易商说, 在过去的 1 年里, 传统的互换期权波动率的供给在逐步地下降. 政府机构向交易商提供波动率的方式, 主要是通过缔结带期权的互换, 这种期权是关于发行的可赎回债券. 在过去的 1 年里, 由于较高的利率波动率, 对可赎回债券的需求大幅下降, 极大地减少了可赎回债券的主要投资者——银行的需求. 波动率供给的减少将预示中期和长期互换期权波动率的上升.

雷曼兄弟正在推荐一个相对值交易, 在这项交易中, 投资者卖出短期互换期权波动率, 比如说一个 1 年后缔结一个 10 年期互换的期权, 并买入长期互换期权波动率, 这包括 5 年后缔结一个 10 年期互换的期权. 这个交易是用 ATM 互换期权跨式组合构建的, 跨式组合中的权重是这样确定的: 它使这种加权对波动率曲线的斜率产生影响. 该交易商说, 短期互换期权波动率可能会随着政府计划的明朗而在接下来的几个月中下降, 并且市场对利率运行方向的担忧得到缓和. 他补充到, 如果政府在这周的会议上将利率下调 50 个基点的话, 市场就会长舒一口气, 并且短期波动率会比长期波动率下降更多.

第一波士顿建议买入长期波动率. 到发稿时为止, 一个 5 年后缔结一个 5 年期互换期权的权利金在 570 个基点左右, 据一位第一波士顿的官员所说, 这个月的峰值达到了 670 个基点. 在 1994-1995 年美国经济中一个类似的转折时期, 类似的互换波动率接近 700 个基点. 本周的会议可能会使这种头寸立即得到提升. 如果利率下调的幅度高于预期的 50 个基点, 那么长期互换期权的波动率会上升, 即使是 50 个基点, 互换期权的波动率也有可能会随着按揭贷款交易者的对冲活动而上升. 一个相互抵消的因素是如下事实: 在一次联邦会议后, 短期波动率通常会下降, 有些时候还会拖动长期波动率一起下降. (《衍生产品周刊》, 2001 年 11 月)

首先, 我们对材料中提到的机制作出一些评论. 联邦机构 (Agencies) 这个词用来指那些为银行业提供按揭贷款融资的半官方机构, 比如说房利美. 这些机构出售包含有内置期权的债券. 例如, 联邦机构有权在一个特定时间以面值赎回债券, 这样, 这些债券的持有者就是期权卖出者, 联邦机构成了期权买方. 为了对冲这些头寸, 同样需要卖出期权.

(a) 利用现金流图, 表示出联邦机构由于发行可赎回债券所建立的头寸.

(b) 为什么短期波动率会随市场下降? 为什么长期波动率会上升?

(c) 你是如何理解一个平价互换跨式期权的? 给出它隐含的现金流.

(d) 如果关于波动率的期望变成现实, 如何从中获利?

(e) 第一波士顿推荐的头寸与雷曼推荐的头寸在各自所涉及的风险之间有什么区别?

# 案例分析: 丹麦抵押债券

丹麦抵押债券是流动性好、波动大且较复杂的工具, 它们在基础较好的法制和机构环境中交易, 因此吸引了一批最好的对冲基金. 这里, 我们只是将它视为一个关于互换、互换期权、期权以及对住房行为建模所涉及的风险的例子.

## 背景材料

为了回答下列问题, 需要很好地理解一些概念和工具:

(1) 普通利率互换;
(2) 互换期权;
(3) 按揭贷款支持证券的提前还款风险;
(4) 波动率和期权之间的联系;
(5) Libor 以及简单的 Libor 工具;
(6) 政府债券市场以及高收益债券.

## 问题

## 第一部分

(1) 定义以下的概念: 按揭贷款支持债券、提前还款风险、隐含期权以及负凸性.

(2) 说明你怎样在互换市场和互换期权市场中对冲你的丹麦抵押债券 (DMB) 头寸, 并赚得可观的利润. 为什么这将增加丹麦市场的流动性?

(3) 说明你如何利用百慕大期权做到这些?

(4) 仔细地说明这是不是真正的套利, 是否存在风险呢?

## 第二部分

(1) 走廊结构 (corridor structure) 是什么?
(2) 这段材料中的 "错位" 是什么意思?
(3) 什么是平衡保护互换 (balance-protected swaps)?
(4) 解释这些错位交易的目的.

## 材料 1

追求收益的银行和对冲基金从长期丹麦按揭贷款债券中大赚了一笔, 他们利用这些债券来对冲互换市场和互换期权市场中的一部分敞口, 并套取相当数量的利润 (1). 但是这些策略是有风险的, 其中涉及的结构要用到很复杂的统计模型.

丹麦按揭贷款债券市场正在经历一场革命, 传统上由丹麦养老基金或投资经理人购买的证券正被一些老练的国外银行和对冲基金所抢购. 这些国际玩家试图在按揭贷款市场、信用以及利率市场之间寻求套利. 这些活动使得丹麦克朗和德国马克的互换以及互换期权市场中的总量增加了许多. (1) 虽然这些跨国活动的规模和本质并不清楚, 但是可以确定的是它的规模是

巨大的, 而且仍在不停地增加. 一位在总部位于伦敦的银行任职的结构师说: "外来的参与已经热火朝天." 银行被认为是这些活动的中心, 这些银行包括了巴克莱资本 (Barclay Capital)、银行家信托 (Bankers Trust)、以及美林国际等.

市场专家说, 由于在欧洲和美国市场中的获利机会正在逐渐减少, 所以来自外部投资者的兴趣大大地减少了. 这时欧洲投资者捕捉到了南部欧洲债券的收益率相比于欧元区的收益率的骤然跌落. 美国的对冲基金开始转向丹麦, 因为此时美国抵押市场中的套利机会已经开始干涸.

发生在欧洲的这些活动的焦点集中在丹麦抵押债券, 这是因为它们被视为除了 (2) 美国证券外唯一真正的套利机会. 7 个专门的私有公司, Nykredit, Real Kredit, BRF Kredit, Danske Kredit, Unikredit, Totalkredit 以及 DLR 到目前为止不间断地向一个市场发行了价值 9 000 亿丹麦克朗的债券. 按揭贷款支持市场在欧洲的其他部分缓慢地发展. 德意志银行在上周首次推出了德国按揭贷款证券化, 并且 Haus I 和 ABN AMRO 已经两次将荷兰的按揭贷款证券化.

Arbing MBS

在丹麦抵押债券市场中的这些外部活动 (2) 集中在对内置提前还款期权的估值上, 这些期权使得借钱一方能够以面值回购这些债券, 以此来对冲标的抵押池的提前还款风险. 衍生物专家根据传统非按揭贷款支持的互换期权分析了提前还款期权, 并通过用互换期权交易按揭贷款支持债券实现可能的相对价值. (2)

在其中一个交易的版本中, 投机商买入按揭贷款债券, 用丹麦克朗或 (密切相关的) 德国马克执行一个百慕大收入互换期权, 这样就消除了提前还款的风险, 并得到了相对单纯的利率和信用敞口.

一些交易者走得更远, 他们同时用一个互换和互换期权来交易按揭贷款债券, 由此创造出一个真正的套利机会 (3). 他们在互换中支付固定利息来消除利率风险, 同时买入接受方互换期权来对冲内置期权. 这样得到的仅仅是 Libor 利率加上回报, 以及由于承受信用风险而锁定的利润.

类似的活动也构成了美国抵押债券市场的中枢, 一些老练的美国商行, 比如高盛、摩根斯坦利, 以及所罗门兄弟, 它们通过使用其他工具 (3) 来仔细研究抵押债券, 并从中发现了套利机会.

但是这样的潜在利润, 无论是在美国还是丹麦都会受到相当多风险的影响. 第一, 在长期百慕大互换期权的定价中存在着很多问题, 根据互换期权的专家所说, 这种产品对收益率曲线形状的敏感性很强, 而这种特性在简单的单因素互换期权定价模型中并没有反映出来.

第二, 在量化提前还款风险的大小时也存在着很多的困难. "提前还款的考虑在过去几年里耗费了美国抵押部门的大量精力, 但由于错误的假设使很多操作都告吹了." 一位就职于华尔街著名投资银行的结构师这样说道.

"一个商行或另一个商行的风险模型是错误的, 这样的传言总是存在." 另一位衍生品专家说到. 银行和对冲基金的问题是提前还款的数量由个体丹麦财产所有者的再融资活动的大小决定, 并且它是当时的利率环境和个体所有者的统计属性的函数.

因此, 抵押债券的定价问题部分地归结到统计模型的建立, 该模型要分析出利率市场环境以外的因素. 如果丹麦利率下降的话, 一些按揭贷款的持有者很有可能会选择偿还他们高利率

的按揭贷款, 并通过再融资获得一个新的低利率贷款. 这会导致借款方提前偿还一部分抵押债券. 但并不是每个购房者都会这样做, 有些可能不会再融资; 有些则有可能在一年中的某个时间倾向于再融资; 还有一些再融资在某个特定的地方发生的可能性更高.

展望未来, 抵押债券的套利活动可能会在很短的时间波及到欧洲的其他部分. 丹麦政府正考虑通过限制 30 年期的发行来冷却经济的热潮. (5) 这会压低市场的流动性并使得套利更加困难. 与此同时, 投资银行也正在同瑞典、德国、荷兰以及英国的有关当局协商做一些改变, 以使得它们各自所在的按揭贷款债券市场的效率更高. (IFR 1998 年 5 月)

**材料 2**

这段材料是案例分析的第二部分.

动态基金瞄准错位 (dislocation) 机会

随着短期收益率在欧洲范围内的持续下降, 货币市场基金正逐渐通过结构化产品把目光投向了更高的收益率. 一般而言, 它们通过走廊结构卖出波动率来提高回报. (1) 更具体地说, 它们正是利用了丹麦按揭贷款市场以及先令互换利差市场中的对冲基金诱导出的市场错位. "在过去的几周内, 基金已经用很小的信用风险来替代了稍多的市场风险." 一个主要欧洲银行的市场专家说. 他同时补充到, 基金将金融市场中正在增长的信心视为从市场错位中生成更高收益率的机会.

特别地, 交易商说基金正买进丹麦抵押债券以及平衡保护 (balance-protected) 互换 (2). 平衡保护互换保证了债券购买者息票的支付, 但是仍然给债券持有者遗留了久期风险, 它是当提前还款发生时工具的久期将会变短的风险. 而对没有被互换的丹麦抵押债券, 持有者的敞口是提前还款率上升以及因此而产生的息票水平下降的风险.

除了具体的与错位相关的交易外 (3), 市场专家们说基金还有这样一种倾向: 它们正从标准的商业票据以及资产互换投资转向回报高、结构化更复杂的产品. 与传统的基金买入浮动利率工具并仅仅暴露出工具的信用敞口不同, 动态货币市场基金买入的工具所暴露的敞口是利率和波动率风险.

一个结构师上周说, 动态基金行业的增长已经有相当一段时间了. 他还说, 某些欧洲基金将更多的资金投入到动态工具而不是传统工具, 人们对货币市场基金以及它们赚取收益的各种尝试感到亢奋.

典型的动态货币市场基金交易是走廊 (corridors), (4) 最近比较流行的基于两个 Libor 利率的交易就属于这种交易. 一个银行结构师说, 他最近交易的是一个提供较高息票的票据, 同时在设定的极限内提供了美国美元 Libor 和法国法郎 Libor. 资本的偿还是保证的, 但是息票的偿还是不确定的 (contingent). 通过买入这些结构产品, 基金实际上是卖出了 Libor 波动率, 并且将赚取的权利金用来提高他们获得的息票水平. (5) 息票利息的提高幅度通常取决于走廊的宽度, 一个紧凑性走廊额外的收益可达到 200 个基点, 而一个宽松型走廊的附加收益在 50 个基点左右. 交易商说基金喜欢更谨慎些, 它们更倾向于投资宽松型的走廊和低收益产品.

# 参考文献


[1] Andersen, L., Andreasen, J.(2000), "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance* 7(1), 1–32.

[2] Aït-Sahalia,Y.(1996), "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies* 9(2), 385–426.

[3] Avellaneda, M., Buff, R., Friedman, C., Grandchamp, N., Kruk, L., Newman, J. (2001), "Weighted Monte Carlo: A new Technique for Calibrtating Asset-Pricing Models," *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 4(1), 91–119.

[4] Barone-Adesi, G., Whaley, R. E,(1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values," *Journal of Finance* 42(2), 301–320.

[5] Bielecki, T. R., Rutkowski, M. (2001), *Credit Risk.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[6] Black, F., Derman, E., Toy, W. (1990), "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal* 46(1), 33–39.

[7] Bodie, Z., Merton, R. C. (1999), *Finance.* Prentice Hall, New Jersey.

[8] Brace,A., Gatarek, D., Musiela, M. (1997), "The market model of interest rate dynamics," *Mathematical Finance* 7, 127–154.

[9] Brealey, R. A., Razavi, B., Myers, S. (2002), *Principles of Corporate Finance*, 7th edition. McGraw Hill, New York.

[10] Brigo, D., Mercurio, F, (2001), *Interest Rate Models.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[11] Chance, D. M., Chance, D.(1997), *An Introduction to Derivatives*, 4th edition. International Thomson Publishing.

[12] Clewlow, L., Strickland, C. (1998), *Implementing Derivative Models.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[13] Cloyle, B., Graham, A. (2000), *Currency Swaps.* Currency Risk Management Series. AMACOM.

[14] Cox, J. C., Ross, S. A. (1976a), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics* 3(1), 145–166.

[15] Cox, J. C., Ross, S. A. (1976b), "A survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory," *Journal of Finance* 31(2), 383–402.

[16] Das, S. (1994), *Swaps and financial derivatives: The global reference to products, pricing, applications and market*, 2nd edition. Law Book Co., Sydney.

[17] Das, S. (2000), *Structured Products and Hybrid Securities*, 2nd edition. John Wiley

& Sons, New Jersey.

[18] Das, S. (2003), *Swaps and Financial Derivatives:Products, Pricing,Applications and Risk Management*, 3rd edition. John Wiley & Sons, New Jersey.

[19] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., Zou, J. (1999), "A Guide to Volatility and Variance Swaps," *Journal of Derivatives* 6(4), 9–32.

[20] Derman, E., Kani, I. (1994), "The Volatility Smile and Its Implied Tree," Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.

[21] Derman, E., Kani, I., Chriss, N.(1996), "Implied Trinomial Tress of the Volatility Smile," Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.

[22] Duffie, D.(2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd edition. Princeton University Press, New Jersey.

[23] Duffie, D., Singleton, K. J. (2003), *Credit Risk:Pricing, Measurement, and Management.* Princeton University Press, Princeton (New Jersey).

[24] Dupire, B. (1992), "Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility," Working paper, Société Générale, Paris.

[25] El Karoui, N., Jeanblanc-Picque, M., Shreve, S. E., (1998) *Robustness of the Black and Scholes formula.* Mathematical Finance.

[26] Fabozzi, F. J. (ed.)(1998), *Handbook of Structured Financial Products.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[27] Flavell, R. (2002), *Swaps and Other Instruments.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[28] Giesecke, K. (2002) *Credit Risk Modelling and Valuation:An Introduction.* Manuscript.

[29] Glasserman, P., Zhao, X. (2000), "Arbitrage-free discretization of lognormal forward Libor and swap rate model," *Finance and Stochastics* 4, 35–68

[30] Hull, J. C. (2002), *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th edition. Prentice Hall, New Jersey.

[31] James 2003.

[32] Jamshidian, F. (1997), "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics* 1, 293–330.

[33] Jackel 2002.

[34] Jarrow, R. A., Turnbull, S. (1999), *Derivative Securities:The Complete Investor's Guide*, 2nd edition. South-Western College Publishing.

[35] Jarrow, R. A. (2002), *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, 2nd edition. Stanford University Press.

[36] Jegadeesh, N., Tuckman, B. (1999),*Advanced Fixed-Income Valuation Tools*, John Wiley & Sons, New Jersey.

[37] Johnson, S., Lee H. (2003), "Capturing the smile," *Risk* March, 89–93.

[38] Jordon, L., (2000), *Options.* Financial Times-Prentice Hall.

[39] Kat, H. (2001), *Structured Equity Derivatives.* Wiley.

[40] Kloeden, P. E., Platen, E. (1999), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, 3rd edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[41] Kolb, R. W. (1999), *Futures, Options, and Swaps*, 3rd edition. Blackwell Publishers.

[42] Lipton, A. (2002), "Assets with Jumps," *Risk* September, 149-153.

[43] McDougall, A. (1999), *Mastering Swaps Markets:A Step-by-Step Guide to the Products, Applications and Risks.* Financial Times Prentice Hall.

[44] Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance* 29(3), 449-470.

[45] Merton, R. C. (1976), "Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics* 3(1), 125–144.

[46] Miltersen, K. R., Sandmann, K., Sondermann, D. (1997), "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates," *Journal of Finance* 52(1), 409–430.

[47] Musiela, M., Rutkowski, M. (1998), *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd printing. Springer-Verlag Berklin Heidelberg New York.

[48] Natenberg, S. (1994), *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques.* McGraw-Hill Trade, New York.

[49] Neftci, S. N. (2000), *Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd edition. Academic Press, New York.

[50] Øksendal, B. (2003),*Stochastic Differential Equations:An Introduction with Applications*, 6th edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

[51] Pedersen,.(2000).

[52] Piros, C. (1998),"Perfect Hedge: To Quanto or Not to Quanto,"in DeRosa, D. F.(ed.), *Currency Derivatives: Pricing Theory, Exotic Options, and Hedging Applications.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[53] Pedersen, M. (1999), *Bermudan Swaptions in the LIBOR Market Model*, Manuscript.

[54] Questa, G. S. (1999), *Fixed Income Analysis for the Global Financial Market: Money Market, Foreign Exchange, Securities, and Derivatives.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[55] Rebonato, R. (2000), *Volatility and Correlation: In the Pricing of Equity, FX and Interest-Rate Options.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[56] Rebonato, R. (2002), *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond.* Princeton University Press, Princeton (New Jersey).

[57] Ritchken, P. (1996), *Derivative Markets:Theiory, Strategy, and Applications.* Harpercollins College Div.

[58] Roth, P. (1996), *Mastering Foreign Exchange and Money Markets.* Financial Times Market Editions.

[59] Ross, S. A., Westerfield, R. W., Jaffe, J. (2002), *Corporate Finance*, 5th edition. McGraw Hill College Div., New York.

[60] Steiner, R. (1997), *Mastering Financial Calculations:A Step-by-Step Guide to the Mathematics of Financial Market Instruments.* Financial Times Prentice Hall.

[61] Stojanovic, S. (2003), *Computational Financial Mathematics Using MATHEMATICA: Optimal Trading in Stocks and Options.* Birkhauser Boston.

[62] Taleb, N. N. (1996), *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options.* John Wiley & Sons, New Jersey.

[63] Tavakoli, J. M. (2001), *Credit Derivatives and Synthetic Structures: A Guide to Instruments and Applications*, 2nd edition. John Wiley & Sons, New Jersey.

[64] Tuckman, B. (2002), *Fixed Income Securities:Tools for Today's Markets*, 2nd edition. John Wiley & Sons, New Jersey.

[65] Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure," *Journal of financial Economics* 5, 177–188.

[66] Wilmott, P. (2000), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, 2 Volume Set. John Wiley & Sons, New Jersey.

# 索　引


**A**

“ad-hoc”方法, 156
按揭贷款市场, 481

**B**

BDT 树, 327
Black 公式, 196
Black-Scholes 公式, 194
Black-Scholes 和红利, 340
Black-Scholes 偏微分方程, 194
$B_t$ 和 $B(t;T_3)$ 的动态机理, 162
保管, 137
保证自融资, 165
报价惯例, 280
崩盘的可能性, 415
标准回购, 133
波动率对冲, 387
波动率互换的框架, 392
波动率头寸, 380
波动率微笑, 280, 404

**C**

Caplet 的定价, 426
CMS 互换的定价, 375
测度变换技术, 365
成本, 227
初始保证金, 13
初始头, 184
处理期权账簿, 213
纯波动率头寸, 389

**D**

delta, 201
delta 对冲的债券组合, 224
delta 和两值期权的价格, 271
带有缺失资产的合成, 153
贷款出售, 476
蝶式期权 (butterfly), 267
盯市, 57
定价, 45
定价函数, 326
对冲, 27, 184
多头寸, 25

**E**

二叉树, 161

**F**

FRA 剥离, 79
FRA 的凸性, 237
FRA 合约, 78
FRA 合约方程, 79
FX 互换, 52
非对称性, 85
非几何价格过程, 415
非利率互换, 96
风险逆转, 257, 430
风险债券的分解, 437

风险中性概率, 299, 357
缝隙利差互换, 126
浮动现金流, 109
浮动支, 393
复合回购, 145
复合即期购买策略, 145
复制过程, 161
复制机制, 164
复制两值买入期权, 269
复制微笑, 410
复制债券, 165

**G**

gamma, 205
gamma 交易, 210
Girsanov 定理, 217
高阶导数, 209
构造 CDS, 437
股票回购, 138
股票市场, 13
股票指数, 251
固定现金流, 109
惯例, 202
规范化和远期测度, 357
国库券合成, 44
国内市场, 11

**H**

含 $B_t$ 和 $B(t;T_3)$ 的合成, 154
合成附息债券, 108
合成概率, 299
合成工具, 32
合约方程, 46
互换, 54, 94
互换测度, 302, 489
互换惯例, 105
互换和回购, 145
互换框架, 344
互换利率调整, 239
互换期权, 487
回购交易, 137
回购套利, 147
汇率, 251
混合产品, 436
获得风险中性动态方程, 320
货币互换, 102
货币市场复制, 72
货币远期, 40

**J**

基差互换, 104
基金管理, 114
即期, 2
加入违约风险, 467
假期惯例, 22
监管, 115
监管者, 15
建立崩盘模型, 418
建立复合头寸, 115
交叉货币的 PDE, 338
交叉货币定价, 334
交叉货币期权, 339
交叉货币远期, 339
交割不匹配, 213
交割期, 13
交易波动率期限结构, 381
交易池, 13
交易商, 15
交易微笑, 420
解析公式, 461

解析解, 324
仅利用 $B_t$ 的合成, 154
经纪人, 15
静态复制, 150
久期, 116
具有常数即期利率的看涨期权定价, 317
校准树, 325

**K**

可转换债券, 465
空头寸, 25
跨式期权, 265

**L**

Libor 利率, 67
Libor 树, 325
$L_i$ 的方差, 328
累积互换, 126
离散偏差, 324
离散时间动态复制, 159
利差产品, 435
利率互换, 99, 441
两值 (binary) 期权, 268
零售用途, 181
零息收益率曲线, 377
流动性, 172
流动性问题, 391
路径依赖性, 323

**M**

Monte Carlo 定价, 317
Monte Carlo 方法, 316
Monte Carlo 过程, 321
Monte Carlo 实现, 364
买权重写, 260
买入 (bid) 价, 18
卖出 (ask) 价, 18
免疫, 156
模型, 172

**O**

omega, 209
欧洲市场, 11

**P**

PDE 方法, 337
PDE 和条件期望, 229
偏微分方程, 210
偏斜, 280
票面收益率曲线, 377
平价互换, 125
平价期权 (at-the-money, ATM), 252
普通期权, 178

**Q**

期货合约, 37
期货交易所, 13
期货套利, 142
期权, 176
期权的动态复制, 159
期望收益, 304
期限结构动态机理, 355
奇异期权, 178, 268
奇异期权定价, 429
趋同交易, 66
权益, 457
权益互换, 96

**S**

商品互换, 98

商品联系的利率互换, 126
上限定价, 331
设计凸性, 234
是结算日期, 344
市场惯例, 18
市场指令, 16
收益提高策略, 260
树的校准, 329
树模型, 307
水平分解, 107
税收策略, 143
税收优势, 114
随机微分方程, 216

T

TED 利差, 82
theta, 208
套利, 28
套利方法, 142
套利机会, 290
套利机会存在性, 256
特别抵押, 132
提前偿还 (Prepayment) 期权, 239
跳跃, 172
头寸, 25
头寸的对冲, 485
头寸限制的存在性, 282
凸性差异, 82
凸性调整, 238
凸性头寸, 220

V

vega, 207
vega 对冲, 208

W

微笑动态机理, 412
微笑效应, 391
无套利初始条件, 171
无套利动态机理, 361
无套利价格, 290
无套利随机微分方程, 306

X

现金流, 32
现金流的等价性, 346
限制指令, 16
辛迪加贷款, 29
辛迪加过程, 28
信用风险, 3, 77
信用工具, 36
信用互换, 98
信用违约产品, 435
信用衍生品, 434
选择期权, 197
询价差, 84, 172

Y

一般抵押, 132
抑制式期权, 264
引理, 217
由附息债券得到的零息曲线, 378
有担保借出, 476
远期, 39
远期测度, 359
远期贷款, 68
远期点, 54
远期利率, 86
远期利率的无套利 SDE, 360

鞅和风险溢价, 304
鞅性, 302

**Z**

在岸市场, 11
在 $\tilde{P}$ 下的鞅, 303
债券的偏微分方程, 227
债券价格, 85
债券价格指数, 251
债券头寸融资, 139
障碍的对冲, 427
障碍期权, 198
证券化现金流, 474
支付矩阵, 289
支付图, 25
支付图表, 249
重置日期, 344
状态, 288
状态价格, 291
准备金要求, 11
资本管制, 50
资产互换, 104
纵向分解, 111
做市, 13
做市商, 14

［General Information］
书名＝金融工程原理
作者＝SalihN．Neftci编著
页数＝509
出版社＝人民邮电出版社
出版日期＝2009．11
SS号＝12402728
DX号＝000006816606
url＝http：／／www．zhizhen．com／book／84cce649d571354c063bfd778d4146ad

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　引言
１．１货币市场问题
１．２税收例子
１．３一些忠告
１．４结论
参考文献
案例分析
第二章　市场，参与者与惯例概述
２．１导论
２．２市场
２．３参与者
２．４交易机制
２．５市场惯例
２．６工具
２．７头寸
２．８辛迪加过程
２．９结论
参考文献
习题
第三章　现金流工程与远期合约
３．１导论
３．２合成工具
３．３远期合约
３．４货币远期
３．５合成和定价
３．６合约方程
３．７应用
３．８“更好”的合成工具
３．９期货
３．１０远期惯例
３．１１结论
参考文献
习题
案例分析
第四章　简单利率衍生工具的金融工程
４．１导论
４．２ｌｉｂｏｒ和其他基准利率
４．３远期贷款
４．４远期利率协议
４．５期货：欧洲货币合约
４．６现实中的复杂性
４．７远期利率和期限结构
４．８惯例
４．９一个题外话：剥离
４．１０结论
参考文献
习题

第五章　互换工程简介
５．１引言
５．２工具：互换
５．３互换的类型
５．４利率互换金融工程
５．５互换的用途简介
５．６互换机制的新问题
５．７一些惯例
５．８货币互换和ＦＸ互换
５．９术语
５．１０结论
参考文献
习题
第六章　金融工程的回购市场交易策略
６．１引言
６．２回购
６．３回购的类型
６．４股票回购
６．５回购市场交易策略
６．６用回购进行合成
６．７结论
参考文献
习题
案例分析
第七章　动态复制方法与合成
７．１引言
７．２一个例子
７．３静态复制方法的回顾
７．４特定合成
７．５动态复制的原理
７．６一些重要条件
７．７现实生活中的复杂性
７．８结论
参考文献
习题
第八章　期权的交易机制
８．１引言
８．２期权
８．３期权的定义和符号
８．４作为波动性工具的期权
８．５期权工具
８．６希腊字母和它们的用途
８．７现实中的复杂性
８．８结论：什么是期权
参考文献
附录８－１
附录８－２
习题
第九章　凸性头寸
９．１　引言
９．２　一个难题
９．３　债券的凸性交易

９．４　凸性源
９．５　一种特殊的工具：交叉货可工具
９．６　结论
参考文献
习题
案例分析
第十章　期权工程及其应用
１０．１　引言
１０．２　期权策略
１０．３　基于波动率的策略
１０．４　奇异期权
１０．５　报价惯例
１０．６　现实中的复杂性
１０．７　结论
参考文献
习题
第十一章　金融工程中的定价工具
１１．１　引言
１１．２　定价方法小结
１１．３　框架
１１．４　一个应用
１１．５　基本定理的推论
１１．６　无套利动态机理
１１．７　定价方法的选择
１１．８　结论
参考文献
附录１ｌ—１基本定理的简单经济学
习题
第十二章　基本定理的应用
１２．１　引言
１２．２　应用１：Ｍｏｎｔｅ　Ｃａｒｌｏ方法
１２．３　应用２：校准
１２．４　应用３：交叉货币
１２．５　结论
参考文献
习题
第十三章　固定收入工程的框架
１３．１　引言
１３．２　互换框架
１３．３　期限结构模型
１３．４　期限结构动态机理
１３．５　测度变换技术
１３．６　应用
１３．７　结论
参考文献
附录１３－１
习题
第十四章　波动率工程、波动率互换和波动率交易工具
１４．１　引言
１４．２　波动率头寸
１４．３　波动率支付的不变性
１４．４纯波动率头寸

１４．５波动率互换
１４．６　　合约的一些应用
１４．７　　波动率
１４．８　　结论
参考文献
习题
第十五章　金融工程的微笑效应
１５．１　　引言
１５．２　　预备知识
１５．３　　微笑一瞥
１５．４　　波动率微笑
１５．５　　微笑动态机理
１５．６　　如何解释微笑
１５．７　　与微笑相关的问题
１５．８　　交易微笑
１５．９　　微笑的定价
１５．１０　　奇异期权和微笑
１５．１１　　结论
参考文献
习题
第十六章　信用衍生品如何改变金融工程
１６．１　　引言
１６．２术语和定义
１６．３信用违约互换
１６．４总收益互换
１６．５　　信用衍生品的用途
１６．６　　资产负债表和信用衍生扇
１６．７　　结论
参考文献
习题
案例分析
第十七章　权益工具工程学：定价和复制
１７．１　　引言
１７．２　　权益
１７．３　　权益产品的工程应用
１７．４　　证券化的金融工程
１７．５　　结论
参考文献
习题
案例研究
第十八章　一种重要应用：互换期权和按揭贷款
１８．１　　引言
１８．２　　按揭贷款市场
１８．３　　互换期权
１８．４　　互换期权的定价
１８．５　　按揭贷款支持证券
１８．６　　结论
参考文献
习题
案例分析：丹麦抵押债券
参考文献
索引